

УДК 532.5.031

© Д. В. Чаликов

Санкт-Петербургский филиал Института океанологии им. П. П. Ширшова РАН

Технологический университет Свинбурна, Мельбурн, Австралия

dmitry-chalikov@yandex.ru

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВОЛН

Разработана простая и точная схема, предназначенная для долговременного моделирования периодических трехмерных потенциальных волн. Схема основана на следующей поверхности неортогональной криволинейной системе координат. Потенциал скорости представлен как сумма аналитической и нелинейной компонент. Трехмерное уравнение для нелинейной компоненты решается итерациями. Используется Фурье-сеточный метод, аппроксимация второго порядка для вертикальных производных на растянутой сетке и схема Рунге—Кутты четвертого порядка для интегрирования по времени. Схема проверена воспроизведением бегущей волны Стокса. Однопроцессорная версия модели позволяет моделировать эволюцию волнового поля с сотнями тысяч степеней свободы в течение сотен периодов волны пика. Модель создана для исследования нелинейных свойств поверхностных волн, генерации экстремальных волн, прямых расчетов спектра нелинейных взаимодействий. После введения в модель схем расчета притока энергии и диссипации модель будет использоваться для прямого моделирования эволюции волнового поля.

Ключевые слова: трехмерные нелинейные поверхностные волны, волны Стокса, неустойчивость Бенджамина—Фейера, нелинейные взаимодействия, интеграл Хассельманна.

Морские волны относятся к явлениям, которые в наибольшей степени влияют на человеческую деятельность в море и являются причиной огромного количества жертв и катастроф. Особенное значение изучение волн приобрело в связи с развитием морской добывающей промышленности. Волны также могут рассматриваться как возобновляемый источник энергии. Наиболее важным практическим достижением в этой области геофизической гидродинамики является создание прогностических моделей ветрового волнения [1—3]. Такие модели, основанные на спектральном представлении волнового поля, обобщают основные экспериментальные и теоретические достижения, полученные за прошедшие двести лет существования теории поверхностных волн [4, 5]. Тем не менее, физика, заложенная в модели, нуждается в усовершенствовании, поэтому, параллельно с созданием и развитием инженерных прогностических моделей, активно ведутся работы по прямому моделированию волн. Эти работы в основном базируются на упрощенных уравнениях потенциального движения. Потенциальность и по сей день остается основным предположением (к счастью, хорошо обоснованным и подтвержденным экспериментально). В последние два десятилетия появились модели, основанные на полных уравнениях потенциального движения со свободной поверхностью. Точные двухмерные и трехмерные уравнения для потенциальных волн решаются методом поверхностного интеграла. Конформные переменные начали применяться для теоретических исследований, начиная с 1980-х гг. [6, 7]. Первая попытка применения конформного преобразования для построения численной модели была осуществлена Уитни [8], который, впрочем, привел результаты единственного расчета. Уитни использовал крайне низкое спектральное разрешение и оттого сделал неблагоприятный вывод о надежности конформного подхода.

Несмотря на значительные упрощения, которые вносит предположение о потенциальности движения, теоретические исследования поверхностных волн по-прежнему являются трудной задачей, так как она сводится к решению уравнения Лапласа с двумя нелинейными граничными условиями на криволинейной движущейся поверхности. В связи с этим огромное большинство моделей, использовавшихся для исследования динамики поверхностных волн, основывалось на упрощенных уравнениях, таких как нелинейное уравнение Шредингера [9]. В принципе, не всегда ясно, какие эффекты опущены в таких моделях. Особого внимания заслуживают лагранжевы методы, позволяющие воспроизвести начальную фазу опрокидывания [10, 11]. Этот подход, который ничем нельзя заменить, применяется для исследования самого процесса обрушения, но он неприменим для моделирования долгопериодной эволюции волн, поскольку в процессе интегрирования не сохраняется полная энергия.

В последние годы появились методы, основанные на полных потенциальных уравнениях. Двухмерные периодические волны (в координатах глубины z и горизонтали x)¹ наиболее эффективно моделируются в конформных координатах [12—15]. При конформном преобразовании уравнение Лапласа не меняет свою форму, поэтому вертикальная скорость на поверхности вычисляется аналитически, и уравнения превращаются в систему двух уравнений в частных производных, которые решаются Фурье-методом с высокой точностью [6, 7, 12—17].

Естественно, метод конформных переменных не может быть расширен на трехмерное движение. Здесь также применялись приближенные методы, но мы их обсуждение опустим. Наиболее развитый метод моделирования поверхностных гравитационных волн основан на так называемом поверхностном интеграле и использовании функции Грина [18—21]. Модель основана на первичных уравнениях потенциального движения жидкости и в принципе может быть применена для моделирования очень крутых волн и даже волн, приближающихся к обрушению [22, 23]. К недостаткам метода можно отнести его высокую сложность. Применение метода иллюстрируется на примере сравнительно простых волновых полей. Трудно себе представить, что этот метод может быть применен для обширных многомодовых волновых поверхностей и интегрирования на длительное время. Внедрение многополюсной техники в методе поверхностного интеграла связано со значительными алгоритмическими трудностями.

Альтернативные методы моделирования трехмерных волн основаны на численном решении уравнения для потенциала скорости. Эти методы развивались в течение последних трех десятилетий [24, 25]. Преимущество этих методов состоит в том, что в них использовались отслеживающие поверхность системы координат, что упрощало использование граничных условий на свободной поверхности. Это упрощение, однако, влекло за собой значительное усложнение: уравнение Лапласа обращалось в полное эллиптическое уравнение. Такое уравнение, полученное в σ -координатной системе (превращающее область в прямоугольник) решалось в [26] на основе трехмерных конечных элементов. Конечно-разностные схемы с использованием многомасштабных сеток развивались в [27—29]. Во всех работах этой группы основное внимание уделялось воспроизведению детальной структуры потока. Они были посвящены в частности техническим проблемам, таким как расчеты волновых нагрузок на погруженные тела и моделирование волновой динамики в области сложной формы. Моделирование долгопериодной эволюции волнового поля, требующее точного выполнения законов сохранения, в таких задачах не проводилось. Тем не менее, подход, разработанный в данной статье, может быть отнесен к этой группе методов.

¹ Волны, распространяющиеся в одном направлении, часто называют одномерными, однако такими их можно считать лишь в потенциальном приближении, когда явно использовано уравнение Лапласа для потенциала. Трехмерные волны в любом случае являются трехмерными, поскольку они не сводятся к поверхностным уравнениям.

Наиболее популярна в настоящее время схема высокого порядка HOS (High Order Scheme, [30, 31]). Идея этого метода основывается на работе Захарова [32], предложившего удобную форму кинематического и динамического условий на поверхности. Эта форма использовалась Захаровым не для моделирования, а для исследования проблемы устойчивости периодических волн конечной амплитуды. В этой работе неявно использовалась система координат, где глубина отсчитывалась от самой поверхности, а уравнение Лапласа оставалось в традиционном виде. Последователи Захарова приняли эту идею буквально и фактически использовали две системы координат: криволинейную для поверхностных условий и декартову — для расчета вертикальной скорости на поверхности. В декартовой системе координат известно аналитическое решение для потенциала скорости, но оно основано на коэффициентах Фурье на фиксированном уровне, тогда как переменными являются коэффициенты Фурье на свободной поверхности. Поэтому возникает проблема перехода от одной системы координат к другой. Эта проблема решается путем разложения потенциала скорости вблизи поверхности в ряд Тейлора. Точность этого метода серьезно не обсуждалась. Не вдаваясь в детали, заметим, что точность метода фактически зависит от точности представления функции $\exp(k\eta)$ отрезком ряда Тейлора. Для волн малой амплитуды и для узкополосного волнового спектра эта точность, по-видимому, удовлетворительна. Однако для случая развитого спектра, когда одновременно присутствует много волновых мод разной амплитуды, для достижения высокой точности требуется ряд Тейлора довольно высокого порядка. Проблема состоит в том, что волны с большими волновыми числами распространяются по поверхности больших волн. Поскольку амплитуда потенциала скорости затухает экспоненциально, после экстраполяции при положительном полном возвышении амплитуда резко возрастает, а при отрицательном приближается к нулю.

Для примера рассмотрим идеализированный спектр Филлипса с крутизной волны пика $a_1 k_1 = 0.1$, заданного формулой $a_k = a_1 \omega_k^{-5}$ на частотах $\omega_k = k^{1/2}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ (k и ω — безразмерные волновое число и частота, a — амплитуда). Легко оценить, что для двойной частоты пика $\omega/\omega_1 = 2$ относительная точность 10^{-4} проекции поверхностного потенциала на уровень $z = 0$ достигается при 6 членах ряда Тейлора; для $\omega/\omega_1 = 3$ — при 12 членах; а для $\omega/\omega_1 = 4$ требуется уже 15 членов. Типичный порядок разложения Тейлора в HOS моделях равен 3, что, по-видимому, достаточно для разрешения четырехволновых взаимодействий. В такой конфигурации HOS модель не может воспроизводить высокие частоты и таким образом занижает нелинейность, благодаря чему такая модель может благополучно интегрироваться на длинные сроки. Надо отметить еще два обстоятельства. Во-первых, точность экстраполяции потенциала в данной точке зависит от полного возвышения в этой точке, и, следовательно, точность неравномерна вдоль профиля волны. Это вызывает искусственную модуляцию высокочастотных мод, что не только сильно замедляет вычисления, но и может приводить к неустойчивости, поскольку амплитуда малой моды может после экстраполяции принимать очень большие значения. Такое же мнение о HOS модели высказывали авторы подхода, основанного на поверхностном интеграле [19]. Надо вместе с тем отметить, что сравнение HOS метода с методом поверхностного интеграла для идеализированного поля двухмерных волн [33] показало хорошие результаты. В целом, применимость HOS метода для реального волнового спектра с широким спектром пока не доказана. В настоящей работе предложен новый подход, специально разработанный для моделирования долгопериодной эволюции многомодового волнового поля. Область интегрирования рассматривается как небольшой участок бесконечного океана. В этом случае естественно предположение о периодичности процесса в двух горизонтальных направлениях. Известно, что нелинейная трансформация волнового спектра и усиление волн происходят сравнительно медленно — за сотни и тысячи волновых периодов. Это накладывает жесткие ограничения на

модель, создаваемую для воспроизведения долгопериодной эволюции волнового поля. Модель должна быть достаточно точна, для того чтобы естественная эволюция волн не маскировалась схемными ошибками. Это условие хорошо выполняется для одномерной модели в конформных координатах. Трехмерные волны являются гораздо более трудным объектом, поскольку, в отличие от двухмерного ($x-z$) случая, трехмерная задача ($x-y-z$), по-видимому, не сводится к двухмерной поверхностной задаче. (Метод поверхностного интеграла тоже не может быть отнесен к двухмерным методам, поскольку для решения используется функция Грина). Поэтому при решении исходных трехмерных уравнений динамики волн неизбежно возникает необходимость решения эллиптического уравнения для потенциала скорости, как это и было реализовано в моделях типа [24]. Эта же задача решается в данной работе, однако, в отличие от подобных задач, здесь основное внимание уделяется экономности и точности решения. Далее рассматривается криволинейная система координат и некоторые технические проблемы, связанные с их использованием, численная схема для уравнений, записанных в неортогональной и нестационарной системе координат, а также несколько методов проверки схемы. Представлены результаты долгопериодных расчетов многомодового волнового поля и основные результаты и перспективы применения модели.

Подчеркнем, что основной целью данной статьи является описание нового подхода для моделирования трехмерных волн. Приведенные результаты не претендуют на полноту затронутых проблем и предназначены для иллюстрации возможностей модели.

Уравнения в криволинейных координатах. Рассмотрим первичные трехмерные уравнения потенциальных волн в декартовой системе координат (x, y, z) : уравнение Лапласа

$$\Phi_{xx} + \gamma^2 \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0 \quad (1)$$

и два условия на свободной поверхности $\eta = \eta(x, y, t)$: кинематическое условие

$$\eta_t + \eta_x \Phi_x + \gamma^2 \eta_y \Phi_y - \Phi_z = 0, \quad (2)$$

и интеграл Бернулли

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \gamma^2 \Phi_y^2 + \Phi_z^2) + \eta + p = 0, \quad (3)$$

где t — время, функция $\eta(x, y, t)$ описывает однозначную двухмерную поверхность, Φ — трехмерный потенциал скорости, ϕ — его значение на поверхности η , p — внешнее давление (которое может быть создано потоком воздуха над поверхностью), отнесенное к единице плотности воды. Нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующей переменной. Поскольку рассматриваются достаточно большие волны, поверхностное натяжение в данной работе не учитывается.

Уравнения интегрируются в области

$$-\infty < x < \infty ; -\infty < y < \infty ; -\infty \leq z \leq \eta(x, y, t). \quad (4)$$

Переменные ϕ и η предполагаются периодическими вдоль x и y :

$$\begin{aligned} \Phi(x + 2\pi, y, z, t) &= \Phi(x, y, z, t), & \eta(x + 2\pi, y, t) &= \eta(x, y, t) \\ \Phi(x, y + 2\pi, z, t) &= \Phi(x, y, z, t), & \eta(x, y + 2\pi, t) &= \eta(x, y, t) \end{aligned}$$

Вертикальная скорость на бесконечности $z = -\infty$ обращается в ноль

$$\Phi_z(x, y, z = -\infty, t) = 0.$$

Уравнения (1)–(3) инвариантны к преобразованию масштаба длины, поэтому они записаны в безразмерной форме с использованием следующих масштабов: длины L (так

что $2\pi L$ — размерная длина области), времени $L^{1/2}g^{-1/2}$, потенциала скорости $L^{3/2}g^{1/2}$ (g — ускорение свободного падения). Давление p_0 отнесено к единице плотности воды, его масштаб равен Lg . Поскольку спектр ветрового волнения всегда более или менее узок в y -направлении, удобно ввести различные масштабы длины L и L_y в направлениях x и y . Поскольку безразмерные уравнения решаются в квадратной области ($0 < \xi < 2\pi$, $0 < \vartheta < 2\pi$), в уравнениях возникло отношение $\gamma = L/L_y$.

Система (1)—(3) решается для неизвестных функций $\Phi(x, y, z, t)$ и $\eta(x, y, t)$ с начальными условиями $\Phi(x, y, z, 0)$ и $\eta(x, y, 0)$. Важно то, что способ сведения трехмерной задачи к двумерной, как это было возможно в конформных координатах, неизвестен, и, по-видимому, его не существует. В связи с этим, для расчета функции $\Phi(x, y, z)$ на каждом шаге по времени приходится решать уравнение Лапласа (1) в области (4) с граничными условиями (2) и (3) на криволинейной границе $\eta(x, y)$. Известно, что интегрирование уравнений (1)—(3) в декартовой системе координат (например, методом частиц в ячейках), очень неточно и может применяться только для задач, в которых сохранение инвариантов не является принципиально важным, например, для моделирования опрокидывания волн. Эти методы неприменимы для временных периодов, превышающих период волны.

Введем *нестационарную, следующую поверхности неортогональную* систему координат:

$$\xi = x, \quad \vartheta = y, \quad \zeta = z - \eta(\xi, \vartheta, \tau), \quad \tau = t, \quad (5)$$

где $\eta(x, y, t) = \eta(\xi, \vartheta, \tau)$ описывает форму поверхности

$$\eta(\xi, \vartheta) = \sum_{-M \leq k, l \leq M} \eta_{k,l} \Theta_{k,l}.$$

Преобразование (5) проецирует первичную область на слой

$$-\infty < \xi < \infty, \quad -\infty < \vartheta < \infty, \quad -\infty \leq \zeta < 0$$

с сохранением условий периодичности вдоль «горизонтальных» координат ξ и ϑ :

$$\begin{aligned} x(\xi, \vartheta, \zeta, \tau) &= x(\xi + 2\pi, \vartheta, \zeta, \tau) + 2\pi, \\ y(\xi, \vartheta, \zeta, \tau) &= y(\xi, \vartheta + 2\pi, \zeta, \tau) + 2\pi, \\ z(\xi, \vartheta, \zeta, \tau) &= z(\xi + 2\pi, \vartheta, \zeta, \tau), \\ z(\xi, \vartheta, \zeta, \tau) &= z(\xi, \vartheta + 2\pi, \zeta, \tau). \end{aligned}$$

Координаты (5) применимы для случая бесконечной глубины, поскольку флуктуации ζ в фиксированной системе координат не затухают с глубиной. Тем не менее, поскольку потенциал скорости убывает с глубиной экспоненциально, нижнее граничное условие можно ставить на конечной глубине $H \gg \eta$. Уравнения решаются в области $\{0 < \xi \leq 2\pi, 0 < \vartheta < 2\pi, H < \zeta \leq 0\}$. Поверхность описывается рядом Фурье

$$\eta(\xi, \vartheta, \tau) = \sum_{-M < k < M} \sum_{-M_y < l < M_y} h_{k,l}(\tau) \Theta_{k,l},$$

где M и M_y — число мод в направлениях ξ и ϑ , а Θ — функция

$$\Theta_{kl} = \begin{cases} \cos(k\xi + l\vartheta) & -M \leq k \leq M, -M_y < l < 0 \\ \cos(k\xi) & -M \leq k \leq 0, l = 0 \\ \sin(k\xi) & 0 \leq k \leq M, l = 0 \\ \sin(k\xi + l\vartheta) & -M \leq k \leq M, 0 < l \leq M_y \end{cases} \quad (6)$$

Такое представление реальных частей ряда Фурье в виде прямоугольной матрицы удобно для компактного программирования. Форма (6) удобна также для дифференцирования по правилам

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{-M \leq k \leq M} \sum_{-M_y < l < 0} h_{k,l}(\tau) \Theta_{k,l} \right) &= - \sum_{-M \leq k \leq M} \sum_{-M_y < l < 0} k h_{-k,-l}(\tau) \Theta_{k,l}, \\ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sum_{-M \leq k \leq M} \sum_{-M_y < l < 0} h_{k,l}(\tau) \Theta_{k,l} \right) &= - \sum_{-M \leq k \leq M} \sum_{-M_y < l < 0} l h_{-k,-l}(\tau) \Theta_{k,l}. \end{aligned} \quad (7)$$

Модель потенциальных волн. Главное преимущество системы координат (5) состоит в том, что в ней положение поверхности фиксировано при $\zeta = 0$. Трехмерные уравнения потенциальных волн принимают вид

$$\eta_\tau = -\eta_\xi \Phi_\xi - \gamma^2 \eta_\vartheta \Phi_\vartheta + (1 + \eta_\xi^2 + \gamma^2 \eta_\vartheta^2) \Phi_\zeta, \quad (8)$$

$$\varphi_\tau = -\frac{1}{2} \left(\varphi_\xi^2 + \gamma^2 \varphi_\vartheta^2 - (1 + \eta_\xi^2 + \gamma^2 \eta_\vartheta^2) \Phi_\zeta^2 \right) - \eta - p, \quad (9)$$

$$\Phi_{\xi\xi} + \gamma^2 \Phi_{\vartheta\vartheta} + \Phi_{\zeta\zeta} = 2\eta_\xi \Phi_{\xi\zeta} + 2\gamma^2 \eta_\vartheta \Phi_{\vartheta\zeta} + (\eta_{\xi\xi} + \gamma^2 \eta_{\vartheta\vartheta}) \Phi_\zeta - (\eta_\xi^2 + \gamma^2 \eta_\vartheta^2) \Phi_{\zeta\zeta}, \quad (10)$$

где Φ — трехмерный потенциал скорости, p — внешнее давление, φ — значение потенциала скорости Φ на поверхности $\zeta = 0$.

Уравнения (8) и (9) относятся к свободной поверхности. Уравнения формально выглядят как двухмерные, но они содержат вертикальную производную от потенциала Φ_ζ , для расчета которой приходится решать трехмерное эллиптическое уравнение (10) с нижним граничным условием

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}(\zeta \rightarrow -\infty) = 0 \quad (11)$$

и верхними граничными условиями (8) и (9). Таким образом, граничных условий оказывается даже больше, чем нужно, однако, поскольку граничные условия содержат неизвестную функцию η , переопределенности не возникает. Условия (8) и (9) удобно рассматривать не как граничные условия, а как уравнения для расчета эволюции φ и η . В качестве верхнего граничного условия для уравнения (10) задается потенциал скорости φ , с предыдущего шага по времени. Этот подход, фактически основанный на расщеплении переменных, чрезвычайно упрощает задачу. Условие (11) в численной модели может быть заменено условием на конечной глубине

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}(\zeta = H) = 0,$$

где глубина H должна быть достаточно велика, для того чтобы она могла быть рассмотрена для волновых движений как бесконечно большая. Расчеты с одномерной моделью показали, что H может быть определена формулой $H = 2\pi n / k_p$, где k_p — волновое число моды с наибольшей амплитудой при $1 < n \leq 2$.

Уравнение (9) было предложено в [32] для исследования устойчивости поверхностных волн. Трансформация координат (5) в этой работе не была использована для полной системы уравнений, поскольку в этом не было необходимости.

Диагностическое уравнение (10) для потенциала скорости Φ решается на основе тридиагонального матричного алгоритма (Tridiagonal Matrix Algorithm, TDMA, в русской литературе этот метод называется «прогонка»), предложенного Томасом [42]. Алгоритм обобщен на трехмерный случай на основе Фурье представления по «горизонтальным» координатам. Уравнение решается итерациями с последовательной коррекцией правой части. Начальные значения функции Φ задаются на основе линейной теории. Точность решения контролируется максимальной невязкой $\varepsilon \sim 10^{-9} - 10^{-7}$ уравнения (10).

На первом этапе расчеты проводились для полного потенциала Φ . После этого было введено существенное усовершенствование схемы, основанное на разделении потенциала на аналитическую (квазилинейную) и нелинейную компоненты. Эта идея восходит к решенной ранее двухмерной ($x-z$) волновой задаче, записанной в конформных координатах. Основным преимуществом конформного преобразования является сохранение формы уравнения Лапласа, благодаря чему потенциал скорости может быть рассчитан аналитически. Это означает, что каждая волновая мода потенциала затухает экспоненциально от самой поверхности. Можно предположить, что эта закономерность приближенно сохраняется и в трехмерном случае, и потенциал скорости может быть точно представлен суммой аналитической компоненты $\bar{\Phi}(\xi, \eta, \zeta), (\bar{\Phi} = \bar{\Phi}(\xi, \eta, 0))$ и произвольного нелинейного возмущения $\tilde{\Phi}(\xi, \eta, \zeta), (\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, 0))$

$$\Phi = \bar{\Phi} + \tilde{\Phi}, \quad \Phi = \bar{\Phi} + \tilde{\Phi}.$$

Аналитическая компонента $\bar{\Phi}$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\bar{\Phi}_{\xi\xi} + \gamma^2 \bar{\Phi}_{\eta\eta} + \bar{\Phi}_{\zeta\zeta} = 0,$$

имеющему решение

$$\bar{\Phi}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{k,l} \bar{\Phi}_{k,l} \exp(|k|\zeta) \Theta_{k,l}, \quad (12)$$

$\bar{\Phi}_{k,l}$ — Фурье-коэффициенты поверхностного потенциала $\bar{\Phi}$ при $z = 0$, удовлетворяющее граничным условиям:

$$\begin{aligned} \zeta = 0: \quad \bar{\Phi} &= \bar{\Phi} \\ \zeta \rightarrow -\infty: \quad \tilde{\Phi}_{\zeta} &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Нелинейная компонента удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\Phi}_{\xi\xi} + \gamma^2 \tilde{\Phi}_{\eta\eta} + \tilde{\Phi}_{\zeta\zeta} = 2\eta_{\xi} \tilde{\Phi}_{\xi\zeta} + 2\eta_{\eta} \gamma^2 \tilde{\Phi}_{\eta\zeta} + (\eta_{\xi\xi} + \gamma^2 \eta_{\eta\eta}) \tilde{\Phi}_{\zeta} - (\eta_{\xi}^2 + \gamma^2 \eta_{\eta}^2) \tilde{\Phi}_{\zeta\zeta} + \bar{\Psi}, \quad (14)$$

$$\text{где } \bar{\Psi} = 2\eta_{\xi} \bar{\Phi}_{\xi\zeta} + 2\eta_{\eta} \gamma^2 \bar{\Phi}_{\eta\zeta} + (\eta_{\xi\xi} + \gamma^2 \eta_{\eta\eta}) \bar{\Phi}_{\zeta} - (\eta_{\xi}^2 + \gamma^2 \eta_{\eta}^2) \bar{\Phi}_{\zeta\zeta}. \quad (15)$$

Уравнение (14) решается при граничных условиях

$$\begin{aligned} \zeta = 0: \quad \tilde{\Phi} &= 0 \\ \zeta \rightarrow -\infty: \quad \tilde{\Phi}_{\zeta} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Производные аналитической компоненты рассчитываются по (12) и (7). Вертикальные производные $\tilde{\Phi}$ аппроксимируются разностями второго порядка. Уравнение (14) решается итерационно в Фурье-пространстве с применением последовательной кор-

рекцией правой части. Член $\bar{\Psi}$ и коэффициенты, включающие производные η в течение итераций, фиксированы. Уравнения (14) и (15) формально выглядят сложнее, чем исходное уравнение для полного потенциала, однако схема имеет ряд важных преимуществ по сравнению с исходной, поскольку: 1) значения $\tilde{\Phi}$ на два десятичных порядка меньше, чем значения $\bar{\Phi}$; 2) производные $\bar{\Phi}$ вычисляются аналитически; 3) для достижения той же самой точности число уровней при решении уравнения для $\tilde{\Phi}$ и число итераций оказывается значительно меньше. Число итераций в обеих схемах зависит от степени нелинейности задачи. Типичное число итераций в решении уравнения (10) равно 5—15, тогда как для решения уравнения (14) число итераций оказывалось примерно втрое меньше. Во всех расчетах в большинстве случаев оказывалось достаточно двух итераций. Преимущества схемы, основанной на разделении переменных, разумеется, возникает из-за того, что волны в действительности достаточно близки к линейным. Поэтому основные усилия могут быть сосредоточены на вычислении нелинейной компоненты. Само собой разумеется, что схемы, основанные на уравнениях (10) и (14), дают идентичные результаты.

Вертикальные производные первого и второго порядка для нелинейной компоненты потенциала для $\zeta < 0$ аппроксимируются выражениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_{k,l,j}}{\partial \zeta^2} &\approx A^1(j) \Phi_{k,l,j-1} + A^2(j) \Phi_{k,l,j} + A^3(j) \Phi_{k,l,j+1}, \\ \frac{\partial \Phi_{k,l,j}}{\partial \zeta} &\approx A^4(j) \Phi_{k,l,j-1} + A^5(j) \Phi_{k,l,j} + A^6(j) \Phi_{k,l,j+1} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} A^1(j) &= \frac{2d\zeta_{j+1}}{D_j}, \quad A^3(j) = \frac{2d\zeta_j}{D_j}, \quad A^2(j) = -A^1(j) - A^3(j) \\ \text{где} \quad A^4(j) &= \frac{2d\zeta_{j+1}}{D_j}, \quad A^6(j) = -\frac{2d\zeta_j}{D_j}, \quad A^5(j) = -A^4(j) - A^6(j) \end{aligned}$$

где $D_j = d\zeta_{j+1}d\zeta_j^2 + d\zeta_jd\zeta_{j+1}^2$.

Производные аппроксимируются на вертикальной «растянутой» сетке $d\zeta_{j+1} = \nu d\zeta_j$, ($j=1, 2, 3, \dots, L_w$), где ν — коэффициент растяжения, значения которого лежат в пределах $1.1 < \nu \leq 1.2$. Выбор столь необычно больших значений ν объясняется экспоненциальным убыванием с глубиной амплитуд Фурье потенциала скорости. Большие значения ν обеспечивают хорошую аппроксимацию мод $\tilde{\Phi}_{k,l}$ с высокими волновыми числами. После того как решение уравнения (14) найдено, вертикальная производная на поверхности $(\partial\Phi/\partial\zeta)_{k,l,0}$ вычисляется как сумма производных для аналитической и нелинейной компонент

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} \right)_{k,l,0} = \sum_{k,l} |k| \bar{\Phi}_{k,l} \Theta_{k,l} + A_1^7 \tilde{\Phi}_{k,l,1} - A_2^8 \tilde{\Phi}_{k,l,2}, \quad (17)$$

где A_j^1 и A_j^2 — коэффициенты, обеспечивающие точность второго порядка

$$A_1^7 = \frac{\zeta_1}{\zeta_1\zeta_2 - \zeta_2^2}, \quad A_2^8 = \frac{\zeta_2}{\zeta_1^2 - \zeta_1\zeta_2},$$

ζ_1, ζ_2 — вертикальные координаты $\tilde{\Phi}_{k,l,1}$ и $\tilde{\Phi}_{k,l,2}$. Напомним, что $\tilde{\Phi}_{k,l,0} = 0$ и $\zeta_0 = 0$.

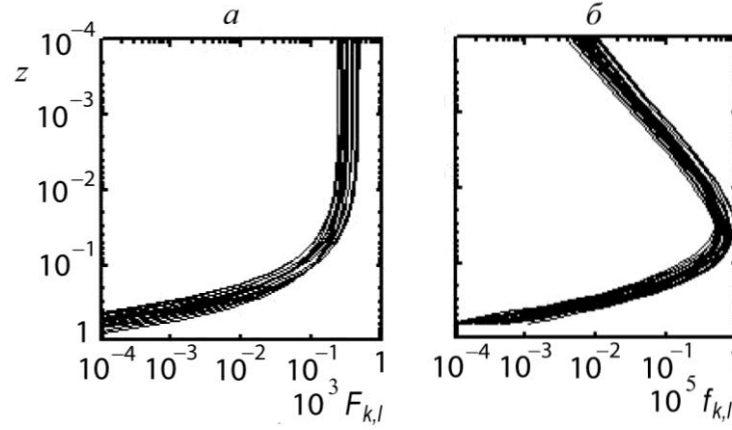


Рис. 1. Типичные профили Фурье амплитуд для аналитической и линейной компонент.
 a — вертикальные профили коэффициентов Фурье $10^3 F_{k,l}$ для линейной компоненты потенциала скорости $\bar{\Phi}_{k,l}(\zeta)$; b — вертикальные профили коэффициентов Фурье $10^5 f_{k,l}$ для нелинейной компоненты.

Типичные профили Фурье-амплитуд для аналитической и линейной компонент показаны на рис. 1.

Значения $\tilde{\Phi}_{k,l}$ меньше, по крайней мере, на два десятичных порядка, чем значения $\bar{\Phi}_{k,l}$. Точность аппроксимации (16) оценивалась сравнением с аналитическими значениями экспоненциальных функций. Для $\zeta < 0$ точность составляет 10^{-7} — 10^{-8} . Асимптотическое поведение $\tilde{\Phi}_{k,l}$ в окрестности $\zeta = 0$ очень близко к линейному, что обеспечивает относительную точность вычисления производной (17) порядка 10^{-5} — 10^{-4} . Число уровней L_w зависит от степени нелинейности решаемой задачи: для крутой волны Стокса ($ak = 0.4$) $L_w = 30$, а для многомодовой задачи с типичной интегральной крутизной s

$$s = \iint |k|^2 S(k_x, k_y) dk_x dk_y$$

порядка 0.1 L_w может быть равно 15.

Фурье-сеточный метод предполагает, что все нелинейные члены рассчитываются на расширенной «горизонтальной» сетке $N \times N_y$ ($N = 4M$, $N_y = 4M_y$) в физическом пространстве, а результат быстрым преобразованием Фурье переносится в Фурье-пространство. Представление переменных в Фурье-пространстве более экономно, чем в физическом (сеточном) пространстве, поэтому оно принято в качестве основного, а сеточные поля рассчитываются и запоминаются только тогда, когда в этом возникает необходимость.

Предложенная модель предназначена для моделирования долгопериодной эволюции волн с реалистичным спектром. Независимо от того, как велико Фурье-разрешение модели (т. е. числа M и M_y), в нелинейной задаче всегда возникает необходимость параметризации потока энергии в подсеточные (не аппроксимируемые) масштабы с волновыми числами $k > M$, $l > M_y$. Если этот процесс не принимается во внимание, накопление энергии вблизи максимальных волновых чисел неизменно приводит к нарушению законов сохранения и прекращает процесс вычислений. При численном решении уравнений гидромеханики эти эффекты подавляются введением различных типов вязкости. Введение вязкости в потенциальную модель долгое время считалось незаконным, поскольку потенциальное движение при отсутствии непотенциальных возмущений не может генерировать завихренность. Формально это утверждение правильно, однако не сле-

дует забывать, что сама потенциальность является лишь предположением. В действительности волны распространяются в среде, где всегда присутствуют вихревые движения. В этом случае волны могут взаимодействовать с непотенциальными движениями, которые, в конечном счете, генерируют турбулентность. Этот эффект был теоретически предсказан в [35, 36], исследован в лаборатории [37, 38] и численно в [39].

В численных моделях атмосферы неустойчивость часто предотвращается введением искусственных, высоко селективных операторов. Сходная по смыслу схема, разработанная для волновой модели в конформных переменных, была предложена в [12]. Следуя этому предложению, в трехмерной модели были введены дополнительные члены в правых частях уравнений (8) и (9):

$$\frac{\partial \eta_{k,l}}{\partial \tau} = E_{k,l} - \mu_{k,l} \eta_{k,l}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \phi_{k,l}}{\partial \tau} = F_{k,l} - \mu_{k,l} \phi_{k,l}, \quad (19)$$

где $E_{k,l}$ и $F_{k,l}$ — Фурье-коэффициенты для правых частей (8) и (9), и

$$\mu_{k,l} = \begin{cases} rM \left(\frac{|k| - k_d}{M - k_d} \right)^2 & \text{if } |k| > k_d, \\ 0 & |k| \leq k_d \end{cases}, \quad (20)$$

где $|k| = \sqrt{k^2 + l^2}$, k_d — радиус области, не затронутой сглаживанием. Величина k_d зависит от спектрального разрешения и положения спектра в Фурье-пространстве. В различных версиях модели величина k_d выбирается в интервале $(0.5M, 0.9M)$. Во всех версиях расчетов принимается значение $r = 0.25$. Диссипативные эффекты, введенные в (18) и (19), распространяются только на область высоких волновых чисел и не влияют на моды с волновыми числами $|k| \leq k_d$. Увеличение числа мод M сдвигает область диссипации на более высокие волновые числа. Следует подчеркнуть, что схема (18)—(20) вводится для описания реального процесса — потока энергии в коротковолновую часть спектра, где короткие волны довольно быстро диссипируют, отдавая энергию и импульс течениям и турбулентности. Этот поток довольно слаб, но при отсутствии диссипации в области Фурье конечного размера, рост энергии вблизи $k = M$ ведет к катастрофической неустойчивости. Время выживания модели можно оттянуть (но не предотвратить) введением очень высокого разрешения, однако такой подход нельзя назвать рациональным решением.

Для интегрирования по времени использовалась схема Рунге—Кутта четвертого порядка. Для любой явной схемы шаг по времени $\Delta\tau$ должен удовлетворять условию $\Delta\tau \leq C\omega_{\max}^{-1}$, где $\omega_{\max} = k_{\max}^{1/2}$ — максимальная частота, а C — константа, которая для схемы Рунге—Кутта равна $2\sqrt{2}$. Тем не менее, такая оценка справедлива только для случаев слабой нелинейности. Для сильной нелинейности предельный шаг по времени зависит от нормы правых частей уравнений (8) и (9) и может быть выбран только эмпирически. Например, для разрешения $M = 256$ шаг по времени $\Delta\tau$ принимается 0.005.

Проверка трехмерной модели волн. Нет никаких сомнений в том, что уравнения (8) и (9) при достаточном разрешении могут эффективно интегрироваться по времени Фурье-сеточным (Fourier-transform) методом по схеме Рунге—Кутта с высокой точностью. Поэтому критическим моментом всей схемы является решение трехмерного уравнения для потенциала (14). Разработаны несколько схем проверки такого решения. Наиболее очевидным методом является сравнение решения для производной потенциала

скорости на поверхности $\partial\Phi/\partial\zeta(\zeta=0)$ для одномерного варианта трехмерной модели с точным решением такой же задачи в конформных координатах. Такое сравнение было проведено для очень крутой волны Стокса $ak=0.40$. Перенос решения из конформных координат в декартову горизонтальную сетку трехмерной модели проводился периодической сплайн-интерполяцией 4-го порядка. Было получено, что решения совпадают с точностью порядка $10^{-5}ak$. Заметим, что предположение об однонаправленности волн не влияет на общность вывода, поскольку проверка касалась вертикальных операторов.

Второй метод проверки основывался на аналитическом решении уравнения для потенциала скорости на поверхности $\zeta=0$.

$$\Phi(\xi, \vartheta, 0) = \sum_{-M_x < k < M_x} \sum_{-M_y < l < M_y} \sum_{1 < i < N_x} \sum_{1 < j < N_y} \varphi_{k,l}^0 \exp(|k|\eta(\xi_i, \vartheta_j)) \Theta_{k,l}, \quad (21)$$

где $\varphi_{k,l}^0$ — коэффициенты Фурье потенциала скорости на фиксированном уровне $z=0$.

Уравнение (21) содержит четырехкратное суммирование, поэтому не может быть использовано для интегрирования модели, но поскольку оно связывает значения потенциала в декартовой и криволинейной системе координат, (21) может обеспечить эффективную проверку решения уравнений (10) или (14). Дифференцирование (21) по вертикали дает формулу для вычисления $\partial\Phi/\partial\zeta$:

$$\frac{\partial\Phi(\xi, \vartheta, \zeta)}{\partial\zeta}(\zeta=0) = \sum_{-M_x < k < M_x} \sum_{-M_y < l < M_y} \sum_{1 < i < N_x} \sum_{1 < j < N_y} |k| \varphi_{k,l}^0 \exp(|k|\eta(\xi_i, \vartheta_j)) \Theta_{k,l}. \quad (22)$$

Проверка решения уравнений (10) или (14) может быть выполнена следующим образом. Сначала задается потенциал скорости на уровне $z=0$ в виде набора коэффициентов $\varphi_{k,l}^0$. Далее этот потенциал переносится на поверхность $z=\eta$ с помощью соотношения (21). Эти значения поверхностного потенциала используются как граничное условие для уравнения (14). Полученная в результате решения вертикальная скорость (17) сравнивается с результатом, рассчитанным по соотношению (22). Такие расчеты показали, что аналитическое решение (22) совпадает с результатом численного решения уравнения (13) с точностью 10^{-5} — $10^{-4}ak$.

Зависимость точности решения от числа уровней L_w определялась для двухмерного поля волнения, задаваемого спектром для безразмерного обратного возраста волн $\Omega_p = U_{10}/c_p = 2$ и угловым распределением, пропорциональным $(\text{sech}(\theta))^4$ (θ — направление моды). Базовые (точные) расчеты проводились для разрешения $M=128$, $M_y=32$ и для числа уровней $L_w=100$ при точности решения уравнения (14) $\varepsilon=10^{-10}$. Затем решение для меньшего числа уровней сравнивалось с точными результатами. Среднеквадратичное расхождение результатов

$$E_{rms} = \left(\overline{(w_{100} - w_L)^2} \right)^{1/2} \quad (23)$$

(w_{100} и w_L — сеточные значения вертикальной скорости, рассчитанные при $L_w=100$ и для различных L_w) дано на рис. 2.

Как видно, среднеквадратичная ошибка вычислений E_{rms} монотонно убывает с приближением L_w к $L_w=100$. Испытания показали, что устойчивый счет можно проводить даже при столь низком разрешении, как $L_w=15-20$.

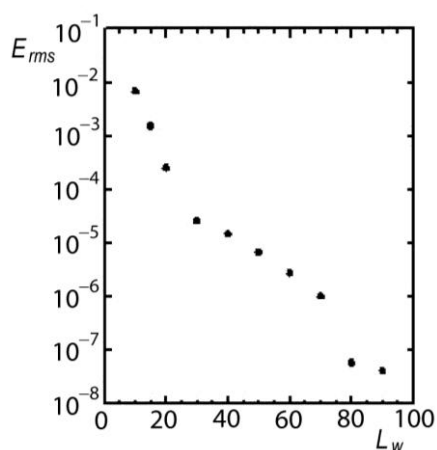


Рис. 2. Зависимость среднеквадратичной ошибки E_{rms} (23) решения уравнения (10) от числа уровней.

волновое число $k=1$, так что дополнительные моды приходились на волновые числа $k=2, 3, 4, \dots, M$. Такая конфигурация является наиболее удобной для проверки модели, поскольку при ней не может возникнуть неустойчивость Бенджамина—Фейера [42]. Расчеты, проведенные с конформной моделью, показали ее исключительную точность: первые 800 мод сохраняли свои значения в течение сотен периодов. Заметим, что волна Стокса может быть задана на волновых числах $k=nk_0$ (n — целое число), однако непредсказуемые возмущения могут возникнуть даже в конформной модели. Эти возмущения неизбежно инициируют развитие неустойчивости Бенджамина—Фейера, что делает проверку неэффективной.

Моделирование очень крутой волны Стокса ($ak=0.40$), заданной в начальных условиях, проводилось сначала с параметрами $M=128$, $M_y=16$, $L_w=30$ и $\varepsilon=10^{-8}$. Для моделирования одномерного процесса число продольных мод M_y может быть принято равным 1. Значение $M_y=16$ было задано для технической проверки кодов, чтобы убе-

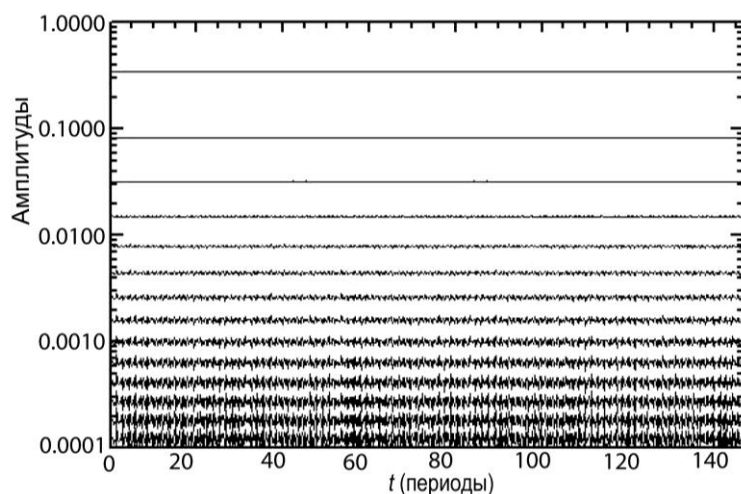


Рис. 3. Эволюция амплитуд крутой ($ak=0.40$) волны Стокса A_s , заданной в начальных условиях на волновых числах $k=1, 2, 3, \dots, M$.

Методы проверки, указанные выше, были разработаны и использованы для численной схемы эллиптического уравнения (10), используемой на каждом шаге по времени. Наиболее эффективным методом проверки численной модели и кодов для уравнений (8), (10), (14) является сравнение нестационарного решения с точным стационарным решением (например, для волны Стокса [40] или волны Краппера [41]), полученным в движущейся системе координат. Такая проверка была успешно использована в одномерной задаче в конформных координатах [12, 14] и для метода поверхностного интеграла [22, 23]. Для получения точного стационарного решения для волн Стокса в [12—14, 16] был разработан итерационный алгоритм, основанный на конформных координатах и преобразовании Гильберта в Фурье-пространстве. Этот метод использован в данной работе. Расчеты проводились для волны Стокса с главной модой, помещенной на

дальнейших длительных расчетов использовалось значение $M_y=1$. Шаг по времени Δt был принят равным 0.01, заданное число шагов равнялось 100 000, общий период интегрирования был равен 1000 безразмерных единиц, что соответствовало примерно 172 периодам волны Стокса. Эволюция первых 14 мод волны Стокса показана на рис. 3.

Как видно, младшие моды с волновыми числами 1—6 сохраняется с достаточно высокой точностью. Для более

высоких волновых чисел заметны флуктуации, возрастающие с увеличением волнового числа. Для моды с волновым числом $k = 13$, амплитуда которой на 4 порядка меньше амплитуды главной моды, дисперсия флуктуаций составляет около 10 % от амплитуды. Таким образом, в трехмерной модели, где уравнение для потенциала решается Фурье-сеточным методом, ошибки аппроксимации значительно выше, чем в конформной модели (в которой конечные разности вообще не используются), поэтому совпадение численного решения с точным решением не столь высоко, как в двухмерном случае. И все же результаты такой проверки можно считать вполне удовлетворительными, поскольку вычислительная неустойчивость не развивается, и волна с высокой точностью сохраняет свою форму. Это хорошо иллюстрируется на рис. 4, где на примере дисперсии разности возвышения

$$E_{rms}^1(\tau) = \left(\int_0^{2\pi} (\eta_0 - \eta(\tau)) \right)^{1/2} \quad (24)$$

(η_0 и $\eta(\tau)$ — начальный и текущие профили волны) показывается, что при совпадении фаз профили волны совпадают с точностью порядка 10^{-4} .

Нижняя кривая на рис. 4 показывает *rms* разность для начального и последующего волновых профилей, рассчитанная между двумя последовательными пиками волны.

$$E_{rms}^1(\tau) = \left(\int_0^{2\pi} (\eta_0 - \bar{\eta})^2 d\xi \right)^{1/2}, \quad (25)$$

где $\bar{\eta}$ — профиль волны, сдвинутый в нулевую фазу. Как видно, эта величина не обнаруживает тенденции к росту. Точность сохранения формы в действительности может быть гораздо выше, так как ошибки (24) и (25) зависят от интервала дискретности по времени, и точное совпадение происходит в промежутках между записями. Заметим, что нам неизвестны другие успешные примеры моделирования волны Стокса с крутизной $ak = 0.40$. Все существующие модели демонстрируют быстрый распад волны и возникновение тенденции к опрокидыванию и остановке счета. Для технической проверки модели аналогичные эксперименты были проведены для волны Стокса, распространяющейся в y -направлении. Естественно, что для k -ой моды волны Стокса точность аппроксимации уменьшается в k раз. Дополнительные расчеты, проведенные на более короткие периоды, показали, что при увеличении разрешения точность воспроизведения волны Стокса повышается, но, естественно, расчеты становятся более громоздкими. Как показывают численные эксперименты с конформной моделью, погрешность, вносимая схемой Рунге-Кутты интегрирования по времени, практически не существенна. Эволюция экстремальных в области значений крутизны показана на рис. 5.

Следующий численный эксперимент был проведен для волны Стокса с крутизной $ak = 0.35$. Моды волны были помещены на волновые числа $k = 8, 16, 24 \dots M$. В начальные условия был введен шум в виде гармонических волн, случайно распределенных по фазе и углу.

Расчеты проводились в прямоугольной области при $M = 128$ и $M_y = 32$. Поскольку моды были разнесены интервалом $\Delta k = 8$, моды шума начали избирательно расти аналогично росту, предсказываемому теорией Бенджамина—Фейера [43], воспроизведенной численно в [43]. Умеренная крутизна $ak = 0.35$ была выбрана потому, что при большей крутизне волна Стокса распадается слишком быстро.

Абсолютные значения отрицательной крутизны превосходят значения положительной крутизны, что указывает на существование горизонтальной асимметрии волн, имеющих тенденцию наклоняться по ходу движения. В результате, некоторые волны оказываются слишком крутыми и могут опрокидываться. В отличие от конформной мо-

дели (которая допускает даже неоднозначность поверхности [13]), вычислительная неустойчивость в трехмерной модели наступает, когда локальная крутизна (т. е. тангенс наклона поверхности) превышает 1.5. Предельное значение крутизны зависит от разрешения модели и шага по времени. Возможности стабилизации решения при возникновении большой крутизны обсуждаются ниже.

Начальная поверхность и поверхность накануне разрушения показаны на рис. 6. Как видно, развитие неустойчивости приводит к появлению так называемой «подковообразной» («horse-shoe») структуры, хорошо известной из эксперимента [35] и численного моделирования [20]. Эволюция амплитуд волны Стокса показана на рис. 7. Сплошные линии соответствуют амплитудам первых семи мод, а слившиеся серые кривые показывают растущие и быстро флуктуирующие амплитуды промежуточных мод, зародившихся из наложенного шума. Амплитуда главной моды практически не изменяется, а амплитуды мод более высокого порядка уменьшаются. При этом энергия промежуточных мод растет за счет всех мод волны Стокса. Полная энергия (равная сумме энергий волны Стокса и шума) сохраняется с точностью до 6 десятичных знаков.

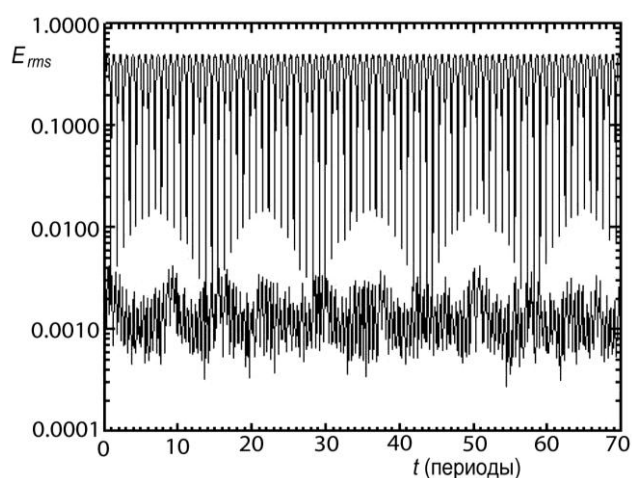


Рис. 4. Иллюстрация точности решения уравнения (10).

Верхняя кривая — эволюция rms разности E_{rms}^1 между начальной поверхностью η_0 и поверхностью, воспроизведенной в ходе интегрирования. Нижняя кривая — аналогичная rms разность, вычисленная в интервале между двумя пиками волны.

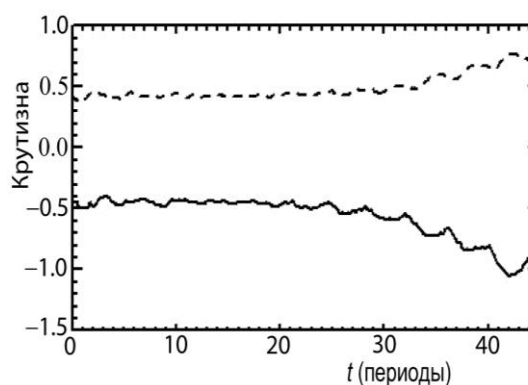


Рис. 5. Эволюция максимального положительного наклона поверхности (пунктирная линия) и минимального отрицательного наклона (сплошная линия) для волны Стокса ($ak = 0.35$), заданной в начальных условиях на волновых числах $k = 8n$ ($n = 1, 2, 3 \dots$) и наложенным начальным возмущением.

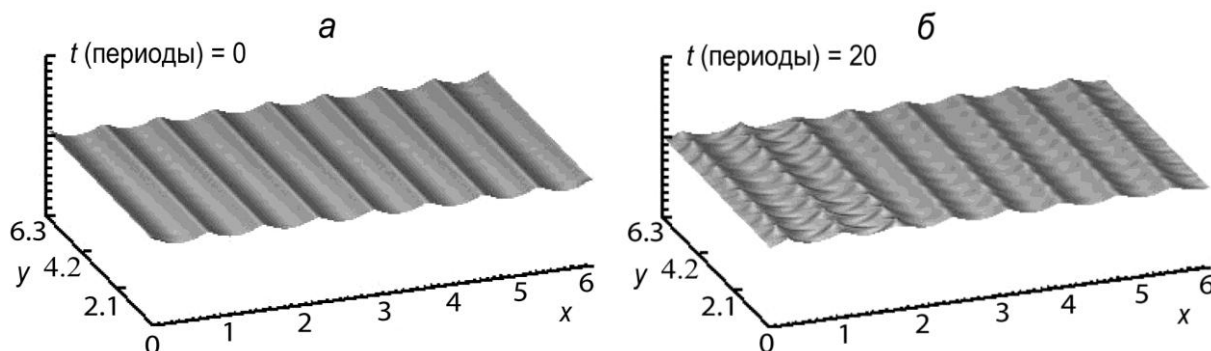


Рис. 6. Цуг волн Стокса при начальных условиях ($t = 0$, периоды волны Стокса) и форма поверхности перед развитием вычислительной неустойчивости ($t = 20$).

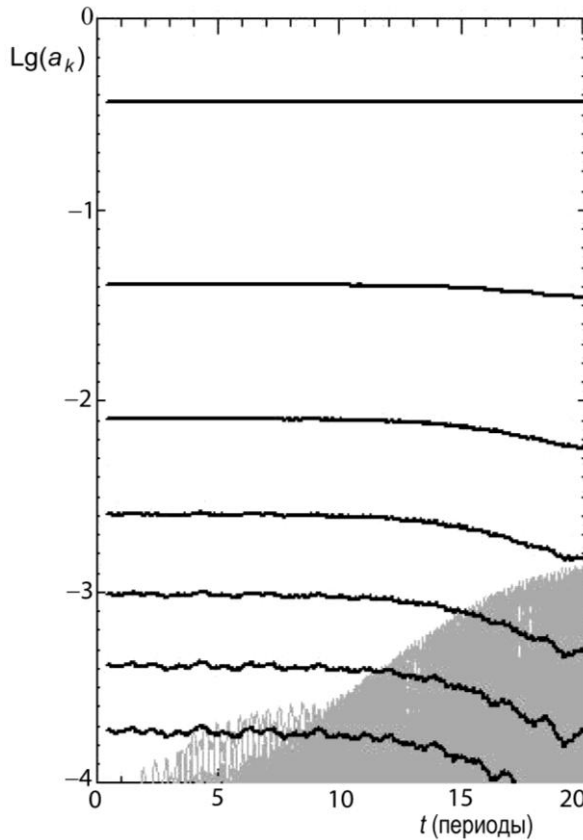


Рис. 7. Эволюция амплитуд для случая, когда волна Стокса ($ak = 0.35$) задана в начальных условиях на волновых числах $k = 8n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) с наложенным начальным возмущением. Серый фон соответствует слившимся кривым, описывающим эволюцию растущих возмущений.

Двухмерный волновой спектр, соответствующий квазирегулярной структуре, показанной на рис. 6, б приведен на рис. 8, а. Поскольку все переменные безразмерны, спектр изображен в условных единицах: самый темный тон соответствует максимальной спектральной плотности S_m , белый тон относится к значениям меньше, чем $10^{-12} S_m$. Спектр показывает, что развитие новых мод происходит по более сложному сценарию, чем в неустойчивости Бенджамина—Фейера: возмущения возникают не на оси $l = 0$, а под углом к распространению главной моды, а именно, на волновых числах $l = \pm 9, 18, 27$.

Главная мода волны Стокса с волновым числом $k = 8$ генерирует возмущения на волновом числе $l = 9$. Отношение $l/k = 1.123$ с точностью до спектрального разрешения близко к значению $l/k = 1.15$, полученному в линейной теории неустойчивости двухмерных волн Стокса [44]. Как видно, полные уравнения предсказывают также цепочку новых мод на волновых числах $l = 9n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), соответствующих модам высокого порядка волны Стокса. Рост амплитуд новых мод может быть представлен выражением

$$A_{k,l}(\tau) = A_{k,l}(0) \exp(\beta_{k,l} \omega \tau). \quad (26)$$

Значения $\beta_{k,l}$ рассчитаны методом наименьших квадратов. Как видно, расположение и скорость роста возмущений симметричны относительно оси $l = 0$. Рис. 8 свидетельствует, что разрешение, использованное для расчетов, недостаточно, поскольку возмущения, по-видимому, возникают в более широкой области в Фурье-пространстве. Тем не менее, приведенные результаты все же отчетливо показывают структуру возникающих возмущений. В настоящее время эти расчеты проводятся с лучшим разрешением и для широкого диапазона параметров, но эта работа требует значительного времени. Заметим, что сопоставление результатов по полной нелинейной модели с выводами линейной теории МакЛина [44] связано с неопределенностями (см. аналогичное сопоставление с теорией Бенджамина—Фейера [42], проведенное в [43]).

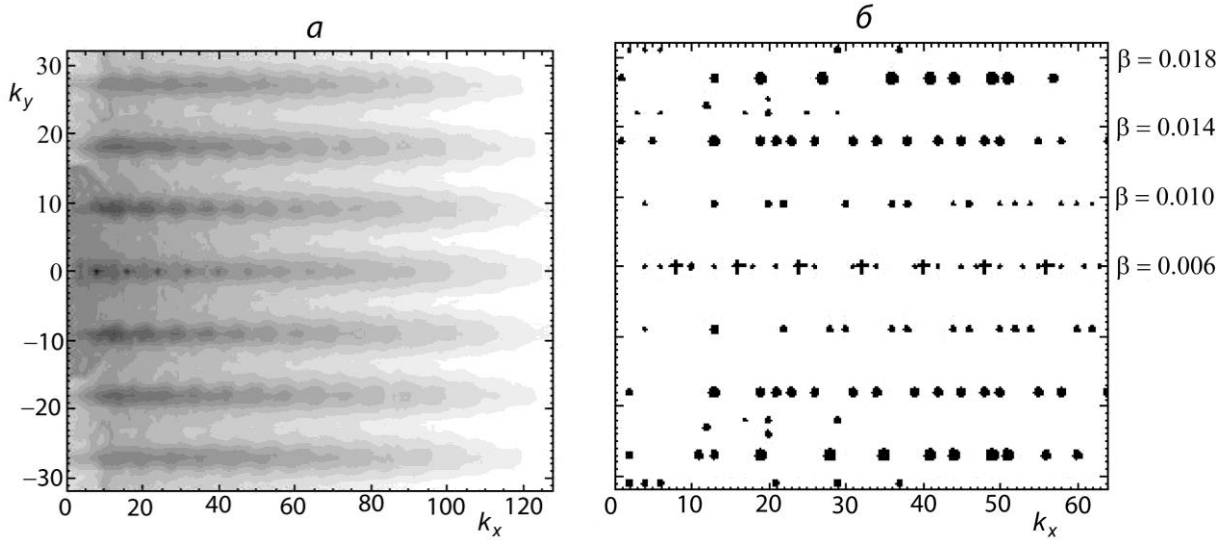


Рис. 8. Спектральные характеристики волнового поля.

a — двумерный волновой спектр, соответствующий поверхности на рис. 6, b (единицы условные) перед возникновением вычислительной неустойчивости; b — скорость развития β промежуточных мод. Значения β указаны за рамкой графика. Крестики указывают позиции мод волны Стокса; кружки с радиусом, зависящим от величины β — локальные максимумы роста.

Моделирование многомодового волнового поля с реалистичным спектром.

Третья серия расчетов была проведена для многомодового волнового поля, заданного первоначально как суперпозиция линейных мод со случайными фазами, амплитудами, вычисленными по спектру Пирсона—Московитца (ПМ) [45—47] и угловым распределением, пропорциональным $(\text{sech}(\theta))^4$ (θ — угол между направлением моды и осью x). Расчеты проводились в прямоугольной области с разным числом мод в x и y направлениях: $M_x = 256$, $M_y = 64$. Конечно-разностная сетка включает 564 288 узлов (130 302 степеней свободы). В начальных условиях пик спектра располагался на волновом числе $(k, l) = (64, 0)$. Расчеты с шагом $\Delta\tau = 0.0025$ проводились до безразмерного времени $\tau = 250$ (10 000 шагов по времени), что соответствовало примерно 318 периодам волны пика. За такой сравнительно длинный период энергия волн должна понижаться из-за нелинейного потока энергии за пределы вычислительной области в Фурье-пространстве. На самом деле предполагается, что спектр ПМ описывает квазистационарный режим, при котором приток энергии от ветра должен быть равен диссипации волновой энергии. Такой баланс может быть достигнут введением притока энергии от ветра [48] и диссипации [13]. Тем не менее, введение в новую модель сложной физики может усложнить анализ. Поэтому стационарный уровень энергии поддерживался с помощью введения в уравнения (18) и (19) дополнительных членов

$$\frac{\partial \eta_{k,l}}{\partial \tau} = H_{k,l} + (1 - \gamma)\eta_{k,l}, \quad \frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial \tau} = F_{k,l} + (1 - \gamma)\varphi_{k,l}, \quad (27)$$

где $\eta_{k,l}$ и $\varphi_{k,l}$ — Фурье-коэффициенты для η и φ ; $H_{k,l}$ и $F_{k,l}$ — Фурье-коэффициенты правых частей уравнений (8) и (9), включающих дополнительные члены, введенные в (18) и (19); γ — коэффициент:

$$\gamma = (E / E_0)^{1/2}, \quad (28)$$

где E_0 — начальное значение полной энергии, равное сумме кинетической и потенциальной энергий, E — полная энергия на предыдущем шаге по времени. Поскольку коэф-

коэффициент $(1-\gamma)$ очень мал (порядка 10^{-7}), алгоритм (26)—(28) поддерживает уровень полной энергии с точностью порядка 10^{-6} и практически не меняет структуры решения ни в Фурье, ни в сеточном пространствах. Заметим, что алгоритмы (18), (19), (26)—(28) отражают реальные процессы, существующие в природе и учитываемые в прогностических моделях волн.

Безразмерные переменные очень удобны для вычислений, но не обладают наглядностью. Поэтому приведем размерные величины. Типичная длина волны в пике ПМ-спектра для скорости ветра порядка 15 м/с составляет 250 м, волновое число — 0.025 1/м, частота — 0.5 с, фазовая скорость — 20 м/с. Высота существенной волны составила 6.5 м^2 . Размеры области интегрирования равны $8 \times 2 \text{ км}^2 = 1.6 \times 10^7 \text{ м}^2$. Интегрирование проводилось на период 95 мин. Поскольку область включает много волн, на рис. 9 приведена 1/64 часть волновой поверхности. Как видно, поверхность выглядит вполне реалистично: гребни оказываются заостренными, а подошвы — пологими. Суперпозиция гармонических волн выглядит менее похожей на поле ветровых волн. Распределение вероятности возвышения (нормализованных высотой существенной волны) дана на рис. 10. Для расчета использовано 655 360 000 значений η_{ij} . Пунктирная линия соответствует отраженной кривой для отрицательных значений. Как видно, положительные отклонения значительно больше, чем отрицательные. Это указывает на то, что высота гребней в среднем больше, чем глубина подошв. Тонкая линия соответствует распределению Гаусса. Для отрицательных значений величина вероятности η значительно меньше гауссовой, а для положительных — больше. Это объясняется тенденцией волн приближаться к профилю волн Стокса. Это же свойство объясняет механизм опрокидывания волн и появление экстремальных волн. При некоторых, не вполне ясных условиях, энергия волны начинает концентрироваться вблизи вертикали, проходящей через гребень волны; волна либо теряет устойчивость, либо сильно заостряется, приобретая большую высоту. Этот процесс никак не объясняется квазилинейной теорией модуляционной неустойчивости [49], когда отдельная гармоническая мода растет, получая энергию от других мод. Специфика процесса заключается как раз в том, что волна очень сильно отличается от гармонической — она практически не увеличивает полную энергию, а начинает «жить своей собственной быстротекущей жизнью». Эта эволюция заслуживает детального изучения, хотя более подходящей моделью, скорее, является очень точная одномерная модель в конформных координатах.

Эволюция кинетической (сплошная кривая) и потенциальной энергий (пунктирная кривая) в процентах по отношению к половине полной энергии показана на рис. 11. Для простоты показаны только первые и последние 10 периодов волны пика. Обе величины испытывают флуктуации в пределах 1 %. Сумма потенциальной и кинетической энергий сохраняется в пределах 10^{-6} .

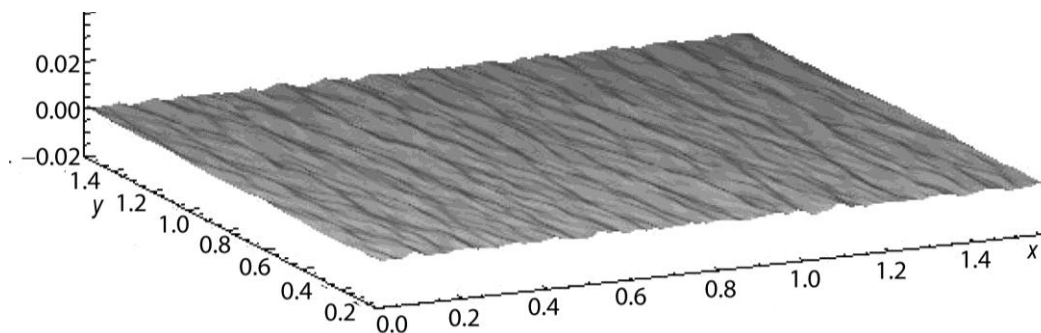


Рис. 9. Пример поверхности на 318 период волны пика для случая, когда начальное поле задано по теории волн малой амплитуды. Амплитуды вычислены по спектру Пирсона—Московитца. Дана 1/64 часть всей поверхности.

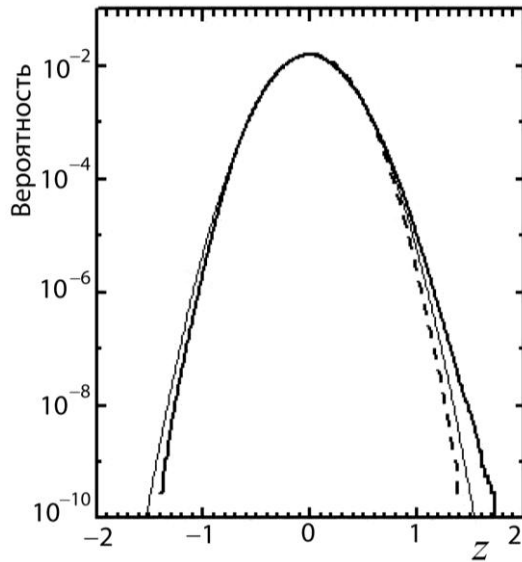


Рис. 10. Вероятность возвышения поверхности.
Жирная кривая вычислена по данным модели, пунктирная кривая соответствует распределению Гаусса. Тонкая кривая — отраженная ветвь вероятности при отрицательных значениях.

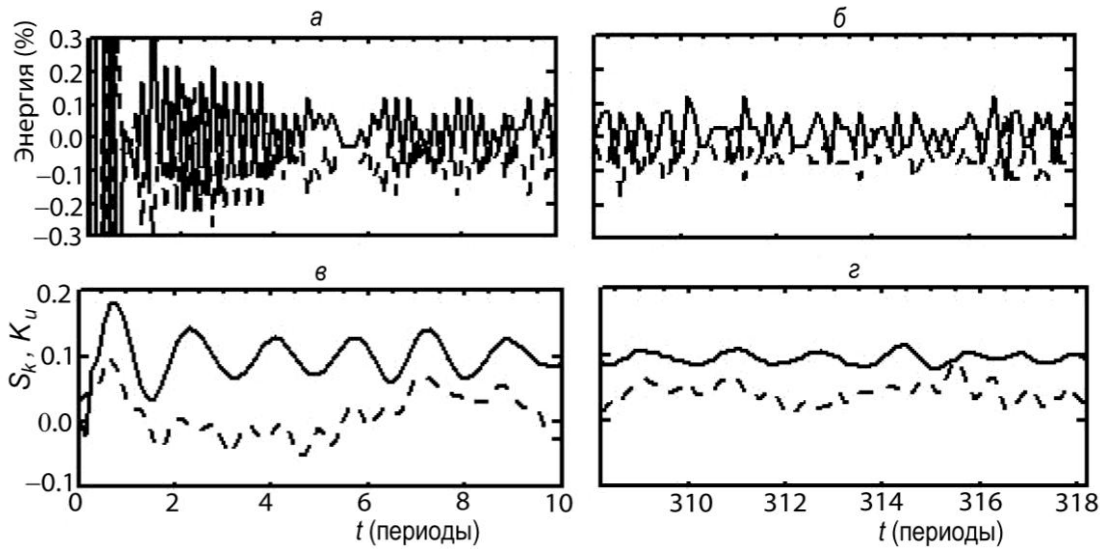


Рис. 11. Эволюция кинетической и потенциальной энергий в процентах по отношению к половине полной энергии.

а, б — эволюция кинетической (сплошная кривая) и потенциальной (пунктирная кривая) энергий в процентах по отношению к половине полной энергии; *в, г* — эволюция асимметрии (сплошная кривая) и эксцесса (пунктирная кривая). *а* и *в* соответствуют первым десяти периодам волны пика, *б* и *г* — последним десяти периодам.

На рис. 11, *в, г* показана эволюция асимметрии и эксцесса. Для совокупности линейных волн асимметрия равна нулю, а эксцесс равен 3. В течение начального периода происходит быстрая трансформация поверхности, приобретающая черты, характерные для нелинейных волн.

В теории волн общепринято полагать (например, в работе Хассельманна [50]), что для поверхностных волн выполняется линейное дисперсионное соотношение $k = \omega^2$ (k и ω — безразмерные волновое число и частота). Экспериментальные данные, приблизительно подтверждающие эту формулу, относятся только к относительно низким волновым числам. Точная волновая модель позволяет исследовать эту проблему более детально.

Для коротких промежутков времени, когда скорость изменения амплитуды $|h_{k,l}|$

мала $\frac{\partial |h_{k,l}|}{\partial \tau} \ll \omega_{k,l} |h_{k,l}|$, эволюция поверхности описывается выражением

$\eta(\xi, \vartheta, \tau) = \sum_{k,l} h_{k,l} \theta_{k,l}(k\xi + l\vartheta - \omega\tau)$, откуда следует $\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \sum_{k,l} \omega_{k,l} h_{k,l} \theta_{k,l}(k\xi + l\vartheta - \omega_{k,l}\tau)$ и

$\frac{\partial h_{k,l}}{\partial \tau} = \omega_{k,l} h_{-k,-l}$, что дает формулы для вычисления мгновенного значения частоты $\omega_{k,l}$

$\omega_{k,l} = \frac{h_{k,l}^\tau}{h_{-k,-l}}$, где введено обозначение $h_{k,l}^\tau = \frac{\partial h_{k,l}}{\partial \tau}$. Вычисления по этой формуле дают

большой разброс, поэтому целесообразно использовать метод наименьших квадратов для вычисления некоторого среднего значения частоты $\bar{\omega}_{k,l}$

$$\bar{\omega}_{k,l} = \frac{\overline{h_{k,l}^\tau h_{k,l}}}{h_{k,l}^2}. \quad (29)$$

Точность этого метода была проверена на линейной версии модели, которая интегрировалась на несколько десятков периодов. Было получено, что формула (28) в этом случае с высокой точностью дает линейное дисперсионное соотношение $k = \omega^2$. Заметим, что данный метод не позволяет различать волны, бегущие в противоположных направлениях. В данном случае это не так важно, поскольку энергия волн, распространяющихся в обратном направлении, ничтожно мала. Естественно, что точность выполнения дисперсионного соотношения зависит от энергии данной моды: чем меньше ее энергия, тем больше она подвержена влиянию нелинейности со стороны более крупных волн. На рис. 12 показана зависимость относительного отклонения $\delta\omega = (\omega_m - \omega_l)/\omega_l$, рассчитанной частоты ω_m от линейной частоты ω_l как функция спектральной плотности S .

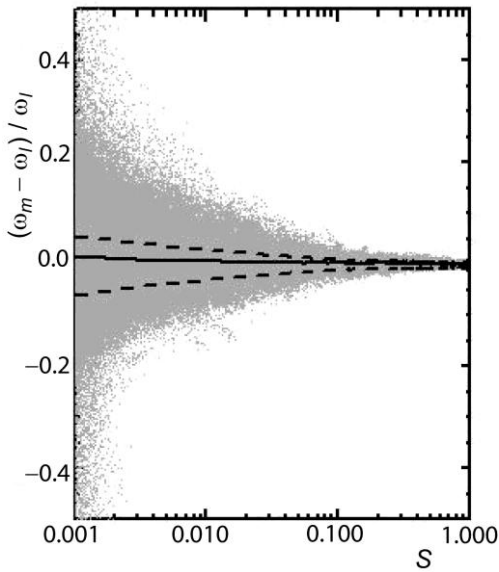


Рис. 12. Зависимость относительного отклонения $\delta\omega$ рассчитанной частоты ω_m от линейной частоты ω_l как функция спектральной плотности S .

Точки — значения, полученные осреднением по 30 последовательным записям с интервалом $\Delta\tau = 0.1$ для каждого волнового числа $|k|$, $\omega_{\text{mod}} = \omega$. Сплошная кривая — осредненная по $\delta\omega$ величина, пунктирные характеризуют дисперсию $\delta\omega$.

Эффект флуктуации частоты был обнаружен экспериментально, воспроизведен в одномерных численных моделях и объяснен в нескольких работах [12, 14, 52—54]. В действительности, поверхностные волны в той или иной степени нелинейны, т. е. каждая волна построена из главной моды и так называемых «связанных волн» (окаймляющих, «bound waves»). Последние на самом деле волнами не являются, а представляют собой более короткие моды, двигающиеся со скоростью основной моды. Кроме того, в волновом поле, разумеется, присутствуют свободные моды, фазовая скорость которых c близка к скорости линейных волн, определяемых дисперсионным соотношением $c = \omega/k$. Таким образом, на каждом волновом числе в волновом поле присутствуют быстрые «окаймляющие» моды и медленные свободные моды [53]. Их взвешенная средняя частота превосходит линейную частоту, причем тем сильнее, чем меньше энергия свободных волн в данном спектральном интервале. В двумерных волнах этот эффект проявляется, пожалуй, более отчетливо, чем в трехмерных.

Наиболее любопытное свойство поверхностных волн показано на рис. 13. Как видно на верхней секции, спектр, заданный в начальных условиях, гладкий. Уже после нескольких периодов волны пика спектр начинает трансформироваться, т. е. появляются пики и впадины. К концу вычислений спектр становится дискретным,

т. е. состоящим из индивидуальных пиков. Заметим, что сходный результат был получен на основе упрощенных уравнений, полученных разложением гамильтониана до четвертого порядка [54]. Разрешение в [54] было в несколько раз выше, чем в настоящей работе, тем не менее, после длительного интегрирования был получен дискретный спектр, качественно близкий к спектру, показанному на рис. 13. Высказываются попытки объяснить это явление на основе резонансного механизма. Подразумевается, что используемое разрешение недостаточно высоко для того, чтобы все возможные резонансные комбинации были разрешены. Это объяснение, однако, базируется на том, что дисперсионное соотношение точно. Как было показано выше, дисперсионное соотношение приблизительно справедливо лишь для крупных волн. Фазовая скорость каждой моды флуктуирует под действием нелинейности, эффекта Доплера, присутствия окаймляющих волн и многих других факторов. Отклонения от линейной фазовой скорости возрастают с уменьшением амплитуды моды. Таким образом, возможные резонансы размазаны по некоторому конечному участку, и спектр должен бы быть как раз гораздо более однородным. Можно предполагать, что увеличение разрешения никак не уменьшит свойства дискретности спектра поверхностных волн. Все квазилинейные теории основаны на предположении, что волновое поле представляет собой суперпозицию линейных волн. Таким образом, с увеличением разрешения амплитуды волн становятся все меньше, а число их больше. При этом каждая мода движется со своей фазовой скоростью. Нетрудно понять, что статистические свойства поверхности и поле орбитальных скоростей (которые, собственно, и осуществляют нелинейные эффекты) с увеличением разрешения меняются. Трудно представить, что описание интегральных эффектов нелинейных взаимодействий при увеличении разрешения уточняется. Скорее наоборот — такого рода конструкции вообще не имеют разумного предела при увеличении разрешения. Дискретизация спектра, все возрастающая при увеличении разрешения, спасает такой подход от бессмыслицы, однако заставляет предположить, что волновое поле является скорее суперпозицией конечного числа нелинейных мод, чем бесконечной, сколь угодно плотной совокупности линейных мод с линейным дисперсионным соотношением. Таким образом, поверхностные волны, по-видимому, имеют в каком-то смысле корпускулярную природу.

Сейчас трудно говорить о том, как себя ведут дискретные моды в спектре. Тем не менее, в настоящих расчетах получено, что одна и та же мода может «перескакивать» с одного волнового числа на другое, если эти волновые числа очень близки. Соседние волновые числа могут вести себя как сообщающиеся сосуды: энергия на них колеблется, оставаясь в сумме постоянной.

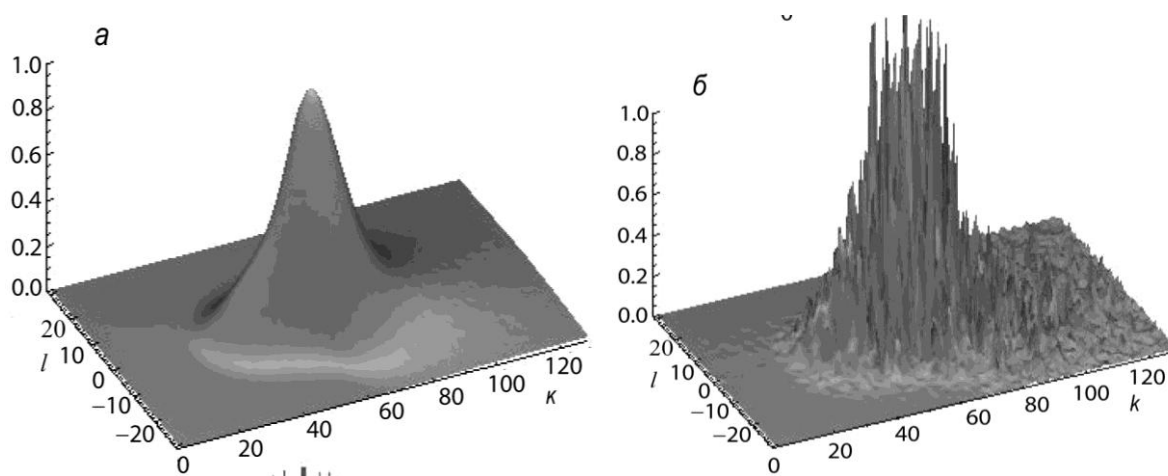


Рис. 13. Трансформация волнового спектра.
 а — начальный спектр Пирсона—Московитца $\lg(S)$;
 б — волновой спектр после интегрирования на 318 периодов.

Заметим, что свойства дискретности мало проявляются в измеряемых частотных спектрах волн по двум причинам: частота сама по себе флуктуирует; происходит осреднение по модам, распространяющимся в разных направлениях.

Несмотря на весь этот хаос, нелинейные взаимодействия имеют остаточную составляющую: спектр, в среднем, непрерывно эволюционирует и сдвигается в сторону низких частот (downshifting effect). Данные о спектре могут быть использованы для вычисления спектра скорости нелинейных взаимодействий N :

$$\frac{\Delta S_{k,l}}{\Delta t} = N_{k,l}. \quad (30)$$

На рис. 14, *а* показаны спектры, осредненные по поперечным волновым числам k_y ; жирной кривой обозначен начальный спектр и тонкой кривой — спектр после 308 периодов интегрирования. На рис. 14, *б* тонкой линией обозначен спектр нелинейных взаимодействий $\bar{N}(k_x)$ и жирной линией — тот же, несколько сглаженный, спектр. Как видно, форма N качественно близка к общепринятым результатам: на низкочастотном склоне спектра сосредоточен приток энергии, а на высокочастотном — отток, что обеспечивает смещение спектра в область более низких частот. Количественное сравнение этого результата с расчетами интеграла Хассельманна невозможно, поскольку ни одна из существующих версий таких программ не работает с разрешением, какое использовано в данной работе. Сравнение результатов с разным разрешением представляется бессмысленным, поскольку спектр нелинейных взаимодействий существенно зависит от деталей волнового спектра и от спектрального разрешения.

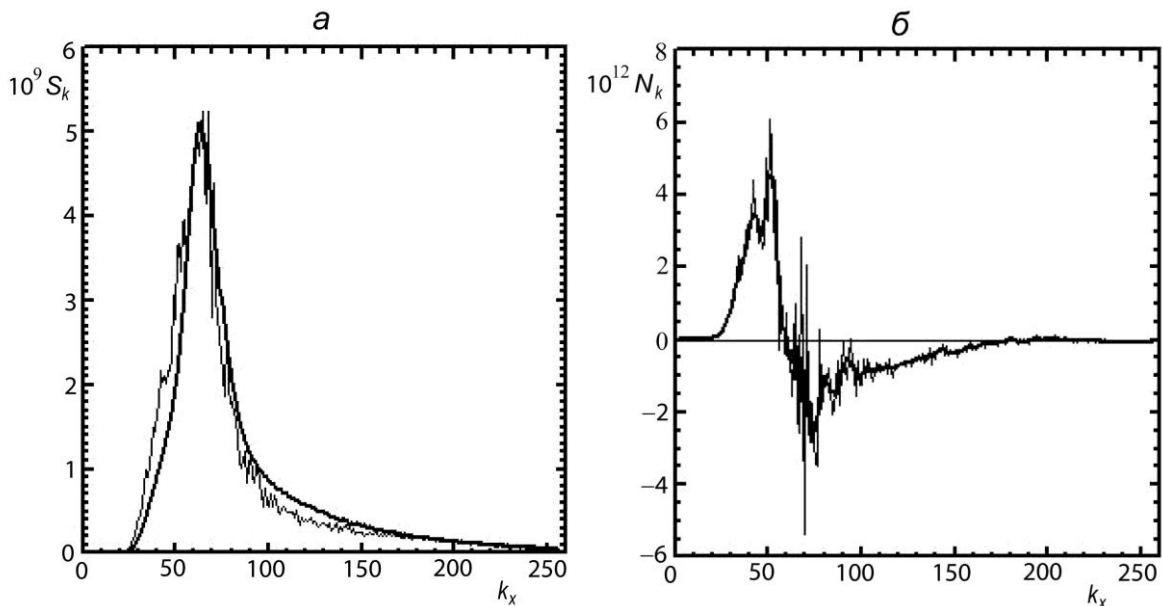


Рис. 14. Спектральные характеристики (30).

а — волновой спектр, интегрированный по поперечным волновым числам k_y ; жирная линия — начальный спектр, тонкая линия — спектр, полученный к 318 периоду; *б* — спектр скорости нелинейных взаимодействий, интегрированный по поперечным волновым числам k_y .

* * *

В данной статье сформулирован новый подход к решению трехмерных уравнений потенциальных волн. В модели использована нестационарная, неортогональная, скреп-

ленная с поверхностью координатная система. В новой системе координат кинематическое и динамическое поверхностные условия относятся к фиксированному уровню. Уравнение Лапласа для потенциала скорости превращается в общее трехмерное эллиптическое уравнение, которое решается с учетом условий двойной периодичности в горизонтальных направлениях при известном значении потенциала на поверхности и затухании вертикальной скорости с глубиной. Для решения уравнения используется метод прогонки, как для уравнения Пуассона, но с последовательной коррекцией правой части. Метод оказывается достаточно сложным, однако все же проще, чем методы, применяемые в технической гидродинамике для прямого моделирования потоков в сложных объемах (Large Eddy Scale method).

Ключевой проблемой всего подхода является решение уравнения для потенциала. Существенное упрощение задачи было достигнуто путем представления потенциала в виде суммы аналитической и нелинейной компонент. Вычислительные преимущества здесь достигаются тем, что все производные аналитической компоненты вычисляются точно, а нелинейная поправка оказывается на два порядка меньше. Точность решения уравнения проверялась несколькими способами. Потенциальность проблемы дает уникальную возможность проверки всей схемы, а также программы путем сравнения нестационарного решения с точным решением (волной Стокса), принятым в качестве начального условия. Проверка показала высокую точность модели: структура волны Стокса сохранялась с высокой точностью в течение многих тысяч шагов по времени. Подчеркнем, что такая проверка является исчерпывающей и нетривиальной.

Далее модель использовалась для численного воспроизведения теории неустойчивости МакЛина [44], обобщающей одномерную теорию неустойчивости Бенджамина—Фейера [55] на двумерные волны. Подтверждено, что двумерность сама по себе меняет характер неустойчивости: быстрее всего растут неустойчивые моды, направленные под углом к основной моде.

Моделирование двумерного поля волн с реалистическим спектром показало, что модель хорошо воспроизводит нелинейные свойства волнения: распределение вероятностей возвышения и высокие моменты (асимметрии и эксцесс). Квазиadiaбатичность процесса была достигнута путем введения интегральной компенсации оттока энергии в подсчетную область. Это дало возможность вычисления спектра скорости необратимых нелинейных взаимодействий, выражающихся в смещении спектра в сторону низких частот (downshifting). Форма такого спектра хорошо согласуется с общепринятыми представлениями. Тем не менее, количественное сравнение с интегралом Хассельманна [50] оказалось невозможным, потому что ни одна из существующих программ для расчета интеграла Хассельманна не способна проводить вычисления для разрешения, использованного в данной работе. Количество локусов (комбинаций четверок взаимодействующих волн) далеко превосходит возможности современных компьютеров. Заметим, что численная модель не ограничивается квадруплетами, а учитывает весь интегральный эффект нелинейных взаимодействий между многими тысячами мод. Высказывается предположение, что техника, основанная на подсчете столкновений, имеет пределы применимости, поскольку крайне маловероятно, что результаты расчетов, основанных на таком подходе, дают правильное асимптотическое поведение при увеличении разрешения. Положение может быть спасено гипотезой о том, что поверхностные волны, вероятно, имеют «корпускулярную» природу: волновое поле скорее является суперпозицией конечного числа нелинейных мод, чем плотной совокупности линейных мод. Эта гипотеза в настоящее время проходит проверку в численных расчетах и анализе экспериментальных данных. Если эта гипотеза правильна, слишком высокое разрешение является даже помехой, потому что положение каждой моды оказывается неопределенным с точностью до разрешения.

В настоящее время разработанная модель применяется для моделирования эволюции волнового поля под влиянием нелинейных взаимодействий (автоматически учитываемых в модели), притока энергии и диссипации. Наиболее детальная из существующих схем для расчета притока энергии была разработана в ходе численного совместного моделирования потенциальных волн и турбулентного пограничного слоя [48]. Схема основана на гипотезе о линейной зависимости поверхностного давления и возвышения. Диссипация волновой энергии вводится параметризацией эффектов обрушения волн [6, 13]. В настоящее время она расширена в работах, направленных в печать.

В настоящее время автором исследуется возможность буквального применения разработанной схемы для случая конечной глубины. Эта возможность существует потому, что нелинейная поправка достаточно быстро затухает с глубиной, поэтому влияние конечности глубины может быть полностью учтено через аналитическую компоненту. Согласно этой гипотезе, аналитическая компонента потенциала поля скорости может быть представлена в виде

$$\bar{\Phi}(\xi, \vartheta, \zeta) = \sum_{k,l} \bar{\varphi}_{k,l} \frac{\cosh(|k|(\zeta + H))}{\cosh(|k|H)} \Theta_{k,l},$$

где H — глубина.

Все расчеты, обсуждаемые в данной статье, были проведены на стандартном однопроцессорном Dell компьютере (скорость 3.00 MHz). Для проведения расчетов при $M_x = 128$, $M_y = 32$, $k_p = 32$ на период около 300 периодов пика тратится около 50 ч машинного времени. Более точные данные привести невозможно, поскольку часть времени затрачивается на оперативную обработку и запись результатов. Понятно, что трехмерная задача требует более мощные компьютеры. Разработана версия модели для параллельных процессоров, но ее эффективность находится пока под вопросом.

Автор благодарит проф. А. С. Бабанина (Технологический университет Свинбурна, Мельбурн, Австралия) за поддержку и сотрудничество, а также анонимных рецензентов за высказанные замечания, позволившие внести много уточнений.

Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 11-05-0052.

Литература

1. Tolman H. L. A third-generation model for wind waves on slowly varying, unsteady, and inhomogeneous depths and currents // J. Phys. Oceanogr. 1991. V. 21. P. 782—797.
2. Tolman H. L. A mosaic approach to wind wave modeling // Ocean Modelling. 2008. V. 25, Issues 1—2. P. 35—47.
3. Tolman H., Chalikov D. On the source terms in a third-generation wind wave model // J. Phys. Oceanogr. 1996. V. 26. P. 2497—2518.
4. Craik A. D. D. The origins of water wave theory // Rev. Fluid Mech. 2004. V. 36. P. 1—28. doi: 10.1146/annurev.fluid.36.050802.122118.
5. Ronald W. Yeung. Numerical methods in free-surface flows // Annual Review of Fluid Mechanics. 1982. V. 14. P. 395—442.
6. Чаликов Д. В. Статистика экстремальных ветровых волн // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2009. № 3(5), С. 4—24.
7. Chalikov D. Freak waves: their occurrence and probability // Phys of Fluid. 2009. V. 21. doi:10.1063/1.3175713.
8. Whitney J. C. The numerical solution of unsteady free-surface flows by conformal mapping // Proc. Second Inter. Conf. on Numer. Fluid Dynamics / Ed. M. Holt. 1971. Springer-Verlag, P. 458—462.
9. Dysthe K. B. Note on modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves // Proc. R. Soc. Lond. V. A369. P. 105—114.
10. Longuet-Higgins M. S., Cokelet E. D. The deformation of steep surface waves on water. I. A numerical method of computations // Proc. R. Soc. Lond. V. A350. P. 1—26.
11. Tulin M. P., Waseda T. Laboratory observations of wave group evolution, including breaking effects // J. Fluid Mech. 1999. V. 378. P. 197—232.

12. Chalikov D., Sheinin D. Numerical modeling of surface waves based on principal equations of potential wave dynamics // Technical Note. NOAA/NCEP/OMB. 1996. 54 p.
13. Chalikov D., Sheinin D. Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface // J. Comp. Phys. 2005. V. 210. P. 247—273.
14. Chalikov D., Sheinin D. Direct Modeling of One-dimensional Nonlinear Potential Waves. Nonlinear Ocean Waves. Advances in Fluid Mechanics / Ed. W. Perrie. 1998. V. 17. P. 207—258.
15. Chalikov D., Rainchik S. Coupled Numerical Modelling of Wind and Waves and the Theory of the Wave Boundary Layer // Boundary-Layer Meteorol. 2011. Iss. 138. P. 1—41. doi: 10.1007/s10546-010-9543-7.
16. Sheinin D., Chalikov D. Hydrodynamical modeling of potential surface waves // Problems of hydrometeorology and environment on the eve of XXI century. Proc. of intern. theoretical conf. St.-Petersburg, June 24—25, 2000.
17. Zakharov V. E., Dyachenko A. I., Vasilyev O. A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Eur. J. Mech. B/Fluids. V. 21. 2002. P. 283—291.
18. Clamond D., Grue J. A fast method for fully nonlinear water wave dynamics // J. Fluid Mech. 2001. V. 447. P. 337—355.
19. Clamond D., Fructus D., Grue J., Kristiansen O. An efficient method for three-dimensional surface wave simulations. Part II: Generation and absorption // J. Comp. Physics. 2005. V. 205. P. 686—705.
20. Fructus D., Clamond D., Grue J., Kristiansen O. An efficient model for three-dimensional surface wave simulations. Part I: Free space problems // J. Comp. Phys. 2005. V. 205. P. 665—685.
21. Grilli S., Guyenne P. and Dias F. A fully nonlinear model for three-dimensional overturning waves over arbitrary bottom // Int. J. Num. Methods Fluids. 2001. V. 35. P. 829—867.
22. Fochesato C., Dias F., Grill S. Wave energy focusing in a three-dimensional numerical wave tank // Proc. R. Soc. 2006. V. A462. P. 2715—2735.
23. Fochesato C., Frederick D. A fast method for nonlinear three-dimensional free-surface waves // Proc. R. Soc. A. 2006. V. 462. P. 2715—2735. doi: 10.1098/rspa.2006.1706.
24. Cai X., Petter H., Langtangen H. P., Nielse B. F., Tveito A. A Finite Element Method for Fully Nonlinear Water Waves // J. Comp. Phys. 1998. V. 143. P. 544—568.
25. Engsig-Karup A. P., Bingham H. B., Lindberg O. An efficient flexible-order model for 3D nonlinear water waves // J. Comp. Phys. 2009. V. 228. P. 2100—2118.
26. Bingham H. B., Zhang H. On the accuracy of finite-difference solutions for nonlinear water waves // J. Eng. Math. 2007. V. 58 P. 211—228.
27. Wu-Ting Tsai, Dick K. P. Yue. Computation of nonlinear free-surface flows // Annual Review of Fluid Mechanics. 1996. V. 28. P. 249—278.
28. Li B., Fleming A. A three-dimensional multigrid model for fully nonlinear water waves. Coast. Eng. 1997. V. 30. P. 235—258.
29. Haussling H. J., Van Eseltine R. T. Finite-difference methods for transient potential flows with free surfaces // Procs. of the Intern. Conf. on Numerical Ship Hydrodynamics. Univ. Extension Publ., Berkely, 1975. P. 295—313.
30. Dommermuth D., Yue D. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves // J. Fluid Mech. 1987. V. 184. P. 267—288.
31. West B., Brueckner K., Janda R., Milder M., Milton R. A new numerical method for surface hydrodynamics // J. Geophys. Res. 1987. V. 92, N 11. P. 803—824.
32. Zakharov V. E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of deep fluid // J. Appl. Mech. Tech. Phys. JETP. 1968. V. 2. P. 190—194. (English translation).
33. Clamond D., Francius M., Grue J., Kharif C. Long time interaction of envelope solitons and freak wave formations // European Journal of Mechanics B/Fluids. V. 25 2006. P. 536—553.
34. Thomas L. H. Elliptic Problems in Linear Differential Equations over a Network // Watson Sci. Comput. Lab Report. New York Columbia University, 1949.
35. Qiao F., Yeli Y., Yang Y., Zheng Q., Xia C., Ma J. Wave-induced mixing in the upper ocean: Distribution and application to a global ocean circulation model // Geophys. Res. Lett., 2004. V. 31. doi:10.1029/2004GL019824.
36. Babanin A. V., B. K. Haus. On the existence of water turbulence induced by non-breaking surface waves // J. Phys. Oceanogr. 2009. V. 39. P. 2675—2679.
37. Savelyev I. B., Maxeiner E., Chalikov D. Turbulence production by non-breaking waves: laboratory and numerical simulations // J. of Geophys. Res.-Oceans. 2012. doi:10.1029/2012JC007928.
38. Toffoli A., Babanin A. V., McConochie J. The effect of turbulence induced by nonbreaking waves on the ocean mixed layer: Field observations on the Australian North-West Shelf // J. Geophys. Res. 2012. V. 117. 8 p. doi:10.1029/2011JC007780.
39. Babanin A. V., Chalikov D. Numerical investigation of turbulence generation in nonbreaking potential waves // J. Geophys. Res. 2012. V. 117. 14 p. doi: 10.1029/2012JC007929.
40. Stokes G. G. On the theory of oscillatory waves // Trans. Cambridge Philos. Soc. 1847. V. 8. P. 441—445.

41. *Crapper G. D.* An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude // *J. of Fluid Mech.* 1957. V. 96. P. 417—445.
42. *Chalikov D., Rainchik S.* Coupled Numerical Modelling of Wind and Waves and the Theory of the Wave Boundary Layer // *Boundary-Layer Meteorol.* 2010. V. 138, N 1—41. doi: 10.1007/s10546-010-9543-7.
43. *Chalikov D.* Simulation of Benjamin—Feir instability and its consequences // *Physics of Fluid.* 2007. V. 19. P. 016602-15.
44. *McLean J. W.* Instability of finite amplitude water waves // *J. Fluid Mech.* 1982. V. 114. P. 315—330.
45. *Battjes J. A., Zitman T. J., Holthuijsen L. H.* A reanalysis of the spectra observed in JONSWAP // *J. Phys. Oceanogr.* 1987. V. 17. P. 1288—1295.
46. *Pierson W. J., Moscowitz L.* A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S. A. Kitaigorodskii // *J. of Geophys. Res.* 1964. V. 69, N 24. P. 5181—5190.
47. *Hasselmann, Barnett R. P., Bouws E. et al.* Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint Sea Wave Project (JONSWAP). *Tsch. Hydrogh. Z. Suppl.* 1973. V. A8, N 12. P. 1—95.
48. *Chalikov D.* The Parameterization of the Wave Boundary Layer // *J. Phys. Oceanogr.* 1995. V. 25. P. 1335—1349.
49. *Onorato M., Waseda T., Toffoli A. et al.* Statistical Properties of Directional Ocean Waves: The Role of the Modulational Instability in the Formation of Extreme Events // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 102. P. 114502.
50. *Hasselmann K.* Weak-interaction theory of ocean waves. Hamburg: Univ. of Hamburg, 1967. 112 p.
51. *Lake B. M., Yuen H. C.* A new model for nonlinear wind waves. Part 1: Physical model and experimental results // *J. Fluid. Mech.* 1978. V. 88. P. 33—62.
52. *Чаликов Д. В., Либерман Ю. М.* Интегрирование примитивных уравнений для потенциальных волн // *Изв. АН СССР. Физ. атм. океана.* 1991. 27. P. 42—47.
53. *Чаликов Д. В.* Трансформация гармонических волн на глубокой воде. *Фундаментальная и прикладная гидрофизика.* 2010. № 3(9). С. 14—21.
54. *Zakharov V. E., Korotkevich A. O., Pushkarev A. N., Dyachenko A. I.* JETP Mesoscopic Wave Turbulence // *JETP Letts.* 2005. V. 82, N 8. P. 487—491.
55. *Benjamin T. B., Feir J. E.* The disintegration of wave trains in deep water // *J. Fluid. Mech.* V. 27. P. 417—430.

Статья поступила в редакцию 13.05.2013 г.

