

УДК 551.466

© А. Р. Гиниятуллин<sup>1</sup>, А. А. Куркин<sup>1</sup>, О. Е. Куркина<sup>1,2</sup>, Ю. А. Степанянц<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, г. Нижний Новгород

<sup>3</sup>Университет Южного Квинсленда, Тувумба, Австралия

aakurkin@gmail.com

## ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА—ДЕ ВРИЗА ДЛЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Представлен вывод обобщенного уравнения Кортевега—де Вриза пятого порядка для внутренних волн в двухслойной жидкости с учетом поверхностного натяжения между слоями. При выводе уравнения потенциальность движений жидкости не предполагается, поэтому данный вывод может быть использован при рассмотрении волновых движений в вязкой жидкости, в жидкости с внешним вращением или при наличии сдвиговых потоков с завихренностью. Получены явные выражения для коэффициентов уравнения в зависимости от параметров среды: толщин слоев, плотностей жидкостей, коэффициента поверхностного натяжения. Показано, что при определенных сочетаниях параметров среды в полученном обобщенном уравнении как коэффициент квадратичной нелинейности, так и коэффициент дисперсии низшего порядка могут обращаться в ноль и менять знак. Особый интерес представляет ситуация, при которой они оба одновременно становятся почти нулевыми, а коэффициенты нелинейной дисперсии также оказываются пренебрежимо малыми — это возможно когда толщины слоев примерно одинаковы. В окрестности такой двойной критической точки выведенное уравнение сводится к так называемому уравнению Гарднера—Кавахары, обладающему солитонными решениями с осциллирующими асимптотиками. Это делает его привлекательным как с теоретической точки зрения, так и в плане практических приложений к задачам о течении тонких пленок несмешивающихся жидкостей. Характеристики течения при наличии солитонов сильно отличаются от ламинарного течения, что может приводить к нежелательным, а иногда и, наоборот, к положительным эффектам. Опираясь на выведенное обобщенное уравнение и зная его решения, можно предложить способ управления течением.

**Ключевые слова:** двухслойная жидкость, пикноклин, внутренние волны, непотенциальные течения, поверхностное натяжение, уравнение Кортевега—де Вриза.

Хорошо известно, что для описания длинных нелинейных внутренних волн (ВВ) широко используется уравнение Кортевега—де Вриза (КдВ) [1] и его разнообразные обобщения, содержащие слагаемые, ответственные за диссипацию, неоднородность среды, сдвиговые течения, вращение жидкости как целого и т. д. [2—12]. Однако во многих случаях вывод основного модельного уравнения проводится не вполне корректно, т. к. вначале предполагается, что движения жидкости потенциальны, а потом к выведенному более или менее последовательно уравнению КдВ дописываются существенно непотенциальные слагаемые, описывающие перечисленные выше эффекты. Сам вывод основного уравнения нередко представлен в чрезмерно усложненной форме.

Нам представляется целесообразным предложить здесь относительно простой и последовательный вывод обобщенного уравнения КдВ пятого порядка для ВВ в двухслойной жидкости с учетом поверхностного натяжения между слоями (жидкости могут при этом, вообще говоря, быть не смешивающимися). Наш вывод не связан с предположением о потенциальности движений в жидкостях, поэтому он в равной степени приложим как к потенциальным движениям, так и к непотенциальным. В последнем случае без особого труда в рассмотрение могут быть включены такие эффекты, как вязкость, неоднород-

ность (включая вертикальный сдвиг скорости основного течения), вращение жидкости как целого и т. п. эффекты. Отметим, что последовательный вывод уравнения КдВ для поверхностных волн (ПВ) с учетом вязкости был выполнен в работе [10], а для ВВ во вращающемся плавно стратифицированном океане — в работе [2].

Выведенное нами уравнение анализируется с целью выявления отдельных частных случаев, представляющих интерес как с точки зрения изучения их математической структуры и особенностей их решений, так и с прикладной точки зрения. Отметим, что в упомянутых частных случаях выведенное уравнение может быть применимо для описания ВВ в океане, а также для описания ВВ в тонких слоях несмешивающихся жидкостей, например, на границе керосин—вода, нефть—вода или других комбинаций жидкостей.

**Вывод обобщенного уравнения Кортевега—де Вриза для двухслойной жидкости.** Рассмотрим распространение ВВ на границе раздела слоев в двухслойной жидкости (рис. 1), ограниченной ровным плоским дном и поверхностью, на которую наложено условие твердой крышки. Как известно [13], это условие позволяет отфильтровать ПВ и выделить интересующие нас ВВ в «чистом виде». Толщину нижнего слоя обозначим через  $h_1$ , а верхнего — через  $h_2$ . Плотность и давление жидкости в нижнем слое примем равными  $\rho_1$  и  $p_1$ , соответственно, а в верхнем —  $\rho_2$  ( $\leq \rho_1$ ) и  $p_2$ . Введем следующие обозначения:  $x$  — горизонтальная координата,  $z$  — вертикальная координата,  $t$  — время;  $\eta(x, t)$  — отклонение границы раздела слоев от горизонтального положения,  $g$  — ускорение свободного падения,  $u_{1,2}$  — горизонтальные компоненты возмущения скорости, а  $w_{1,2}$  — вертикальные компоненты возмущения скорости, при этом индексы 1 и 2 относятся к нижнему и верхнему слоям, соответственно.

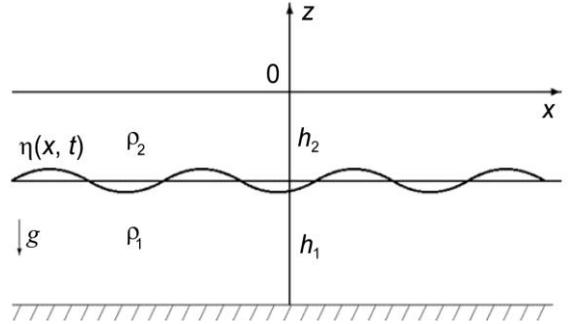


Рис. 1. Схематическое изображение волн в двухслойной жидкости.

Выпишем систему уравнения гидродинамики для каждого из слоев:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \text{ при } -h_1 < z < \eta, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \text{ при } \eta < z < h_2, \quad (2)$$

$$\rho_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \text{ при } -h_1 < z < \eta, \quad (3)$$

$$\rho_2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + w_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial p_2}{\partial x} = 0 \text{ при } \eta < z < h_2, \quad (4)$$

$$\rho_1 \left( \frac{\partial w_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} + w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z} + g \right) + \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0 \text{ при } -h_1 < z < \eta, \quad (5)$$

$$\rho_2 \left( \frac{\partial w_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} + w_2 \frac{\partial w_2}{\partial z} + g \right) + \frac{\partial p_2}{\partial z} = 0 \text{ при } \eta < z < h_2. \quad (6)$$

Учтем граничные условия на границе раздела между слоями:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} &= w_1, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} &= w_2, \\ p_2 - p_1 &= \sigma \eta_{xx} \left[ 1 + (\eta_x)^2 \right]^{-3/2}, \end{aligned} \right\} z = \eta(x, t), \quad (7)$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения между слоями жидкости с различными физическими свойствами. Здесь динамическое условие (третье уравнение в (7)) записано в полно-нелинейном виде. Однако дальнейшие выкладки показывают, что с принятой в данной работе точностью при выводе окончательного уравнения (44) достаточно ограничиться линейным приближением при учете эффекта поверхностного натяжения. Это следует уже из первого поправочного члена в разложении кривизны поверхности раздела  $\eta_{xx} \left[ 1 + (\eta_x)^2 \right]^{-3/2} \approx \eta_{xx} \left[ 1 - 3(\eta_x)^2 / 2 \right]$ . Как видно отсюда, поправочный к линейному член является кубичным по амплитуде и четвертого порядка малости по дисперсии, что выходит за пределы точности уравнения (44). Во избежание ненужных усложнений выкладок мы в дальнейшем ограничиваемся традиционным представлением кривизны поверхности как  $\eta_{xx}$ .

Примем во внимание также граничные условия обращения в нуль вертикальных компонент скорости на непроницаемом дне и на поверхности, используя традиционное приближение «твердой крышки», отфильтровывающее поверхностную моду:

$$w_1(z = -h_1) = 0; \quad w_2(z = h_2) = 0. \quad (8)$$

Далее для перехода к асимптотической процедуре необходимо определить малые параметры рассматриваемой задачи, исходя из ее геометрии и масштаба исследуемых явлений. В настоящей работе рассматриваются длинные волны, горизонтальный масштаб которых (длина волны)  $L$  значительно превосходит полную глубину жидкости  $H = h_1 + h_2$ , а характерная амплитуда возмущений  $A$  предполагается малой по сравнению с глубиной  $H$ . В этом случае можно ввести следующие малые параметры, характеризующие нелинейность и дисперсию волнового процесса:  $\varepsilon = A/H$ ,  $\mu = H^2/L^2$ . Стандартное масштабирование малых параметров предполагает один порядок малости этих величин:  $\varepsilon \sim \mu$ .

Отметим, что граничные условия (7) заданы на границе раздела слоев  $\eta(x, t)$ , которая сама является неизвестной функцией и подлежит определению. В предположении малости амплитуд возмущений все неизвестные функции, зависящие от вертикальной координаты, в этих граничных условиях могут быть разложены в ряды Тейлора по малым отклонениям от горизонтального уровня:

$$f(x, z = \eta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial z^n} \Big|_{z=0}. \quad (9)$$

Следующий этап асимптотической процедуры вывода искомого уравнения состоит в разложении неизвестных функций в ряды по малому параметру:

$$\begin{aligned} \eta &= \varepsilon(\eta_0 + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \dots), \\ u_1 &= \varepsilon(u_{10} + \varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots), \quad u_2 = \varepsilon(u_{20} + \varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots), \\ w_1 &= \varepsilon^{3/2}(w_{10} + \varepsilon w_{11} + \varepsilon^2 w_{12} + \dots), \quad w_2 = \varepsilon^{3/2}(w_{20} + \varepsilon w_{21} + \varepsilon^2 w_{22} + \dots), \\ p_1 &= p_{10} - \rho_1 g z + \varepsilon(p_{11} + \varepsilon p_{12} + \varepsilon^2 p_{13} + \dots), \quad p_2 = p_{20} - \rho_2 g z + \varepsilon(p_{21} + \varepsilon p_{22} + \varepsilon^2 p_{23} + \dots). \end{aligned} \quad (10)$$

Далее осуществляем переход к медленному времени и медленной координате. Обозначим через  $c$  — фазовую скорость длинных линейных волн (которую предстоит определить) и введем медленные переменные:

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - ct); \quad \tau = \varepsilon^{3/2}t. \quad (11)$$

Тогда производные по пространственной и временной координатам можно записать через медленные переменные следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\varepsilon^{1/2}c \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Подставляя ряды (10) в систему уравнений (1)—(6) и ряды вида (9) для  $u_{1,2}$ ,  $w_{1,2}$  и  $p_{1,2}$ , в граничные условия (7) и, используя граничные условия (8), а также медленные переменные (11), решаем последовательно полученные уравнения в каждом порядке по  $\varepsilon$ . Предварительно уравнения, полученные из (1), (2), (7), (8), разделим на  $\varepsilon^{3/2}$ , а из (3) и (4) — на  $\varepsilon^{1/2}$ . Проанализируем последовательно уравнения, получаемые в каждом порядке по параметру  $\varepsilon$ .

*Нулевой порядок.* В нулевом приближении при  $\varepsilon^0$  получаем из уравнений (1) и (2):

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} + \frac{\partial w_{10}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial u_{20}}{\partial \xi} + \frac{\partial w_{20}}{\partial z} = 0. \quad (12)$$

Эти уравнения, будучи линейными, допускают решения в виде разделенных переменных:

$$\begin{cases} u_{10}(\xi, z, \tau) = A_1''(\xi, \tau)U_1(z), & u_{20}(\xi, z, \tau) = A_2''(\xi, \tau)U_2(z), \\ w_{10}(\xi, z, \tau) = A_1^w(\xi, \tau)W_1(z), & w_{20}(\xi, z, \tau) = A_2^w(\xi, \tau)W_2(z). \end{cases} \quad (13)$$

Уравнения (12) с использованием выражений (13) приводят к соотношениям:

$$\frac{A_1^w}{\partial A_1''} = -\frac{U_1}{dW_1} = c_1 = \text{const}; \quad \frac{A_2^w}{\partial A_2''} = -\frac{U_2}{dW_2} = c_2 = \text{const},$$

где  $c_1$  и  $c_2$  есть произвольные константы.

Прежде чем двигаться дальше, обсудим размерность введенных функций. Традиционно при разделении переменных в волновых задачах функции, определяющие структуру решения по «неволновой» координате (в нашем случае по поперечной координате  $z$ ), полагаются безразмерными, а функции, зависящие от продольной координаты, имеют размерность исходной переменной. Следуя этому принципу, будем считать функции  $U_{1,2}$  и  $W_{1,2}$  безразмерными, а  $A_{1,2}''$ ,  $A_{1,2}^w$  — имеющими размерность скорости (м/с). При таком условии постоянные  $c_1$  и  $c_2$  имеют размерность длины (м). Удобно положить их равными одинаковой величине:

$$c_1 = c_2 = cT = \text{const},$$

где  $c$  — введенная ранее фазовая скорость линейных длинных волн, подлежащая определению, а  $T$  — характерный временной масштаб волнового процесса (например, период волны). Тогда

$$A_{1,2}^w = cT \frac{\partial A_{1,2}''}{\partial \xi}; \quad U_{1,2} = -cT \frac{dW_{1,2}}{dz}. \quad (14)$$

Из граничных условий на дне и на поверхности жидкости (8) получаем

$$W_1(z = -h_1) = 0; \quad W_2(z = h_2) = 0. \quad (15)$$

Уравнения (3)—(6) удовлетворяются тождественно при  $\varepsilon^0$ . Граничные условия (7) при  $\varepsilon^0$  приводят к следующим уравнениям, соответственно:

$$c \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} + A_1^w W_1 \Big|_{z=0} = 0; \quad c \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} + A_2^w W_2 \Big|_{z=0} = 0; \quad [p_{20} - p_{10} - (\rho_2 - \rho_1)gz]_{z=0} \equiv [p_{20} - p_{10}]_{z=0} = 0,$$

из которых, учитывая соотношения (14), получаем:

$$T \frac{\partial A_1^u}{\partial \xi} W_1 \Big|_{z=0} = -\frac{\partial \eta_0}{\partial \xi}; \quad T \frac{\partial A_2^u}{\partial \xi} W_2 \Big|_{z=0} = -\frac{\partial \eta_0}{\partial \xi}, \quad (16)$$

$$p_{20} = p_{10}.$$

Поскольку функции  $W_{1,2}$  определены с точностью до постоянного множителя, то на них можно наложить следующее условие нормировки

$$W_{1,2}(z = 0) = 1. \quad (17)$$

Тогда соотношения (16) дают:

$$A_{1,2}^u = -\eta_0 / T.$$

*Первый порядок.* При  $\varepsilon^1$  уравнения (1) и (2) приводят к следующим равенствам:

$$\frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial w_{11}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial u_{21}}{\partial \xi} + \frac{\partial w_{21}}{\partial z} = 0. \quad (18)$$

В этом же порядке по  $\varepsilon$  из уравнений (3) и (4) получаем:

$$-\rho_1 c^2 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \frac{dW_1}{dz} + \frac{\partial p_{11}}{\partial \xi} = 0; \quad -\rho_2 c^2 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \frac{dW_2}{dz} + \frac{\partial p_{21}}{\partial \xi} = 0. \quad (19)$$

Уравнения (5) и (6) дают:

$$\frac{\partial p_{11}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial p_{21}}{\partial z} = 0. \quad (20)$$

Решая уравнения (19) относительно давлений, получаем:

$$p_{11} = \rho_1 c^2 \eta_0 \frac{dW_1}{dz} + \tilde{p}_{11}; \quad p_{21} = \rho_2 c^2 \eta_0 \frac{dW_2}{dz} + \tilde{p}_{21},$$

где  $\tilde{p}_{11}$ ,  $\tilde{p}_{21}$  — постоянные интегрирования. Из уравнений (20) затем следует:

$$\frac{d^2 W_1}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2 W_2}{dz^2} = 0,$$

откуда следует, что  $W_{1,2}$  есть линейные функции от  $z$ :  $W_{1,2} = a_{1,2}z + b_{1,2}$ . Из условий нормировки (17) получаем, что  $b_{1,2} = 1$ , а из граничных условий на дне и на поверхности (15) находим, что  $a_1 = 1/h_1$ ,  $a_2 = -1/h_2$ . Таким образом, имеем:

$$W_1 = \frac{z}{h_1} + 1, \quad W_2 = -\frac{z}{h_2} + 1.$$

С учетом полученных соотношений уравнения (7) при  $\varepsilon^1$  имеют вид:

$$w_{11}|_{z=0} = \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} + \frac{2c}{h_1} \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} - c \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi}; \quad (21)$$

$$w_{21}|_{z=0} = \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} - \frac{2c}{h_2} \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} - c \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi}; \quad (22)$$

$$\eta_0 \left( -\frac{\rho_1 c^2}{h_1} + \rho_1 g - \frac{\rho_2 c^2}{h_2} - \rho_2 g \right) - \tilde{p}_{11} + \tilde{p}_{21} = 0. \quad (23)$$

Граничные условия на внешних границах (8) при  $\varepsilon^1$  выглядят так:

$$w_{11}(z = -h_1) = 0; \quad w_{21}(z = h_2) = 0. \quad (24)$$

Из уравнения (23), во-первых, следует, что  $\tilde{p}_{21} = \tilde{p}_{11}$ , а, во-вторых, можно определить скорость  $c$  бесконечно длинных волн в линейном приближении:

$$c^2 = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)h_1 h_2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}.$$

Теперь можно выписать все члены низшего ненулевого порядка по  $\varepsilon$  в рядах (10), выраженные через одну неизвестную функцию  $\eta_0$  — смещения границы раздела жидкостей:

$$\begin{aligned} u_{10} &= \frac{c}{h_1} \eta_0, & u_{20} &= -\frac{c}{h_2} \eta_0; \\ w_{10} &= -c \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \left( \frac{z}{h_1} + 1 \right), & w_{20} &= -c \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \left( -\frac{z}{h_2} + 1 \right); \\ p_{11} &= \frac{\rho_1 c^2}{h_1} \eta_0 + \tilde{p}_{11}, & p_{21} &= -\frac{\rho_2 c^2}{h_2} \eta_0 + \tilde{p}_{11}. \end{aligned}$$

*Второй порядок.* При  $\varepsilon^2$  уравнения (1) и (2) приводят к следующим равенствам:

$$\frac{\partial u_{12}}{\partial \xi} + \frac{\partial w_{12}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_{22}}{\partial \xi} + \frac{\partial w_{22}}{\partial z} = 0. \quad (25)$$

Из уравнений (3) и (4) получаем при  $\varepsilon^2$ :

$$\rho_1 c \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} + \frac{c}{h_1^2} \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{11}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial p_{12}}{\partial \xi} = 0; \quad (26)$$

$$\rho_2 c \left( -\frac{1}{h_2} \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} + \frac{c}{h_2^2} \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{21}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial p_{22}}{\partial \xi} = 0. \quad (27)$$

Уравнения (5) и (6) дают:

$$\rho_1 c^2 \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \xi^2} \left( \frac{z}{h_1} + 1 \right) + \frac{\partial p_{12}}{\partial z} = 0; \quad \rho_2 c^2 \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \xi^2} \left( -\frac{z}{h_2} + 1 \right) + \frac{\partial p_{22}}{\partial z} = 0. \quad (28)$$

Решая эти уравнения относительно давлений, получаем:

$$p_{12} = -\rho_1 c^2 \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \xi^2} z \left( \frac{z}{2h_1} + 1 \right) + \tilde{p}_{12}(\xi, \tau); \quad p_{22} = -\rho_2 c^2 \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \xi^2} z \left( -\frac{z}{2h_2} + 1 \right) + \tilde{p}_{22}(\xi, \tau).$$

Уравнения (7) при  $\varepsilon^2$  имеют вид:

$$w_{12}|_{z=0} = \left( \frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} + \frac{c}{h_1} \left( \eta_0 \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \eta_1 \right) - \eta_0 \frac{\partial w_{11}}{\partial z} + u_{11} \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} - c \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} \right) \Big|_{z=0}; \quad (29)$$

$$w_{22}|_{z=0} = \left( \frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} - \frac{c}{h_2} \left( \eta_0 \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \eta_1 \right) - \eta_0 \frac{\partial w_{21}}{\partial z} + u_{21} \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} - c \frac{\partial \eta_2}{\partial \xi} \right) \Big|_{z=0}; \quad (30)$$

$$\eta_1 g(\rho_1 - \rho_2) - \sigma \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \xi^2} - \tilde{p}_{12} + \tilde{p}_{22} = 0. \quad (31)$$

При этом граничные условия на внешних границах (8) выглядят так:

$$w_{12}(z = -h_1) = 0; \quad w_{22}(z = h_2) = 0. \quad (32)$$

Из (31) можно найти  $\tilde{p}_{22} = \tilde{p}_{12} - \eta_1 g(\rho_1 - \rho_2) + \sigma \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \xi^2}$ .

Исключая далее  $u_{11}$  и  $u_{21}$  из (18), (26) и (27), находим

$$w_{11} = \frac{c}{2} \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial \xi^3} \left( \frac{z^3}{3h_1} + z^2 \right) - \frac{c}{h_1^2} \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} z - \frac{1}{h_1} \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} z - \frac{1}{\rho_1 c} \frac{\partial \tilde{p}_{12}}{\partial \xi} z + \tilde{w}_{11}(\xi, \tau); \quad (33)$$

$$w_{21} = \frac{c}{2} \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial \xi^3} \left( -\frac{z^3}{3h_2} + z^2 - \frac{2\sigma}{c^2 \rho_2} \right) - \frac{c}{h_2^2} \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} z + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} z - \frac{1}{\rho_2 c} \frac{\partial \tilde{p}_{12}}{\partial \xi} z + \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2 c} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} z + \tilde{w}_{21}(\xi, \tau). \quad (34)$$

Используем далее граничные условия на внешних границах (24):

$$\frac{ch_1^2}{3} \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial \xi^3} + \frac{c}{h_1} \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} + \frac{h_1}{\rho_1 c} \frac{\partial \tilde{p}_{12}}{\partial \xi} + \tilde{w}_{11}(\xi, \tau) = 0; \quad (35)$$

$$\left( \frac{ch_2^2}{3} - \frac{\sigma h_2}{\rho_2 c} \right) \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial \xi^3} - \frac{c}{h_2} \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} - \frac{h_2}{\rho_2 c} \frac{\partial \tilde{p}_{12}}{\partial \xi} + \frac{g(\rho_1 - \rho_2)h_2}{\rho_2 c} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \tilde{w}_{21}(\xi, \tau) = 0, \quad (36)$$

а также условия (21)—(23) на границе раздела слоев, из которых получим:

$$\tilde{w}_{11} = \frac{2c}{h_1} \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} - c \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi}; \quad (37)$$

$$\tilde{w}_{21} = -\frac{2c}{h_2} \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} - c \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi}. \quad (38)$$

С учетом (37), (38) уравнения (35), (36) преобразуются к следующим:

$$\frac{ch_1^2}{3} \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial \xi^3} + \frac{3c}{h_1} \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} - c \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \frac{h_1}{\rho_1 c} \frac{\partial \tilde{p}_{12}}{\partial \xi} = 0; \quad (39)$$

$$\left( \frac{ch_2^2}{3} - \frac{\sigma h_2}{\rho_2 c} \right) \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial \xi^3} - \frac{3c}{h_2} \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} - \frac{h_2}{\rho_2 c} \frac{\partial \tilde{p}_{12}}{\partial \xi} + \frac{g(\rho_1 - \rho_2)h_2}{\rho_2 c} \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} = 0. \quad (40)$$

Из этих уравнений можно исключить  $\frac{\partial \tilde{p}_{12}}{\partial \xi}$  и получить следующее уравнение КдВ для границы раздела слоев:

$$\frac{\partial \eta_0}{\partial \tau} + \alpha \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial \xi^3} = 0, \quad (41)$$

где нелинейный и дисперсионный коэффициенты имеют вид:

$$\alpha = \frac{3c}{2h_1 h_2} \frac{\rho_1 h_2^2 - \rho_2 h_1^2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}; \quad \beta = \frac{ch_1 h_2}{6} \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 - 3\sigma/c^2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}. \quad (42)$$

Продолжая далее процедуру вывода волнового уравнения в высших порядках по  $\varepsilon$ , выпишем все первые поправочные члены в рядах (10), выраженные через функции  $\eta_0$  и  $\eta_1$ . Вертикальные скорости находятся из уравнений (33), (34), (37), (38) и любого из уравнений (39), (40):

$$\begin{aligned} w_{11} = & \left( \frac{c}{6h_1} z^3 + \frac{c}{2} z^2 + \left( \frac{\rho_1 h_2 + 2\rho_2 h_1}{\rho_1 h_1 h_2} \beta - \frac{\rho_2 c^2 h_2 - 3\sigma}{3c\rho_1} \right) z - \beta \right) \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial \xi^3} + \\ & + \left[ \left( \frac{\rho_1 h_2 + 2\rho_2 h_1}{\rho_1 h_1 h_2} \alpha - c \frac{\rho_1 h_2^2 - 3\rho_2 h_1^2}{\rho_1 h_1^2 h_2^2} \right) z - \alpha + \frac{2c}{h_1} \right] \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} - c \left( \frac{z}{h_1} + 1 \right) \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi}, \\ w_{21} = & \left( -\frac{c}{6h_2} z^3 + \frac{c}{2} z^2 + \left( \frac{\beta}{h_2} - \frac{ch_2}{3} \right) z - \beta \right) \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial \xi^3} + \\ & + \left[ \left( \frac{\alpha}{h_2} + \frac{2c}{h_2^2} \right) z - \alpha - \frac{2c}{h_2} \right] \eta_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} - c \left( 1 - \frac{z}{h_2} \right) \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Из уравнения (19) найдем компоненты горизонтальной скорости:

$$\begin{aligned} u_{11} = & \left( -\frac{c}{2h_1} z^2 - cz - \frac{\rho_1 h_2 + 2\rho_2 h_1}{\rho_1 h_1 h_2} \beta + \frac{\rho_2 c^2 h_2 - 3\sigma}{3c\rho_1} \right) \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \xi^2} + \\ & + \left( -\frac{\rho_1 h_2 + 2\rho_2 h_1}{2\rho_1 h_1 h_2} \alpha + c \frac{\rho_1 h_2^2 - 3\rho_2 h_1^2}{2\rho_1 h_1^2 h_2^2} \right) \eta_0^2 + \frac{c}{h_1} \eta_1, \\ u_{21} = & \left( \frac{c}{2h_2} z^2 - cz - \frac{\beta}{h_2} + \frac{ch_2}{3} \right) \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \xi^2} - \left( \frac{\alpha}{2h_2} + \frac{c}{h_2^2} \right) \eta_0^2 - \frac{c}{h_2} \eta_1. \end{aligned}$$

Компоненты давления выразим из уравнения (28) с учетом любого из уравнений (37), (38):

$$\begin{aligned} p_{12} = & \left( -\frac{\rho_1 c^2}{2h_1} z^2 - \rho_1 c^2 z - \frac{2\rho_2 c \beta}{h_2} + \frac{\rho_2 c^2 h_2}{3} - \sigma \right) \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \xi^2} - \frac{\rho_2 c}{h_2} \left( \frac{3c}{2h_2} + \alpha \right) \eta_0^2 + \frac{\rho_1 c^2}{h_1} \eta_1, \\ p_{22} = & \left( \frac{\rho_2 c^2}{2h_2} z^2 - \rho_2 c^2 z - \frac{2\rho_2 c \beta}{h_2} + \frac{\rho_2 c^2 h_2}{3} \right) \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \xi^2} - \frac{\rho_2 c}{h_2} \left( \frac{3c}{2h_2} + \alpha \right) \eta_0^2 - \frac{\rho_2 c^2}{h_2} \eta_1. \end{aligned}$$

Полученные выражения можно использовать для построения уравнения следующего приближения.

*Третий порядок.* Все уравнения в третьем порядке по  $\varepsilon$  оказываются довольно громоздкими; для их получения была использована программа символьных вычислений в Maple. Здесь мы не приводим детали расчетов, а опишем лишь кратко основные шаги, необходимые для вывода нелинейного эволюционного уравнения следующего порядка для смещения поверхности раздела слоев.

Из уравнений, получаемых из (5) и (6) при  $\varepsilon^3$  интегрированием по  $z$ , снова находим компоненты давлений  $p_{13}(\xi, z, \tau)$  и  $p_{23}(\xi, z, \tau)$  с точностью до аддитивных функций  $\tilde{p}_{13}(\xi, \tau)$  и  $\tilde{p}_{23}(\xi, \tau)$ . Из граничного условия (7) при  $\varepsilon^3$  можно найти связь между этими функциями  $\tilde{p}_{13}(\xi, \tau)$  и  $\tilde{p}_{23}(\xi, \tau)$ . Затем из уравнений, получаемых из (3) и (4) при  $\varepsilon^3$ , используя уравнение (25) для исключения горизонтальных скоростей  $u_{12}$  и  $u_{22}$ , найдем  $w_{12}$  и  $w_{22}$  с точностью до аддитивных функций  $\tilde{w}_{13}(\xi, \tau)$  и  $\tilde{w}_{23}(\xi, \tau)$ . Эти функции определим из граничных условий (29), (30). Далее используем граничные условия (32); исключая  $\tilde{p}_{13}(\xi, \tau)$ , приводим их к одному уравнению:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} + \alpha \left( \eta_0 \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} + \eta_1 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \right) + \beta \frac{\partial^3 \eta_1}{\partial \xi^3} + \alpha_1 \eta_0^2 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} + \gamma_1 \eta_0 \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial \xi^3} + \gamma_2 \frac{\partial \eta_0}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial \xi^2} + \beta_1 \frac{\partial^5 \eta_0}{\partial \xi^5} = 0, \quad (43)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  определяются формулами (42), а остальные коэффициенты имеют следующий вид:

$$\alpha_1 = -\frac{3c(h_1^4 \rho_2^2 + 8\rho_1 \rho_2 h_1^3 h_2 + 14\rho_1 \rho_2 h_1^2 h_2^2 + 8\rho_1 \rho_2 h_1 h_2^3 + h_2^4 \rho_1^2)}{8h_1^2 h_2^2 (\rho_2 h_1 + \rho_1 h_2)^2};$$

$$\gamma_1 = -\frac{7(h_1^3 - h_2^3)\rho_1 \rho_2 c^2 + 5h_1^2 h_2 \rho_2^2 c^2 + 2h_1 h_2 (h_1 - h_2)\rho_1 \rho_2 c^2 - 3(h_1^2 \rho_2 - h_2^2 \rho_1)\sigma - 5h_1 h_2 \rho_1^2 c^2}{12c(\rho_2 h_1 + \rho_1 h_2)^2};$$

$$\gamma_2 = -\frac{31(h_1^3 - h_2^3)\rho_1 \rho_2 c^2 + 23h_1^2 h_2 \rho_2^2 c^2 + 8h_1 h_2 (h_1 - h_2)\rho_1 \rho_2 c^2 + 15(h_1^2 \rho_2 - h_2^2 \rho_1)\sigma - 23h_1 h_2 \rho_1^2 c^2}{24c(\rho_2 h_1 + \rho_1 h_2)^2};$$

$$\beta_1 = \frac{ch_1 h_2 \rho_1 \rho_2 (h_1^4 + h_2^4 + 15h_1^2 h_2^2 / 2) + (19/4)h_1 h_2 (\rho_1^2 h_1^2 + \rho_2^2 h_2^2) - 5h_1 h_2 (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + 3\sigma / 2c^2)(3\sigma / 2c^2)}{90(\rho_2 h_1 + \rho_1 h_2)^2}.$$

Введем обозначение  $\zeta = \eta_0 + \varepsilon \eta_1 = \eta + O(\varepsilon^2)$ . Переменная  $\zeta$  описывает возмущение границы раздела с точностью до членов порядка малости по  $\varepsilon$  включительно. Комбинируя уравнения (41) и (43), получаем высшее уравнение КдВ, справедливое в том же приближении по  $\varepsilon$ :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \alpha \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^3} + \varepsilon \left( \alpha_1 \zeta^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \gamma_1 \zeta \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^3} + \gamma_2 \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} + \beta_1 \frac{\partial^5 \zeta}{\partial \xi^5} \right) = 0. \quad (44)$$

Это и есть искомое уравнение для ВВ на границе раздела слоев двух, вообще говоря, несмешивающихся жидкостей. Подчеркнем, что при его выводе мы нигде не использовали условие потенциальности жидкости, поэтому данный вывод может быть с равным успехом использован для вывода уравнений вязкой и/или вращающейся жидкости. Такое же по форме уравнение было выведено в работе [14], но без учета поверхностного натяжения между слоями.

**Анализ коэффициентов уравнения (44) и различные частные случаи.** Введем безразмерные параметры  $a$ ,  $b$  и  $s$  следующим образом:

$$a = \rho_2 / \rho_1 < 1, \quad b = h_2 / h_1, \quad s = 2\sigma[(\rho_1 + \rho_2) g H^2]^{-1}$$

и выразим коэффициенты уравнения (44) через эти параметры:

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{gH} &= \frac{b(1-a)}{(1+b)(a+b)}, \quad \alpha^* = \frac{\alpha H}{c} = \frac{3}{2} \frac{(1+b)(b^2-a)}{b(a+b)}; \\ \beta^* &= \frac{\beta}{cH^2} = \frac{1}{12} \frac{2b(1+ab)(1-a) - 3(1+a)(a+b)(1+b)^2 s}{(1+b)^2(a+b)(1-a)}; \\ \alpha_1^* &= \frac{\alpha_1 H^2}{c} = -\frac{3}{8} \frac{(a^2 + 8ab + 14ab^2 + 8ab^3 + b^4)(1+b)^2}{b^2(a+b)^2}; \\ \gamma_1^* &= \frac{\gamma_1}{cH} = -\frac{5a^2b + 2ab - 7ab^3 + 7a - 2b^2a - 5b^2}{12(1+b)(a+b)^2} + \frac{(1+b)(1+a)(a-b^2)s}{8b(1-a)(a+b)}; \\ \gamma_2^* &= \frac{\gamma_2}{cH} = -\frac{23a^2b + 8ab - 31ab^3 + 31a - 8b^2a - 23b^2}{24(1+b)(a+b)^2} - \frac{5(1+b)(1+a)(a-b^2)s}{16b(1-a)(a+b)}; \\ \beta_1^* &= \frac{\beta_1}{cH^4} = -\frac{(1+a)^2 s^2}{32(1-a)^2} - \frac{(1+a)(ab+1)bs}{24(1-a)(1+b)^2(a+b)} + \frac{(4ab^4 + 19b + 30b^2a + 19a^2b^3 + 4a)b}{360(a+b)^2(1+b)^4}. \end{aligned} \quad (45)$$

Если в формулах (45) положить  $s = 0$ , то с точностью до обозначений они перейдут в формулы из работы [14].

Графики нормированных коэффициентов  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$ ,  $\alpha_1^*$ ,  $\beta_1^*$ ,  $\gamma_1^*$  и  $\gamma_2^*$  приведены на рис. 2. На рис. 3 представлена зависимость нормированного коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma g / [(\rho_1 + \rho_2)H]$  от полной глубины для различных комбинаций жидкостей в верхнем и нижнем слое (различных  $\rho_1$  и  $\rho_2$ ).

Как видно из этих графиков, ряд коэффициентов уравнения может обращаться в ноль и менять знак. В частности, коэффициент квадратичной нелинейности  $\alpha$  исчезает при  $a_{cr} = b^2$  (это обстоятельство отмечалось во многих работах [15]), а коэффициент дисперсии  $\beta$  при производной третьего порядка в уравнении (44) зануляется при

$$s_{cr} = \frac{2b(1-a)(1+ab)}{3(1+b)^2(a+b)(1+a)}.$$

Если оба эти условия выполняются одновременно, то выражения для оставшихся коэффициентов уравнения (44) принимают вид:

$$\alpha_1^* = -\frac{3(1+b)^2}{b}; \quad \beta_1^* = \frac{b^4 - b^3 + b^2 - b + 1}{90(1+b)^4}; \quad \gamma_1^* = \frac{-1+b}{6(1+b)}, \quad \gamma_2^* = \frac{-1+b}{3(1+b)},$$

и основное уравнение (44) в окрестности таких критических точек заметно упрощается. Особый интерес представляет ситуация, при которой коэффициенты квадратичной нелинейности  $\alpha$  и дисперсии третьего порядка  $\beta$  одновременно становятся малыми, а коэффициенты  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  пренебрежимо малы — это возможно при  $b \cong 1$ , т. е. когда толщины слоев примерно одинаковы. В окрестности такой двойной критической точки уравнение (44) сводится к следующему уравнению, которое мы будем называть уравнением Гарднера—Кавахары:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + c \frac{\partial z}{\partial x} + \alpha z \frac{\partial z}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \alpha_1 z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial^5 z}{\partial x^5} = 0, \quad (46)$$

где  $z = \varepsilon \zeta$ .

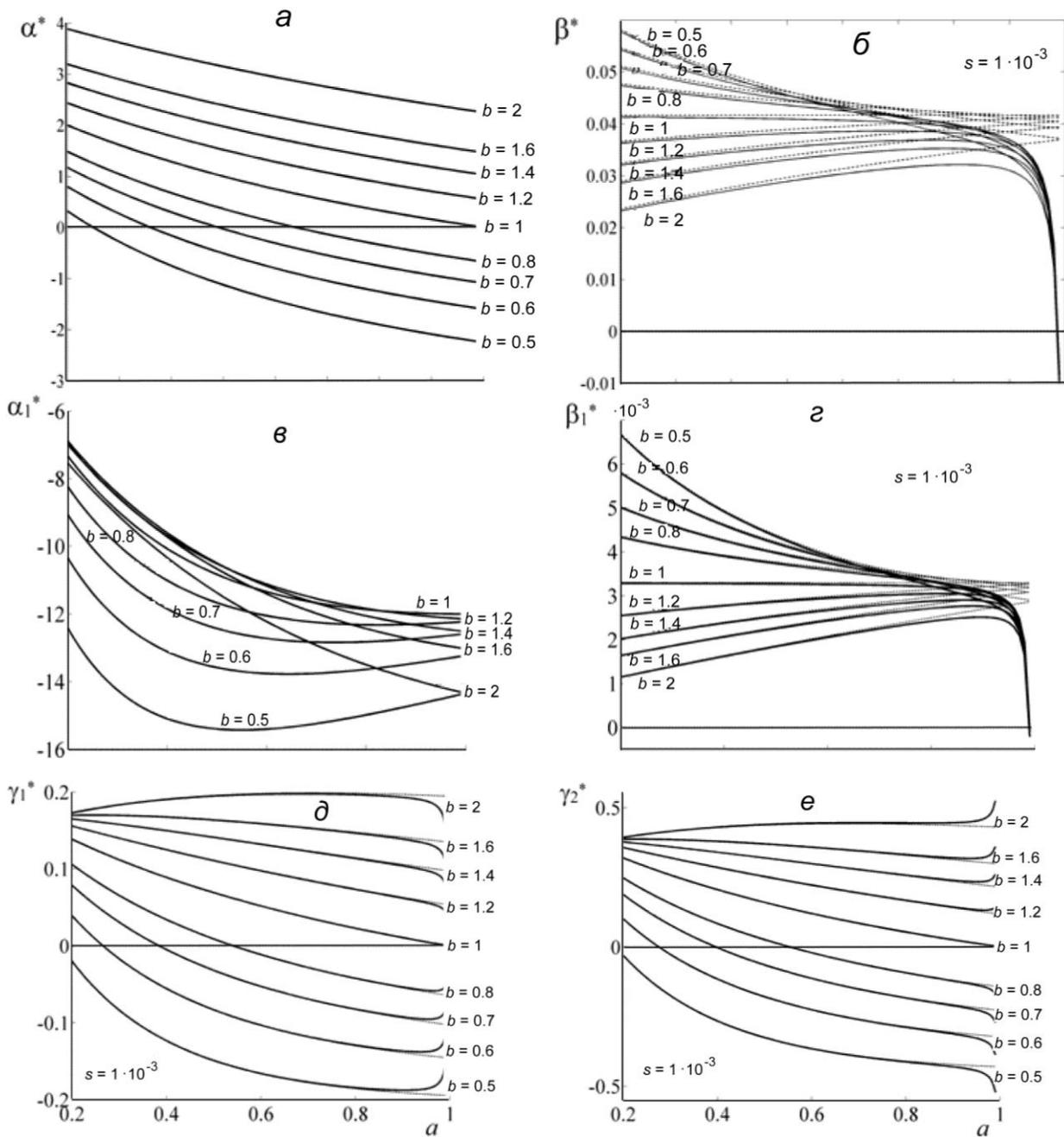


Рис. 2. Графики нормированных коэффициентов уравнения (44).

$a$  — коэффициент квадратичной нелинейности  $\alpha^*$ ;  $\beta$  — коэффициент дисперсии  $\beta^*$ ;  $\epsilon$  — коэффициент кубической нелинейности  $\alpha_1^*$ ;  $z$  — коэффициент дисперсии старшего порядка  $\beta_1^*$ ;  $\delta$  — коэффициент нелинейной дисперсии  $\gamma_1^*$ ;  $e$  — коэффициент нелинейной дисперсии  $\gamma_2^*$  (пунктирными линиями изображены зависимости при  $\sigma = 0$ ).

При  $\beta_1 = 0$  это уравнение превращается в известное уравнение Гарднера, которое является полностью интегрируемым и содержит, в частности, солитонные решения [1, 5, 8, 9]. В другом предельном случае  $\alpha_1 = 0$  уравнение (46) превращается в уравнение Кавачары, которое не является полностью интегрируемым, но содержит солитоны, обладающие осциллирующими асимптотиками [16]. Благодаря этому, возникают связанные состояния из двух или нескольких солитонов, вплоть до образования бесконечных цепочек стационарно связанных солитонов [17—19]. Такие цепочки могут быть как регулярными, так и нерегулярными, представляя собой квазислучайные последовательности солитонов.

Как показывают предварительные расчеты, уравнение (46) тоже обладает солитонными решениями с осциллирующими асимптотиками. Это делает его привлекательным как с теоретической точки зрения, так и в плане практических приложений к задачам о течении тонких пленок несмешивающихся жидкостей. Действительно, при течении тонких пленок несмешивающихся жидкостей возможны такие режимы, при которых возникают солитоны с осциллирующими асимптотиками. При этом, как отмечено выше, из них возможно образование связанных как стационарных, так и нестационарных состояний, в том числе и бесконечных цепочек хаотически связанных между собой солитонов [17—19]. Характеристики течения при наличии солитонов сильно отличаются от ламинарного течения (например, сила сопротивления, перенос вещества), что может приводить к нежелательным эффектам, а иногда и, наоборот, к положительным эффектам. Опираясь на выведенное модельное уравнение и зная его решения, можно предложить способ управления течением. Это один из примеров возможного практического приложения рассмотренной здесь задачи. Вероятно, можно предложить и другие примеры.

\*\*\*

Итак, в данной работе для описания динамики нелинейных ВВ выведено обобщенное уравнение Кортевега—де Вриза, содержащее члены высшего порядка малости по нелинейности и дисперсии. Проанализирована структура этих членов в зависимости от параметров стратификации (плотностей и толщин слоев, величины поверхностного натяжения между жидкостями). Показано, что при определенном соотношении между этими параметрами ряд коэффициентов основного уравнения обращается в ноль, при этом уравнение существенно упрощается, хотя по-прежнему остается нелинейным и дисперсионным. Структура решений данного уравнения еще не известна, этому будет посвящена отдельная работа. Однако уже сейчас можно сказать, что по опыту исследования аналогичных волновых задач здесь можно ожидать весьма интересные структуры в виде солитонов с осциллирующими асимптотиками, аналогичными наблюдавшимся в работах [16—19].

*Представленные результаты получены в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009—2013 гг. (№ 14.В37.21.0881), а также проекта Научного фонда НИУ ВШЭ № 12-01-0103 и гранта РФФИ 14-02-00983.*

### Литература

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987. 480 с.
2. *Островский Л. А.* Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане // *Океанология.* 1978. Т. 18, вып. 2. С. 181—191.
3. *Ostrovsky L. A., Stepanyants Yu. A.* Nonlinear surface and internal waves in rotating fluids // *Nonlinear Waves. 3. Physics and Astrophysics,* Springer-Verlag, 1990. P. 106—128.
4. *Grimshaw R. H. J., Ostrovsky L. A., Shrira V. I., Stepanyants Yu. A.* Long nonlinear surface and internal gravity waves in a rotating ocean // *Surveys in Geophysics.* 1998. V. 19, N. 4. P. 289—338.
5. *Holloway P., Pelinovsky E., Talipova T.* A generalised Korteweg—de Vries model of internal tide transformation in the coastal zone // *J. Geophys. Res.* 1999. V. 104, N. 18. P. 333—350.
6. *Пелиновский Е. Н., Полухина О. Е., Лэмб К.* Нелинейные внутренние волны в океане, стратифицированном по плотности и течению // *Океанология.* 2000. Т. 40, № 6. С. 805—815.

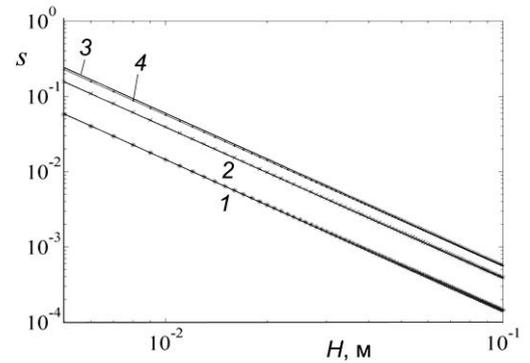


Рис. 3. Зависимость нормированного коэффициента поверхностного натяжения  $s$  от полной глубины жидкости для различных  $\rho_1$  и  $\rho_2$ .  
1 — вода-бензол, 2 — вода-эфир,  
3 — ртуть-вода, 4 — ртуть-спирт.

7. Grimshaw R., Pelinovsky E., Poloukhina O. Higher-order Korteweg—de Vries models for internal solitary waves in a stratified shear flow with a free surface // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2002. V. 9. P. 221—235.
8. Ostrovsky L. A., Stepanyants Y. A. Internal solitons in laboratory experiments: Comparison with theoretical models // *Chaos*. 2005. V. 15. P. 037111-1-28.
9. Apel J., Ostrovsky L. A., Stepanyants Y. A., Lynch J. F. Internal solitons in the ocean and their effect on underwater sound // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V. 121, N. 2. P. 695—722.
10. Kakutani T., Matsuuchi K. Effect of viscosity on long gravity waves // *J. Phys. Soc. Japan*. 1975. V. 39. P. 237—246.
11. Lee Ch.-Y., Beardsley R. C. The generation of long nonlinear internal waves in a weakly stratified shear flows // *J. Geophys. Res.* 1974. T. 79, N. 3. P. 453—457.
12. Kakutani T., Yamasaki N. Solitary waves on a two-layer fluid // *J. Phys. Soc. Japan*. 1978. V. 45, N. 2. P. 674—679.
13. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. М.: Наука, 1982. 335 с.
14. Koop C., Butler G. An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 112. P. 225—251.
15. Djordjevic V. D., Redekopp L. G. The fission and disintegration of internal solitary waves moving over two-dimensional topography // *J. Phys. Oceanogr.* 1978. V. 8, N. 6. P. 1016—1024.
16. Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media // *J. Phys. Soc. Japan*. 1972. V. 33. P. 260—264.
17. Горшков К. А., Островский Л. А., Панко В. В. Взаимодействие и связанные состояния солитонов как классических частиц // *ЖЭТФ*. 1976. Т. 71, вып. 2. С. 585—593.
18. Gorshkov K. A., Ostrovsky L. A., Papko V. V., Pikovskiy A. S. On the existence of stationary multisolitons // *Phys. Lett. A*. 1979. V. 74, N. 3—4. P. 177—179.
19. Kawahara T., Takaoka M. Chaotic motions in oscillatory soliton lattice // *J. Phys. Soc. Japan*. 1988. V. 57, N. 11. P. 3714—3732.



Статья поступила в редакцию 18.02.2014 г.

A. R. Giniyatullin<sup>1</sup>, A. A. Kurkin<sup>1</sup>, O. E. Kurkina<sup>1,2</sup>, Yu. A. Stepanyants<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Nizhny Novgorod State Technical University, Nizhny Novgorod, Russia

<sup>2</sup>National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, Russia

<sup>3</sup>University of Southern Queensland, Toowoomba, Australia

aakurkin@gmail.com

## GENERALIZED KORTEWEG—DE VRIES EQUATION FOR INTERNAL WAVES IN TWO-LAYER FLUID

The derivation of the fifth-order Korteweg—de Vries equation is presented for internal waves in two-layer fluid with surface tension on the interface between the layers. The fluid motion is not supposed to be potential, therefore similar derivation can be used for consideration of wave motion in viscous fluid, in rotated fluid or for the shear flows with nonzero vorticity. Explicit expressions are obtained for the coefficients of the equation depending on the parameters of the background medium: widths of the layers, densities of the fluids, coefficient of surface tension. It is shown that for some combinations of the parameters of background medium the coefficients of the quadratic nonlinear and lowest order dispersive terms in the derived generalized equation can vanish and change their signs. Especially interesting is the situation when these terms become small simultaneously, and the coefficients at the nonlinear dispersive terms are also small. This is possible when the widths of the layers are almost equal. In the vicinity of such a double critical point the derived equation reduces to Gardner-Kawahara equation, which possesses solitary wave solutions with oscillating tails. Such a property makes this equation attractive theoretically and from the point of view of practical applications in the problems of flows in thin surface films of immiscible fluids. The characteristics of the flow in the presence of solitons significantly differ from those in the laminar flows, and this can lead to either negative or positive effects. On the base of the derived generalized equation and its solutions one can propose a method of control over a flow.

**Key words:** two-layer fluid, pycnocline, internal waves, nonpotential flow, surface tension, Korteweg—de Vries equation.