



СОДЕРЖАНИЕ

Статьи

<i>Семенова В.Ю., Тан Хтун Аунг.</i> Определение амплитуд качки судна в условиях мелководья на основании трехмерной теории.....	4
<i>Бестужева А.Н.</i> Пространственная задача о волновых движениях жидкости вокруг конуса.....	14
<i>Сухоруков А.Л.</i> Об использовании амортизирующих и демпфирующих устройств при подъеме груза с большой глубины в условиях волнения моря.....	22
<i>Векслер В.Я.</i> Отработка обводов подводных объектов с использованием компьютерных технологий проектирования для улучшения их гидродинамических характеристик.....	48
<i>Егоров С.К.</i> Исследование влияния удлинения корпуса на ходовые качества торпед и подводных аппаратов.....	58
<i>Лев И.Г., Виноградов Н.И., Нисневич М.З.</i> Об определении коэффициентов гидродинамического сопротивления и оценке характеристик вибрации плохообтекаемых гибких связей по данным морских испытаний.....	68
<i>Байтуганов М.В., Курносов А.А., Рудко А.А.</i> Формирование тактических решений по комплексному применению разнородных средств с учетом гидроакустической совместимости	85

Конференции

Решение X Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики» (ГА-2010).....	92
--	----

Из истории науки

100 лет со дня рождения И.П.Гинзбурга (<i>Акимов Г.А., Максимов В.В.</i>).....	96
--	----

Поздравляем!	102
---------------------------	-----

Хроника	104
----------------------	-----

Правила представления материалов в редакцию.....	109
--	-----

CONTENTS

Articles

- Semenova V.U., Than Htun Aung.* The Determination of the Ship Motion Amplitudes in Shallow Water by Means of the Three-Dimensional Theory..... 4

This paper describes the solution of the problem of the ship motions in regular waves in shallow water by means of the three-dimensional source technique. The unknown velocity potentials are represented with the help of the Green function of three-dimensional pulsating source. Results of the computations of surge, sway, heave, roll, pitch and yaw amplitudes for different depth parameter h/T are presented. Finally, the considerable influence of the shallow water effect on the amplitudes of different motion modes is graphically illustrated and discussed.

Key words: ship motions, shallow water, pulsating source, Green-function, amplitudes, depth of water.

- Bestuzheva A.N.* 3D-Problem of Wave Motion in a Fluid Around a Cone..... 14

Stationary wave motion of an ideal non-compressible fluid in a domain limited by a free surface and an infinite cone with the vertex on a free surface is considered. Wave motion is caused by the bottom movement. The problem is set for the velocity potential within the framework of the linear dispersion theory. By means of integral transforms the solution of the problem is reduced to a functional equation which has a solution in the particular cases. In assumption of smallness of angle between liquid free surface and cone surface analytic solution of the problem which contains dependencies from inclination angle is made.

Key words: linear dispersion theory, waves, ideal fluid, cone.

- Sukhorukov A.L.* On the Use of Shock-Absorbing and Damping Devices for Lifting Loads from Deep Waters under Various Sea States..... 22

Nowadays there is a tendency to development of ever deeper oil and gas fields due to depletion of hydrocarbon reserves onshore. Thus lots of lifting operations have to be carried out during infrastructural development of such fields. The present work, on the basis of Fourier finite integral transformation method, gives solution to the problem of lifting loads from deep waters taking into consideration wave and dissipating processes in lifting ropes. To reduce forces additional shock-absorbing and damping devices are introduced into the system. The effect of these devices on maximum forces realized in the system during the process of load lifting is currently being analysed.

Key words: load lifting, sea state, rope, wave process, shock-absorber, damper, integral transformations.

- Vekslyar V.Ya.* Underwater Object Outline Working-off Using Computer Design Technologies in Order to Improve Their Hydrodynamical Characteristics.... 48

Algorithm is given for development of underwater object outer architecture when design computer technologies are used based on hydrodynamic and hydroacoustic criteria for outline quality evaluation when prototype is not available. Methodology of primary design process of outline shape with choice of the qualifiers is described. Geometrical and mathematical models are developed on the basis of these qualifiers. These models assist in calculation of architectural surfaces being initial information in application programs of hydrodynamics and hydroacoustics, the main purpose is to solve variational design problems.

Key words: underwater object, propulsor, hydrodynamics, hydroacoustic, mathematical model.

<i>Egorov S.K.</i> Investigation of the Effect of Body of Revolution Lengthening on the Propulsion Performance of Torpedoes and Underwater Vehicles.....	58
--	----

The theoretical and numerical research of body of revolution lengthening effect on required power, conditioned by its drag coefficient and drag area, at constant velocity and the constant efficient volume are represented.

Key words: propulsion, the body of revolution, lengthening, specific volume of the power complex.

<i>Lev I.G., Vinogradov N.I., Nisnevich M.Z.</i> On Definition of Hydrodynamic Resistance Factors and Estimation of Vibration Characteristics of Bluff Cables According to Sea Tests.....	68
---	----

Results of data processing of sea tests of bluff cables are described. Approximation of hydrodynamic functions of loading according to aerodynamic tests is specified and values of hydrodynamic factors for straight-line 3-strands and 6-strands steel cables according to tests in water are defined at critical angles of attack. For the cables bent in a stream the empirical formulas are received, allowing to define factors of normal resistance depending on a combination of set tow-parameters. According to tension and configuration of flexible cables in a stream it is offered then to estimate some characteristics of hydroelastic vibration.

Key words: bluff cable, critical angles of attack, cable bent in a stream, set tow-parameters, hydroelastic vibration.

<i>Baituganov M.W., Kurnosov A.A., Rudko A.A.</i> Tactical Solutions Forming of Dissimilar Tools Complex Application Taking into Account Hydroacoustical Compatibility.....	85
---	----

Basic concepts and maintenance methods of hydroacoustic compatibility of dissimilar systems and tools that are placed on one carrier and are functionally united to solve various problems are outlined. Situational approach is suggested to control the complicated underwater object in dynamically changing signal clutter situations.

Key words: hydroacoustic compatibility, complex application, situated management, signal clutter situation.

УДК 532.591

© А.Н.Бестужева

Санкт-Петербургский государственный университет путей сообщения
bes_alla@inbox.ru

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА О ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ ЖИДКОСТИ ВОКРУГ КОНУСА

Рассмотрено установившееся движение идеальной несжимаемой жидкости в области, ограниченной свободной поверхностью и бесконечным конусом с вершиной на свободной поверхности. Волновое движение вызывается перемещением поверхности конуса. Задача ставится для потенциала скорости в рамках линейной дисперсионной теории. С помощью интегральных преобразований решение сводится к функциональному уравнению, которое разрешимо в частных случаях. В предположении малости угла между свободной поверхностью жидкости и поверхностью конуса построено аналитическое решение, которое содержит зависимость возвышения свободной поверхности от угла наклона поверхности конуса.

Ключевые слова: линейная дисперсионная теория, волны, идеальная жидкость, конус.

В классической гидромеханике задачи о поверхностных волнах на поверхности идеальной несжимаемой жидкости до сих пор привлекают внимание исследователей возможностью построения точных решений, среди них выделяется класс, в которых геометрия задачи задается областью переменной глубины. Причина тому – возможные приложения в задачах морской гидротехники и безопасности мореплавания. Вместе с тем эти задачи являются достаточно трудными в отношении явного построения решения.

В приближении волн конечной амплитуды двумерные задачи над наклонным дном достаточно хорошо изучены в работах Л.Н.Сретенского, Д.Стокера, Б.Н.Румянцева и др. Пространственная задача над наклонным дном изучалась в работах А.А.Дорфмана, А.Н.Бестужевой, в которых область переменной глубины заключена между свободной поверхностью и плоским наклонным дном. Дифракция установившихся и неустановившихся гравитационных волн в несжимаемой жидкости в рамках линейно дисперсионной теории достаточно изучена в области бесконечной глубины и в плоском случае. В качестве огибаемого препятствия, как правило, служили вертикальная полуплоскость, погруженная в жидкость бесконечной или конечной глубины, вертикальные круговые и эллиптические цилиндры и вертикальные клинья, а источником образования волн – мгновенно приложенный в некоторой малой области заданной точки свободной поверхности начальный импульс.

В природе часто встречаются объекты (подводные горы, вулканы, мели и др.), надводная часть которых пренебрежимо мала по сравнению с подводной, поэтому объект геометрически можно представить в виде бесконечного конуса, погруженного в бесконечно глубокую жидкость, с вершиной, находящейся на свободной поверхности жидкости. В качестве генератора волнового движения нередко выступают подводные землетрясения, подводные извержения вулканов, отклики от других землетрясений, взрывов и т.п. Такое возмущение можно моделировать колебаниями поверхности конуса.

В рамках линейной дисперсионной теории предполагается, что жидкость является идеальной и несжимаемой, а ее движение безвихревым. Поле скоростей предполагается потенциальным, поэтому движение жидкости определяется уравнением Лапласа для

функции, описывающей потенциал скорости. На свободной поверхности выполняется динамическое условие, а на поверхности конуса – кинематическое.

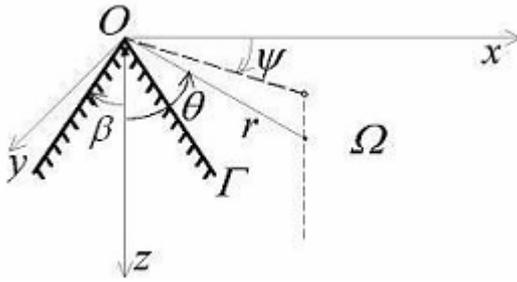


Рис. 1. Схематическое изображение области Ω , занятой жидкостью.

Геометрия задачи следующая. Пусть бесконечный круговой конус с углом раствора β погружен в жидкость таким образом, что его вершина находится на свободной поверхности. Поместим ось x на линии свободной поверхности, ось y направим ей перпендикулярно в горизонтальной плоскости, тогда ось z будет направлена вниз так, чтобы область Ω , занятая жидкостью, определялась неравенствами $0 < z < \infty, x^2 + y^2 \geq z^2 \operatorname{tg}^2 \beta$ (рис. 1). Поверхность конуса предполагается непроницаемой. Угол раствора конуса считается произвольным.

Рассматриваются периодические по времени с частотой σ колебания поверхности жидкости. Потенциал скоростей соответствующего движения имеет вид $\varphi(x, y, z) \exp(i\sigma t)$. В рамках линейной дисперсионной модели [1, 2] краевая задача сводится к уравнению Лапласа для потенциала скорости φ с краевыми условиями смешанного (третьего) типа:

Рассматриваются периодические по времени с частотой σ колебания поверхности жидкости. Потенциал скоростей соответствующего движения имеет вид $\varphi(x, y, z) \exp(i\sigma t)$. В рамках линейной дисперсионной модели [1, 2] краевая задача сводится к уравнению Лапласа для потенциала скорости φ с краевыми условиями смешанного (третьего) типа:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0, & x, y, z \in \Omega, \\ \varphi_z + \frac{\sigma^2}{g} \varphi &= 0, & z = 0, \\ \varphi_n &= f(x, y, z), & (x, y, z) \in \Gamma \end{aligned} \quad (1)$$

где g – ускорение свободного падения, f – функция, характеризующая скорость перемещения поверхности конуса, Γ – граница области, представляющая собой поверхность конуса. Для замыкания задачи вводим условия в нуле и на бесконечности: при $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow 0$ функция φ должна быть ограничена, при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ $\varphi \rightarrow 0$. Целью решения задачи является установление уравнения открытой поверхности жидкости $\eta = -\frac{1}{g} (\varphi \exp(i\sigma t))_t \Big|_{z=0} = -i \exp(i\sigma t) \frac{\sigma}{g} \varphi \Big|_{z=0}$.

Нелинейный характер граничного условия на свободной поверхности делает эту задачу аналитически сложной, так как разделение переменных в этом случае не имеет места. Задачу предлагается решать применением интегральных преобразований. После перехода к сферической системе координат r, ψ, θ выражение (1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} (r^2 \varphi_r)_r + \frac{1}{\sin^2 \theta} \varphi_{\psi\psi} + \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta \cdot \varphi_\theta)_\theta &= 0, \\ \varphi_\theta - r \frac{\sigma^2}{g} \varphi &= 0, & \theta = \frac{\pi}{2}, \\ \varphi_\theta &= r f(r, \psi), & \theta = \beta, \\ \varphi &< \infty, & r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Решение (2) ищем в виде ряда Фурье $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m \cos m\psi$, при этом $f = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \cos m\psi$, тогда для гармоники потенциала скорости φ_m приходим к следующей задаче:

$$(r^2(\varphi_m)_r)_r + \frac{1}{\sin \theta} (\sin \theta (\varphi_m)_\theta)_\theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \varphi_m = 0, \quad (3)$$

$$(\varphi_m)_\theta - r \frac{\sigma^2}{g} \varphi_m = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

$$(\varphi_m)_\theta = r f_m, \quad \theta = \beta. \quad (5)$$

Применим к задаче (3)-(5) интегральное преобразование Меллина $\bar{\varphi}_m = \int_0^{\infty} \varphi_m r^v dr$, тогда уравнение Лапласа (3) приводится к дифференциальному уравнению Лежандра [3]:

$$\frac{d}{ds} \left((1-s^2) \frac{d\bar{\varphi}_m}{ds} \right) + \left[v(v+1) - \frac{m^2}{1-s^2} \right] \bar{\varphi}_m = 0. \quad (6)$$

Здесь $s = \cos \theta$ – новая переменная. Решением уравнения (6) является линейная комбинация присоединенных функций Лежандра первого рода степени v порядка m :

$$\bar{\varphi}_m = M(v) P_v^m(s) + N(v) P_v^m(-s). \quad (7)$$

Граничные условия (4) и (5) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} (\bar{\varphi}_m)_\theta - \frac{\sigma^2}{g} \bar{\varphi}_m (v+1) &= 0, & s &= 0 \\ (\bar{\varphi}_m)_\theta &= \bar{f}_m (v+1), & s &= \cos \beta = \delta \end{aligned}$$

где $\bar{\varphi}_m (v+1) = \int_0^{\infty} \varphi_m r^{v+1} dr$, $\bar{f}_m (v+1) = \int_0^{\infty} f_m r^{v+1} dr$. Наличие переменной r в граничном условии на свободной поверхности приводит в итоге это уравнение к функциональному уравнению.

Из граничных условий, подставляя (7), получим уравнения для нахождения неизвестных функций $M(v)$ и $N(v)$:

$$\begin{cases} N(v) - M(v) = -\frac{\sigma^2}{g} \frac{1}{1+v-m} (N(v+1) + M(v+1)) \\ N(v) = M(v) \frac{(P_v^m(\delta))'}{(P_v^m(-\delta))'} + \frac{\bar{f}_m (v+1)}{\sqrt{1-\delta^2}} \frac{1}{(P_v^m(-\delta))'} \end{cases}$$

Выписывая аналогичное выражение для функции $N(v+1)$, приходим к функциональному уравнению для неизвестной функции $\Psi(v) = \frac{M(v)}{(P_v^m(-\delta))'}$:

$$\Psi(v+1) + \Psi(v) \cdot B(v) = C(v), \quad (8)$$

в котором коэффициенты функционального уравнения $B(v)$ и $C(v)$ зависят от функций

Лежандра и их производных, вычисленных на поверхности конуса, и трансформанты функции, задающей перемещение поверхности конуса:

$$B(v) = \frac{g}{\sigma^2} (1+v-m) \frac{(P_v^m(\delta))' - (P_v^m(-\delta))'}{(P_{v+1}^m(\delta))' + (P_{v+1}^m(-\delta))'}$$

$$C(v) = -\frac{1+v-m}{\sqrt{1-\delta^2}} \frac{1}{(P_{v+1}^m(\delta))' + (P_{v+1}^m(-\delta))'}$$

$$\cdot \left(\frac{g}{\sigma^2} \frac{\bar{f}_m(v+1)}{(P_v^m(-\delta))'} + \frac{1}{1+v-m} \frac{\bar{f}_m(v+2)}{(P_{v+1}^m(-\delta))'} \right).$$

В итоге решение уравнения (6) примет следующий вид:

$$\bar{\varphi}_m = \Psi(v) \left[(P_v^m(-\delta))' P_v^m(s) + (P_v^m(\delta))' P_v^m(-s) \right] + \frac{\bar{f}_m(v+1)}{\sqrt{1-\delta^2}} \frac{P_v^m(-s)}{(P_v^m(-\delta))'}$$

и для амплитуды $\bar{\eta}$ возвышения свободной поверхности $\eta = \bar{\eta} \exp(i\sigma t)$ получим следующее выражение (цель решения исходной задачи (1)):

$$\bar{\eta} = -i \frac{\sigma}{g} \varphi \Big|_{z=0} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\sigma}{g} \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\psi \int_L \frac{1}{r^{v+1}} \bar{\varphi}_m \Big|_{z=0} dv,$$

где путь интегрирования – это прямая $L: -\frac{1}{2} - i\infty, -\frac{1}{2} + i\infty$, а для трансформанты гармоник потенциала скорости на свободной поверхности справедливо следующее выражение:

$$\bar{\varphi}_m \Big|_{z=0} = \Psi(v) P_v^m(0) \left((P_v^m(\delta))' + (P_v^m(-\delta))' \right) + \frac{P_v^m(0)}{(P_v^m(-\delta))'} \frac{\bar{f}_m(v+1)}{\sqrt{1-\delta^2}}.$$

Функциональное уравнение (8) разрешимо в предельных случаях при $\beta \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим случай, когда угол между свободной поверхностью жидкости и поверхностью конуса очень мал ($\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$). Тогда из функционального уравнения (8) можно

найти $\Psi(v) = -\frac{v-m}{2(P_v^m(0))'} \left(\frac{g}{\sigma^2} \frac{\bar{f}_m(v)}{(P_{v-1}^m(0))'} + \frac{1}{v-m} \frac{\bar{f}_m(v+1)}{(P_v^m(0))'} \right)$ и таким образом построить

аналитическое решение исходной задачи: $\bar{\varphi}_m \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{g}{\sigma^2} \bar{f}_m(v),$

$$\bar{\eta} = -\frac{1}{2\pi\sigma} \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\psi \int_L \frac{1}{r^{v+1}} \bar{f}_m(v) dv.$$

Пусть скорость перемещения поверхности описывается функцией $f(x, y, z) = \exp(ibx)$ (ось колебаний поверхности конуса совпадает с осью x), тогда по-

лучим $\bar{f}_m(v) = \frac{C_m 2^v}{b^{v+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+m+v}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+m-v}{2}\right)}$, где $C_m = (-i)^m \begin{cases} 1, m=0 \\ 2, m \geq 1 \end{cases}$. Для амплитуды возвышения

свободной поверхности получим очевидный тривиальный результат (вследствие вырожденности задачи):

$$\bar{\eta} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m J_m(br) \cos m\psi = \exp(ibr \cos \psi),$$

где $J_m(x)$ – функция Бесселя первого рода.

На рис. 2 показаны колебания поверхности конуса в случае, когда скорость колебаний описывается функцией $f(x, y, z) = \cos(bx)$ (а)), и отклик на них на свободной поверхности жидкости (б)). Это стоячие волны.

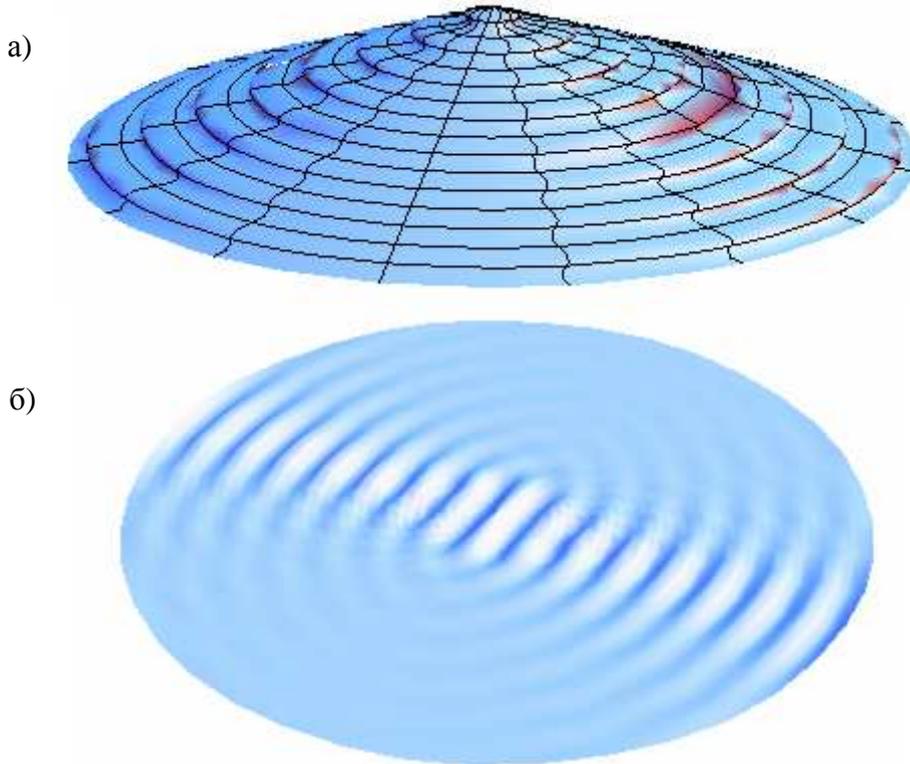


Рис. 2. Картина волнового движения для частного случая перемещения поверхности конуса.

В предельных случаях, когда функциональное уравнение разрешимо, в решении исчезает зависимость от угла. В общем случае функциональное уравнение (8) для произвольного угла раствора конуса пока не решено.

Чтобы получить зависимость возвышения свободной поверхности жидкости от угла раствора конуса, проведем линейризацию уравнения Лапласа по глубине, считая изначально, что угол наклона поверхности конуса к свободной поверхности мал, т.е. угол раствора конуса принимается близким к развернутому углу. Будем искать периодические по времени с частотой σ колебания поверхности жидкости, в этом случае постановка задачи будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0, & x, y, z \in \Omega, \\ \varphi_z + \frac{\sigma^2}{g}\varphi &= 0, & z = 0, \\ \varphi_n &= f(x, y, z), & (x, y, z) \in \Gamma \end{aligned}$$

Проведем осреднение по глубине. В предположении, что угол между свободной поверхностью жидкости и поверхностью конуса мал, проинтегрируем уравнение Лапла-

са по переменной z от нуля до $H(x, y)$: $\int_0^{H(x,y)} \Delta \phi dz = 0$. Принимая $H(x, y) = \alpha r$, где α – угол между свободной поверхностью и поверхностью конуса, в цилиндрических координатах проинтегрированное уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\alpha r \left(\frac{1}{r} (r\phi_r)_r + \frac{1}{r^2} \phi_{\theta\theta} \right) \Big|_0 = (\alpha\phi_r - \phi_z) \Big|_{\alpha r} - (\alpha\phi_r - \phi_z) \Big|_0.$$

Из первого граничного условия имеем $\phi_z \Big|_0 = -\frac{\sigma^2}{g} \phi \Big|_0$, из второго граничного условия $-(\alpha\phi_r - \phi_z) \Big|_{\alpha r} = \phi_n \Big|_{\alpha r} = f \Big|_{\alpha r}$. Подставляя в исходное уравнение, получим

$$\left(\alpha (r\phi_r)_r + \frac{\alpha}{r} \phi_{\theta\theta} + \alpha\phi_r + \frac{\sigma^2}{g} \phi \right) \Big|_0 = f \Big|_{\alpha r}.$$

Уравнение умножим на $-i\frac{\sigma}{g}$ и для новой переменной – амплитуды возвышения свободной поверхности $\bar{\eta} = -i\frac{\sigma}{g} \phi \Big|_{z=0}$ – получим уравнение:

$$\alpha (r\bar{\eta}_r)_r + \frac{\alpha}{r} \bar{\eta}_{\theta\theta} + \alpha\bar{\eta}_r + \frac{\sigma^2}{g} \bar{\eta} = -i\frac{\sigma^2}{g} f \Big|_{\alpha r}.$$

Функцию $\bar{\eta}$ раскладываем в ряд Фурье, вводим новую переменную $\bar{\eta}_m = y_m$ и для новой переменной – компоненты Фурье амплитуды возвышения свободной поверхности – получим неоднородное уравнение из класса дифференциальных уравнений Ломмеля [4]:

$$y_m'' + \frac{2}{r} y_m' + \left(\frac{\sigma^2}{\alpha r g} - \frac{m^2}{r^2} \right) y_m = -i\frac{\sigma}{\alpha r g} f_m \quad (9)$$

Общее решение уравнения (9) строится из общего решения соответствующего однородного уравнения, которое выражается через функции Бесселя, и частного решения, которое строится методом произвольных постоянных:

$$y_m = y_m^{(o)} + y_m^{(ч)},$$

$$\text{Для } m = 0: y_0^{(o)} = \frac{A_0}{\sqrt{r}} J_1 \left(2\sigma \sqrt{\frac{r}{g\alpha}} \right) + \frac{B_0}{\sqrt{r}} Y_1 \left(2\sigma \sqrt{\frac{r}{g\alpha}} \right),$$

$$y_0^{(ч)} = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{r}} \left\{ -J_1 \left(2\sigma \sqrt{\frac{r}{g\alpha}} \right) \int_0^r \sqrt{r} Y_1 \left(2\sigma \sqrt{\frac{r}{g\alpha}} \right) f_m \Big|_{\alpha r} dr + Y_1 \left(2\sigma \sqrt{\frac{r}{g\alpha}} \right) \int_0^r \sqrt{r} J_1 \left(2\sigma \sqrt{\frac{r}{g\alpha}} \right) f_m \Big|_{\alpha r} dr \right\}.$$

$$\text{Для } m = 1, 2, \dots y_m^{(o)} = \frac{A_m}{\sqrt{r}} J_\nu \left(2\sigma \sqrt{\frac{r}{g\alpha}} \right) + \frac{B_m}{\sqrt{r}} J_{-\nu} \left(2\sigma \sqrt{\frac{r}{g\alpha}} \right),$$

$$y_m^{(4)} = \frac{\pi}{\alpha\sqrt{r} \sin \pi\nu} \left\{ -J_\nu \left(2\sigma\sqrt{\frac{r}{g\alpha}} \right) \int_0^r \sqrt{r} J_{-\nu} \left(2\sigma\sqrt{\frac{r}{g\alpha}} \right) f_m \Big|_{\alpha r} dr + \right. \\ \left. + J_{-\nu} \left(2\sigma\sqrt{\frac{r}{g\alpha}} \right) \int_0^r \sqrt{r} J_\nu \left(2\sigma\sqrt{\frac{r}{g\alpha}} \right) f_m \Big|_{\alpha r} dr \right\},$$

где $\nu = \sqrt{1+4m^2}$.

Выражение $y_m^{(0)}$ описывает свободные волны. Так как целью исследования является определение вынужденных волн, вызываемых колебаниями поверхности конуса, то к граничным и начальным условиям требуется присоединить так называемое условие излучения, состоящее в том, чтобы возмущенные волны расходились от препятствия. Очевидно, вынужденные волны должны распространяться в наружную сторону. Математическим выражением этого условия излучения или «условия уходящей фазы» являются предельные равенства [5, 6]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(y_m^{(0)} - i \frac{\sigma^2}{g} y_m^{(0)} \right) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} y_m^{(0)} = 0.$$

В силу этих условий $A_m = B_m = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$

В итоге выпишем аналитическое решение задачи для амплитуды возвышения свободной поверхности, опустив аргумент $2\sigma\sqrt{\frac{r}{\alpha g}}$ у функций Бесселя:

$$\bar{\eta} = \frac{\sigma}{\alpha g} \frac{\pi}{\sqrt{r}} i \left\{ J_1 \int_0^r \sqrt{r} Y_1 f_0 \Big|_{\alpha r} dr - Y_1 \int_0^r \sqrt{r} J_1 f_0 \Big|_{\alpha r} dr - \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\theta}{\sin \pi\nu} \left[J_\nu \int_0^r \sqrt{r} J_{-\nu} f_m \Big|_{\alpha r} dr - J_{-\nu} \int_0^r \sqrt{r} J_\nu f_m \Big|_{\alpha r} dr \right] \right\}. \quad (10)$$

Для функции перемещения поверхности конуса в виде $f = \exp(ibx)$ выражение (10) выглядит следующим образом:

$$\bar{\eta} = \frac{\sigma}{\alpha g} \frac{\pi}{\sqrt{r}} i \left\{ J_1 \int_0^r \sqrt{r} Y_1 J_0(br) dr - Y_1 \int_0^r \sqrt{r} J_1 J_0(br) dr - \right. \\ \left. - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos m\theta}{\sin \pi\nu} i^m \left[J_\nu \int_0^r \sqrt{r} J_{-\nu} J_m(br) dr - J_{-\nu} \int_0^r \sqrt{r} J_\nu J_m(br) dr \right] \right\}. \quad (11)$$

Полученное в аналитическом виде решение задачи содержит зависимость от угла наклона поверхности конуса к свободной поверхности нелинейным образом, входя в аргументы функций Бесселя $J_1, Y_1, J_\nu, J_{-\nu}$.

Асимптотическое поведение нулевой гармоники при $r \rightarrow 0$ определяется выражением $\frac{\sqrt{r}}{2\pi} + o(r^{7/2})$.

Чтобы проиллюстрировать полученные результаты, ограничимся рассмотрением нулевой гармоники амплитуды возвышения свободной поверхности в выражении (11).

На рис. 3 представлена картина зависимости амплитуды возвышения свободной поверхности от угла наклона между поверхностью конуса и свободной поверхностью. Углы были выбраны $\alpha = 3^\circ, 6^\circ, 18^\circ$. Графики представлены на «срезе», проекции вдоль оси x .

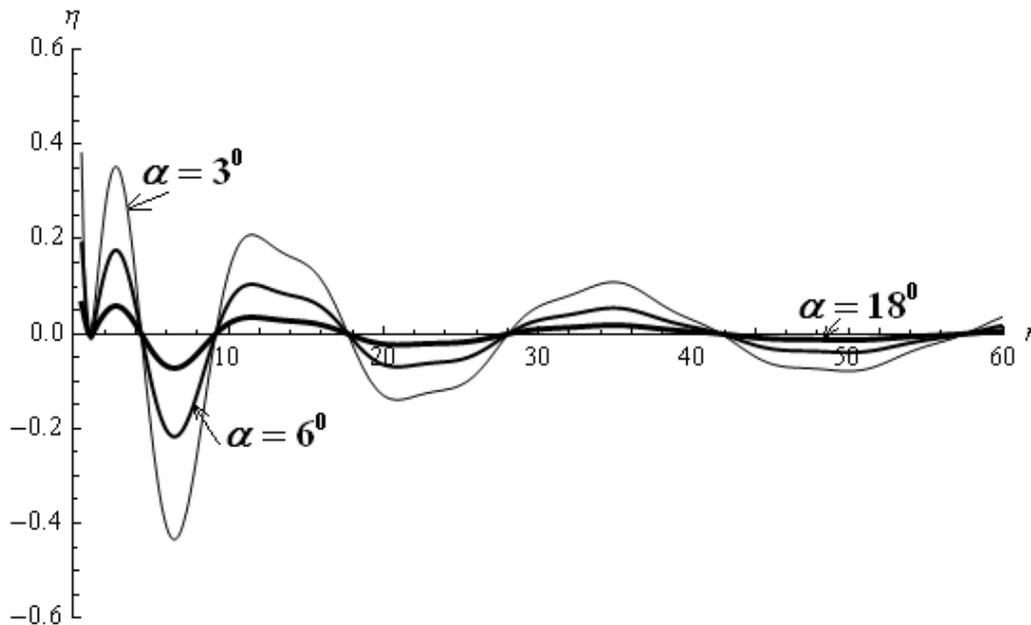


Рис. 3. Зависимость амплитуды возвышения свободной поверхности от угла между поверхностью конуса и свободной поверхностью.

Амплитуда уменьшается с возрастанием угла, так как отклик жидкости слабеет с увеличением расстояния между свободной поверхностью и поверхностью конуса. Видно, что с увеличением угла отклик свободной поверхности на возмущение дна уменьшается. Узлы стоячих волн не меняются, хотя угол входит в аргументы функций Бесселя, но их комбинация дает одинаковые корни. Кривая, описывающая возвышение свободной поверхности, не имеет четко выраженной периодичности, на что влияет, в первую очередь, наличие наклонного дна. Зависимость отлична от строго обратной линейной.

Чем меньше расстояние от поверхности конуса до свободной поверхности, тем больше отклик. С увеличением расстояния от вершины конуса происходит уменьшение влияния возмущения поверхности конуса на волновое движение жидкости на свободной поверхности. Структура (наличие наклона) поверхности конуса искажает картину волнового движения. При численном моделировании особая точка (вершина конуса) и ее малая окрестность исключались из расчетов.

Литературы

1. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
2. Стокер Д.Д. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966. 296 с.
5. Кочин Н.Е. Собр. соч. Том 2. М.Л., 1949. С.105-182, 277-304.
6. Алешков Ю.З. Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: ЛГУ, 1981. 196 с.

Статья поступила в редакцию 30.05.2010 г.

