НАУЧНЫЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 534.23

И.С.Ракитина[1], *Д.Л.Тарасов*[1]

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ В БЕЗГРАНИЧНОЙ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ ВОДНОЙ СРЕДЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрена задача моделирования процесса распространения волны звукового давления, создаваемой точечным источником в неограниченной неоднородной жидкой среде, скорость звука в которой непрерывно изменяется по координате и имеет минимум. Приведены результаты аналитического решения, полученные с помощью метода возмущений.

В практических приложениях часто возникают задачи, требующие расчета акустических полей, создаваемых источниками звука в неоднородной жидкой среде. Многие вопросы, касающиеся поля, возбуждаемого точечным источником звука в слоистой среде, исследованы достаточно подробно [1]. Задача отражения плоских монохроматических звуковых волн от непрерывно-слоистых сред рассмотрена в обширной литературе, в том числе в монографиях [1, 2]. Обзор методов математического моделирования звуковых полей в слоистом океане дан в работах [3, 4]. Автором статей [5, 6] разработана модель для описания акустических полей в горизонтально-неоднородной океанской среде, в том числе с существенными неоднородностями. Метод решения волнового уравнения для случая двухслойной среды с непрерывно изменяющейся по координате скоростью звука при переходе из слоя в слой представлен в [7, 8].

Как правило, в литературе рассматриваются гармонические волновые поля [2–6, 9]. В рамках гармонических процессов удается исследовать многие закономерности распространения звука в океане. Однако при таком ограничении не учитывается ряд особенностей акустических полей, которые могут иметь большое практическое значение.

В настоящей работе рассмотрена математическая модель процесса распространения волны звукового давления, создаваемого точечным источником в неоднородной неограниченной жидкой среде. На основе методических положений [7] получено аналитическое решение волнового уравнения для случая, когда скорость звука в среде имеет минимум, что достаточно часто встречается в реальных условиях.

Поставленная задача решалась при помощи метода возмущений, который многими авторами используется при моделировании звуковых полей в подводной акустике [10–13].

Рассматривался точечный источник, имеющий координаты $r = 0$, $z = z_0$. Плотность среды предполагалась постоянной. Поле давления, создаваемое источником, определялось следующей задачей Коши:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2(z)\Delta p + \frac{f(t)\delta(r)}{r}\delta(z - z_0), \tag{1}$$

$$p|_{t=0} = 0; \ \frac{\partial p}{\partial t}|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

---

[1] Институт машиноведения им.А.А.Благонравова Российской академии наук (Москва)

где $p = p(r,z,t)$ – звуковое давление; $c(z)$ – скорость звука в среде; Δ – оператор Лапласа; t – время; функция $f(t)$ выражает интенсивность источника, причем $f(t)=0$ при $t \le 0$.

Распределение скорости звука в среде задавалось формулой:

$$\frac{c_0^2}{c^2(z)} = 1+\varepsilon e^{-bz}(1+e^{-bz})^{-2}, \text{ где } 0<\varepsilon<<1. \tag{3}$$

Тогда

$$\frac{c^2(z)}{c_0^2} = 1-\varepsilon e^{-bz}(1+e^{-bz})^{-2} + O(\varepsilon^2).$$

Легко убедиться, что функция $g(z)=e^{-bz}\cdot(1+e^{-bz})^{-2}$ четная, т.е. $g(-z)=g(z)$. При больших значениях $|z|$ скорость звука стремится к постоянным значениям: $c^2(z)\to c_0^2$ при $z\to\pm\infty$. При $z=0$ функция $c^2(z)$ имеет минимум. Таким образом, неоднородность среды сосредоточена в некотором слое в окрестности $z=0$. С точностью до членов второго порядка малости $O(\varepsilon^2)$ скорость звука $c(z)=c_0(1-\varepsilon g(z)/2)$. Параметр ε определяет значение минимума этой функции: $c_{\min}=c_0(1-\varepsilon/8)$; коэффициент b характеризует масштаб неоднородности и градиент скорости звука выше и ниже плоскости $z=0$. Зависимость скорости звука c (в м/с) от безразмерной координаты bz для c_0 =1500 м/с и $\varepsilon = 0,01$ приведена на рис. 1.

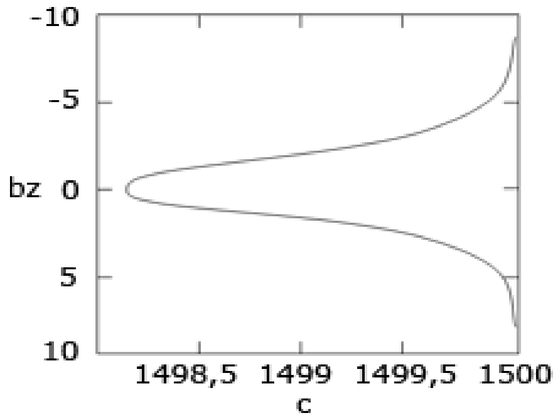

Рис.1. График скорости звука

Решение задачи (1), (2) ищем в виде:

$$p(r,z,t)=p_0(r,z,t)+\varepsilon p_1(r,z,t), \tag{4}$$

где $p_0(r,z,t)$ – звуковое давление в отсутствии неоднородностей.

Подставив выражения (3) и (4) в волновое уравнение (1), получим:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(p_0+\varepsilon p_1)+\frac{\varepsilon}{c_0^2}g(z)\frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2}=\Delta p_0+\varepsilon\Delta p_1+\frac{f(t)}{c_0^2 r}(1+\varepsilon g(z))\delta(r)\delta(z-z_0)+O(\varepsilon^2).$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях ε и пренебрегая $O(\varepsilon^2)$, имеем:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2}=\Delta p_0+\frac{f(t)}{c_0^2 r}\delta(r)\delta(z-z_0); \tag{5}$$

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}=\Delta p_1+\frac{f(t)}{c_0^2 r}g(z_0)\delta(r)\delta(z-z_0)-\frac{1}{c_0^2}g(z)\frac{\partial^2 p_0}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Начальные условия принимают вид при $t=0$ $p_0=0$; $\frac{\partial p_0}{\partial t}=0$; $p_1=0$; $\frac{\partial p_1}{\partial t}=0$.

Считаем, что при $z\to\pm\infty$ или $r\to\infty$ выполнимо:

$$p_0\to 0 \text{ и } p_1\to 0. \tag{7}$$

Применим интегральные преобразования Лапласа и Ганкеля:

$$V_i(s,z,q)=\int_0^{\infty}(\int_0^{\infty}p_i e^{-qt}dt)J_0(sr)rdr\,;\;\; i=0,1,$$

где $V_i(s,z,q)$ – образ функции $p_i(r,z,t)$; q – переменная преобразования Лапласа; s – переменная преобразования Ганкеля; J_0 – функция Бесселя нулевого порядка.

Тогда с учетом (5), (6) для $V_0=V_0(s,z,q)$ и $V_1=V_1(s,z,q)$ можно получить следующие уравнения:

$$V_0''-(\frac{q^2}{c_0^2}+s^2)V_0=-\frac{F(q)}{c_0^2}\delta(z-z_0)$$

$$V_1''-(\frac{q^2}{c_0^2}+s^2)V_1=-\frac{F(q)}{c_0^2}g(z_0)\delta(z-z_0)+\frac{q^2V_0}{c_0^2}g(z)\,,$$

где $F(q)$ – образ функции $f(t)$; дифференцирование ведется по переменной z.

Учитывая условия (7), получаем:

$$\lim_{z\to\pm\infty}V_0=0;\;\lim_{z\to\pm\infty}V_1=0\,.$$

Тогда решение $V_0(s,z,q)$, затухающее на бесконечности, имеет вид:

$$V_0(s,z,q)=\frac{F(q)}{2c_0^2a}\cdot e^{-a|z-z_0|},$$

где $a=\sqrt{\frac{q^2}{c_0^2}+s^2}$; $\mathrm{Re}\,a>0$.

Решение $V_1=V_1(s,z,q)$ можно представить в виде:

$$V_1=V_{11}+V_{12}\,,$$

где $V_{11}=V_{11}(s,z,q)$ и $V_{12}=V_{12}(s,z,q)$ определяются из уравнений:

$$V_{11}''-a^2V_{11}=-\frac{F(q)}{c_0^2}g(z_0)\delta(z-z_0)\,,\; V_{12}''-a^2V_{12}=\frac{q^2}{c_0^2}V_0(s,z,q)g(z)$$

(дифференцирование также ведется по переменной z), причем

$$\lim_{z\to\pm\infty}V_{11}=0\,;\;\;\lim_{z\to\pm\infty}V_{12}=0\,.$$

Тогда

$$V_{11}(s,z,q)=\frac{F(q)}{2c_0^2}g(z_0)e^{-a|z-z_0|};$$

$$V_{12}(s,z,q)=-\frac{q^2F(q)}{4c_0^4a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a(|x-z_0|+|x-z|)}g(x)dx\,.$$

Применяя обратные преобразования Лапласа и Ганкеля к функции $V_0(s,z,q)$, можно получить выражение для звукового давления в однородном пространстве:

$$p_0=\frac{1}{2c_0^2}\cdot\frac{f(t-\frac{R}{c_0})}{R}\,,\text{ где } R=\sqrt{r^2+(z-z_0)^2}\,. \qquad (8)$$

Обозначим через $p_{11}=p_{11}(r,z,t)$ и $p_{12}=p_{12}(r,z,t)$ оригиналы от $V_{11}(s,z,q)$ и $V_{12}(s,z,q)$ соответственно.

Используя результат (8) и замечая, что $V_{11}(s,z,q)=V_0(s,z,q)g(z_0)$, получаем

$$p_{11}=p_0 g(z_0)=\frac{g(z_0)}{2c_0^2}\cdot\frac{f(t-\frac{R}{c_0})}{R}.$$

Аналогично [7] можно найти

$$p_{12}=-\frac{1}{4c_0^3}\int\limits_0^t\frac{f''(t-\tau)}{\sqrt{(c_0\tau)^2-r^2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sigma(\tau-\frac{\sqrt{r^2+(|x-z_0|+|x-z|)^2}}{c_0})g(x)\,dx\,d\tau,$$

где $\sigma(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$.

Обозначим

$$I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sigma(\tau-\frac{\sqrt{r^2+(|x-z_0|+|x-z|)^2}}{c_0})g(x)\,dx.$$

Пусть $z>z_0$. Разбивая промежуток интегрирования на интервалы $(-\infty,z_0)$, (z_0,z) и $(z,+\infty)$, раскрывая модули и рассматривая соответствующий интеграл на каждом интервале, находим:

$$I=\frac{1}{b}(\frac{1}{1+e^{-b\alpha_1}}-\frac{1}{1+e^{-b\alpha_2}}),$$

где $\alpha_1=\frac{z+z_0+\sqrt{(c_0\tau)^2-r^2}}{2}$, $\alpha_2=\frac{z+z_0-\sqrt{(c_0\tau)^2-r^2}}{2}$, причем $(c_0\tau)^2>r^2+(z-z_0)^2$.

При $z<z_0$ можно получить тот же результат. Тогда

$$p_{12}=\frac{1}{4c_0^3 b}\int\limits_0^t\frac{f''(t-\tau)}{\sqrt{(c_0\tau)^2-r^2}}(\frac{1}{1+e^{-b\alpha_2}}-\frac{1}{1+e^{-b\alpha_1}})\sigma(\tau-\frac{R}{c_0})d\tau.$$

Требование $(c_0\tau)^2>r^2+(z-z_0)^2$ означает, что возмущение в точке с координатами (r,z) существует начиная с момента времени τ, необходимого для того, чтобы волна давления дошла от источника до рассматриваемой точки.

Таким образом, в рамках первого приближения теории возмущений получено аналитическое выражение для звукового давления, создаваемого точечным источником в неограниченной среде с непрерывно изменяющейся по одной из координат и имеющей минимум скоростью звука. Данные результаты могут применяться при моделировании акустических полей в неоднородных жидких средах.

Summary

A mathematical model of sound wave propagation from a point source in the unbounded inhomogeneous fluid with a coordinate – depended and having a minimum sound speed is considered. Results of analytical treatment using perturbation method are given.

Литература

1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Бреховских Л.М., Годин О.А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 411 с.
3. *Булдырев В.С., Буслаев В.С.* Применение аналитических и численных методов в задачах распространения звука в океане // Акустические волны в океане. М.: Наука, 1987. С.24–34.
4. *Мальцев Н.Е.* Математическое моделирование звуковых полей в океане // Акустика океана. Современное состояние. М.: Наука, 1982. С.5–24.

5. *Гулин О.Э.* Об уравнениях первого порядка для исследования акустических полей океана с существенными горизонтальными неоднородностями // ДАН. 2005. Т.400. №4. С.542–545.
6. *Гулин О.Э.* Причинные уравнения первого порядка для моделирования волновых полей в горизонтально неоднородном океане // Акуст.журн. 2006. Т.52. № 1. С.23–29.
7. *Козловский В.А.* Моделирование давления волнового поля в стратифицированной неограниченной среде // Методы и средства анализа случайных пространственно-временных полей: Сб.науч.тр. Львов: ВНИИМИУС, 1983. С.10–19.
8. *Козловский В.А.* Расчет волнового поля в полубесконечной неоднородной среде // Методы и средства анализа случайных пространственно-временных полей: Сб.науч.тр. Львов: ВНИИМИУС, 1983. С.20–24.
9. *Ракитина И.С., Тарасов Д.Л.* К вопросу о моделировании акустического поля, создаваемого протяженным излучателем // Естеств. и техн.науки. 2007. № 4. С.106–108.
10. *Де Санто Дж.А.* Теоретические методы в акустике океана // Акустика океана / Пер. с англ. Под ред. Дж.А.Де Санто. М.: Мир, 1982. С.16–90.
11. *Буров В.А., Сергеев С.Н.* Современные методы теории возмущений при расчете гидроакустических полей // Вестн. МГУ. Сер.3. 1992. Т.33. № 2. С.49–56.
12. *Загаецкая Е.А., Кравцов Ю.А., Кудин Г.И.* Метод возмущений для лучей в океаническом волноводе с неровным дном // Акуст. журн. 1994. Т.40. № 3. С.396–400.
13. *Santaniello S.R., Di Napoli F.R., Dullea R.W., Herstein P.D.* Studies on the interaction of low-frequency acoustic signals with the ocean bottom // Geophysics. 1979. Vol.44. P.1922–1936.

Статья поступила в редакцию 12.10.2007 г.