УДК 538.56:519.25

В.И.Клячкин [1]

ВЕРОЯТНОСТНАЯ СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ГИДРОФИЗИКИ И ГИДРОАКУСТИКИ

В работе исследуется вероятностная структура решений некоторых нелинейных стохастических уравнений как динамической базы формирования статистик на основе использования функциональных методов. Первоначально формируется общая методология определения характеристических функционалов (ХФ) решений нелинейной динамической задачи в терминах ХФ сторонних воздействий (источников). Метод используется для построения статистик решений [функционалов плотностей вероятности (ФПВ)] для определенного класса нелинейных уравнений, заданных в пространственно-временной области и подчиненных условиям причинности. Затем метод распространяется на одномерное нелинейное волновое уравнение. В итоге конструируются аналитические формы для ХФ [ФПВ] решений в терминах ХФ [ФПВ] сторонних случайных источников для гидрофизических и гидроакустических каналов передачи информации.

При построении вероятностных характеристик случайных процессов или полей основной задачей, как известно, является вычисление многомерных функций распределения. При использовании таких характеристик для построения оптимальных систем основная трудность состоит – поскольку, как правило, функции распределения на входе системы обработки неизвестны – в учете статистических свойств канала распространения информации. Установление законов трансформации функций распределения источников поля, статистика которых должна быть известной, открывает один из путей преодоления трудностей при построении вероятностной модели входных воздействий, разумеется, при этом задача определения статистик источников выдвигается на первый план как априорное звено для придания всей задаче необходимых для ее решения свойств замкнутости. Однако в ряде случаев – в том числе и в условиях практики – статистика источников может быть изучена экспериментально. Выполнить же подобный эксперимент уже после прохождения поля через канал весьма затруднительно, ибо при этом приходится считаться с различными – статистическими по своей природе – условиями распространения.

Теория же статистических решений, во всей ее общности, опирается именно на информацию о вероятностной структуре входных воздействий; таким образом, выделяя часть задачи о трансформации вероятностных моделей источника, мы создаем удобную основу для практического использования теории статистических решений в целях синтеза оптимальных систем на базе использования рациональных вероятностных моделей источника, порождающего поле.

Методы, основанные на использовании аппарата характеристических функционалов, как это будет показано ниже, открывают определенные возможности для решения подобных задач во многих практически интересных случаях.

Ниже этот подход – в развитие результатов работ [1–4] – будет проиллюстрирован на примере анализа вероятностных структур (характеристических функционалов (ХФ) или исследования функционалов плотности вероятности (ФПВ)), полученных для решений некоторого класса нелинейных стохастических уравнений, которые создают динамическую основу для формирования статистик.

[1] ОАО «Концерн «Океанприбор» (Санкт-Петербург)

1. ХФ для нелинейного оператора. Рассмотрим уравнение:

$$Z_{\bar{x}}\xi(\bar{x}) = q(\bar{x}), \tag{1}$$

где $\bar{x}[\bar{\rho},t]$ – четырехмерный вектор пространства-времени.

Уравнение (1), очевидно, можно рассматривать как некоторое отображение $q \Rightarrow \xi$, которое может содержать неизвестные случайные параметры, т.е. $\hat{Z}_{\bar{x}} \to \hat{Z}_x\left[\bar{Y}_Z\right]$; $q(\bar{x}) \to q\left(\bar{x}\bar{Y}_q\right)$, где $\bar{Y}_Z$ и $\bar{Y}_q$ – вектора параметров (вообще говоря, неизвестных) оператора распространения $\hat{Z}$ и источника q.

При такой постановке возникает задача статистической оценки, вообще говоря, случайных параметров $\Delta_к$, Δ_q, которая также ставится на базе анализа вероятностных свойств поля $\xi(\bar{x}) \Rightarrow \xi\left(\bar{x}/\Delta_к, \Delta_q\right)$, управляемых через (1) параметрами $\Delta_к$, Δ_q (индексы: «к» – канал распространения информации; «q» – источник поля).

В (1) $Z_{\bar{x}}$ – некоторый нелинейный оператор, определяющий динамику задачи; ξ, q – поля случайной природы. Случайное поле q зададим через его характеристический функционал:

$$Q[\alpha] = \left\langle \exp i\left(\alpha^{\mathrm{T}}, q\right)\right\rangle,$$

где $\left(\alpha^{\mathrm{T}}, q\right)$ – скалярное произведение на $D_{\bar{x}}$ пространстве $[\bar{x}] \equiv [\bar{\rho}, t]$; Т – символ транспонирования.

Задача состоит в определении ХФ поля ξ. Обратный оператор $Z_{\bar{x}}^{-1}$, т.е. решение уравнения (1)

$$\xi(\bar{x}) = Z_{\bar{x}}^{-1} q(\bar{x}) \tag{2}$$

считается существующим, но не обязательно известным.

Этот момент является принципиальным, поскольку в классической теории вероятностей при решении задачи связи ФПВ заданной функции некоторого случайного аргумента (процесса, поля) и ФПВ собственно аргумента требуется, как известно, знание обратной функции выбранного отображения.

Для уравнения (1) связь случайных решений ξ и случайных источников q приобретает смысл обратной задачи. Очевидно, эта связь требует знания обратного оператора Z^{-1}, т.е. полного решения нелинейного уравнения (1), что возможно, как известно, только для ряда частных случаев. При этом решения динамических обратных задач являются неустойчивыми и требуют использования процедуры регуляризации [10].

Тем самым постановка задачи в данной работе как прямой задачи трансформации вероятностных свойств решения ξ и источника q для отображения (1) приобретает определенную актуальность, в том числе и как база для прикладных задач (например, для систем байесова типа, осуществляющих обнаружение слабых сигналов и оценку их неизвестных параметров). В целях анализа (1) как динамического условия связи случайных полей ξ и q введем совместный ХФ полей ξ и q:

$$\theta[\varepsilon, \rho] = \left\langle \exp i\left[\left(\varepsilon^{\mathrm{T}}, \xi\right) + \left(\rho^{\mathrm{T}}, q\right)\right]\right\rangle,$$

где $(\bullet,\bullet)$ – скалярное произведение в области V, и

$$\langle \ldots \rangle = \iint \ldots W_{\xi,q}[s,\sigma]\, d\Gamma(s)\, d\Gamma(\sigma),$$

где $W_{\xi,q}[\bullet,\bullet]$ – функционал совместной плотности вероятности полей ξ и q; s и σ – реализации полей ξ и q.

Из (1):

$$W_{\xi,q}[s,\sigma]=W_{\xi/q}[s/\sigma]W_q[\sigma]=D\left[s-Z_{\bar{x}}^{-1}\sigma\right]W_q[\sigma]. \quad (3)$$

Очевидно, из (3) следует ($D[\bullet]$ – континуальный дельта функционал [1–3]):

$$W_\xi[s]=\int\limits_{D_\sigma} D\left[s-Z_{\bar{x}}^{-1}\sigma\right]W_q[\sigma]d\Gamma(\bar{\sigma}). \quad (4)$$

Из вида (4) вытекает, что условная плотность вероятности (УПВ) $W_{\xi/q}[s/\sigma]$ осуществляет функциональную фильтрацию решений уравнений (1), (2) на пространстве источников D_q, и в силу этого конструкция $D\left[s-Z_{\bar{x}}^{-1}\sigma\right]$ играет роль дисперсионного уравнения, связывающего поля ξ и q.

Исследование дисперсионных свойств стохастических уравнений типа (1) представляет собой самостоятельную задачу. $W_{\bullet/\bullet}[\bullet/\bullet]$ – функционал условной плотности вероятности (ФУПВ).

Отсюда

$$\theta[\varepsilon,\rho]=\left\langle \exp i\left[\left(\varepsilon^{\mathrm{T}},Z_{\bar{x}}^{-1}\sigma\right)+\left(\rho^{\mathrm{T}},\sigma\right)\right]\right\rangle$$

или

$$\theta[\varepsilon,\rho]=\left\langle \exp i\left[\left(s^{\mathrm{T}},\varepsilon\right)+\left(\rho^{\mathrm{T}},\sigma\right)\right]\right\rangle, \quad (5)$$

где $\theta[\bullet,\bullet]$ – совместный характеристический функционал полей s,σ.

Очевидно,

$$\theta[0,\rho]=Q[\rho];\ \ \theta[\varepsilon,0]=\Psi[\varepsilon], \quad (6)$$

где $Q[\rho]$ – ХФ поля q; $\Psi[\varepsilon]$ – ХФ поля ξ.

Из (1), (5) вытекает (см. [1–4]):

$$Z_{\bar{x}}\left[-i\frac{\delta}{\delta\varepsilon(\bar{x})}\right]\theta[\varepsilon,\rho]=-i\frac{\delta}{\delta\rho(\bar{x})}\theta[\varepsilon,\rho]. \quad (7)$$

Например, для уравнения вида

$Z_{\bar{x}}'\xi+\sum\limits_k \alpha_k\xi^k=q$, ($Z_{\bar{x}}'$ – линейный оператор).

Оператор $Z_{\bar{x}}$ в (7) примет вид:

$$-iZ_{\bar{x}}'\frac{\delta}{\delta\varepsilon(\bar{x})}+\sum_k \alpha_k(-i)^k\frac{\delta^k}{\delta\varepsilon^k(\bar{x})}.$$

Ищем решение (7) в виде континуального интеграла:

$$\theta[\varepsilon,\rho]=\int\limits_{D_\mu}\theta_1[\mu,\rho]\exp i\left(\mu^{\mathrm{T}},\varepsilon\right)d\Gamma(\mu). \quad (8)$$

Подстановка (8) в (7) дает:

$$iZ_{\bar{x}}\mu(\bar{x})=\frac{\delta}{\delta\rho(\bar{x})}\ln\theta_1[\mu,\rho]. \quad (9)$$

Откуда

$$\theta_1[\mu,\rho]=\theta_0[\mu]\exp i\left(\rho^{\mathrm{T}},Z_{\bar{x}}\mu\right),$$

где $\theta_0[\mu]$ – неизвестный функционал.

Из (8) и (9) следует:

$$\theta[\varepsilon,\rho]=\int\limits_{D_\mu}\theta_0[\mu]\exp i\left[\left(\varepsilon^{\mathrm{T}},\mu\right)+\left(\rho^{\mathrm{T}},Z_{\bar{x}}\mu\right)\right]d\Gamma(\mu). \quad (10)$$

Из (6) имеем:

$$\Psi[\varepsilon]=\theta[\varepsilon,0]=\int\limits_{D_\mu}\theta_0[\mu]\exp i\left(\varepsilon^{\mathrm{T}},\mu\right)d\Gamma(\mu).$$

По определению ХФ отсюда получим:

$$\theta_0[\mu] = W_\xi[\mu]. \tag{11}$$

Из (3) альтернативно следует:

$$\theta_0[\mu] = W_\xi[\mu] = \int_{D_\sigma} W_{\xi,q}[s,\sigma] d\Gamma(\sigma) = \int_{D_\sigma} D\left[s - Z_{\bar{x}}^{-1}\sigma\right] W_q[\sigma]\, d\Gamma(\sigma). \tag{12}$$

Использование этой формулы затруднительно, т.к. явный вид обратного оператора $Z_{\bar{x}}^{-1}$, как отмечалось выше, может быть неизвестен. Однако отметим, что анализ (12) при отображении

$$Z_{\bar{x}}^{-1}\sigma = \zeta \tag{13}$$

связывает функционал $\theta_0[\bullet]$* в (12) с якобианом $J[\bullet]$ преобразования (13), построение которого хотя принципиально возможно (для некоторого класса нелинейных уравнений), но для достаточно общего уравнения (1) встречает значительные трудности (неизвестна форма $Z_{\bar{x}}^{-1}$, поскольку недостаточно развиты общие методы решения нелинейных задач).

Поэтому, продолжая анализ, из (10) и (11) получим:

$$\theta[\varepsilon,\rho] = \int_{D_\mu} W_\xi[\mu] \exp i\left[\left(\varepsilon^{\mathrm{T}},\mu\right) + \left(\rho^{\mathrm{T}}, Z_{\bar{x}}\mu\right)\right] d\Gamma(\mu).$$

Отсюда

$$Q[\rho] \equiv \theta[0,\rho] = \int_{D_\mu} W_\xi[\mu] \exp i\left(\rho^{\mathrm{T}}, Z_{\bar{x}}\mu\right) d\Gamma(\mu). \tag{14}$$

Будем рассматривать (14) как континуальное интегральное уравнение относительно $W_\xi[\mu]$. Ищем решение в форме ($\Psi[v]$ неизвестен):

$$W_\xi[\mu] = \int_{D_v} \Psi[v] \exp - i\left(v^{\mathrm{T}}, Z_{\bar{x}}\mu\right) d\Gamma(v). \tag{15}$$

Подставим (15) в (14):

$$Q[\rho] = \int_{D_v} \Psi[v] \int_{D_\mu} \exp i\left((\rho - v)^{\mathrm{T}}, Z_{\bar{x}}\mu\right) d\Gamma(\mu) d\Gamma(v). \tag{16}$$

Обозначим:

$$R[\rho - v] = \int_{D_\mu} \exp i\left((\rho - v)^{\mathrm{T}}, Z_{\bar{x}}\mu\right) d\Gamma(\mu). \tag{17}$$

Тогда из (16) следует:

$$Q[\rho] = \int_{D_v} \Psi[v] R[\rho - v]\, d\Gamma(v). \tag{18}$$

Введем Фурье-преобразования:

$$Q[\rho] = \int_{D_\eta} \tilde{Q}[\eta] \exp i\left(\eta^{\mathrm{T}}, \rho\right) d\Gamma(\eta),$$

$$\Psi[v] = \int_{D_\eta} \tilde{\Psi}[\eta] \exp i\left(\eta^{\mathrm{T}}, v\right) d\Gamma(\eta),$$

$$R\left[\xi'\right] = \int_{D_\eta} \tilde{R}[\eta] \exp i\left(\eta^{\mathrm{T}}, \xi'\right) d\Gamma(\eta). \tag{19}$$

Из (18) получаем:

$$\tilde{Q}[\eta] = 2\pi \tilde{\Psi}[\eta] \tilde{R}[\eta]. \tag{20}$$

Поэтому из (19) и (20) вытекает:

$$\Psi[v] = \frac{1}{2\pi} \int_{D_\eta} \tilde{Q}[\eta] \tilde{R}^{-1}[\eta] \exp i\left(\eta^{\mathrm{T}}, v\right) d\Gamma(\eta). \tag{21}$$

Подставляя (21) в (15), получим:

---

* Здесь и далее знаки $[\bullet]$ и $[\bullet/\bullet]$ означают функциональную зависимость.

$$W_{\xi}[\mu]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{D_{\eta}}\tilde{Q}[\eta]\tilde{R}^{-1}[\eta]\int\limits_{D_{v}}\exp i\left(\left(\eta-Z_{\bar{x}}\mu\right)^{\mathrm{T}},v\right)d\Gamma(v)\,d\Gamma(\eta)\,. \tag{22}$$

Внутренний интеграл в (22) равен (см. [1–6]):

$$D[\eta-Z_{\bar{x}}\mu];\;\; D[\bullet]\; \text{– дельта-функционал.}$$

Поэтому

$$W_{\xi}[\mu]=\tilde{Q}[Z_{\bar{x}}\mu]\tilde{R}^{-1}[Z_{\bar{x}}\mu]\,.$$

Тогда из (19) следует:

$$\tilde{Q}[Z_{\bar{x}}\mu]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{D_{\rho}}Q[\rho]\exp-i\left(\rho^{\mathrm{T}},Z_{\bar{x}}\mu\right)d\Gamma(\rho)\,,$$

$$\tilde{R}[Z_{\bar{x}}\mu]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{D_{\xi}}R[\xi]\exp-i\left(\xi^{\mathrm{T}},Z_{\bar{x}}\mu\right)d\Gamma(\xi)\,. \tag{23}$$

С учетом (17) из последней формулы (23) получим:

$$\tilde{R}[Z_{\bar{x}}\mu]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{D_{\xi}}\int\limits_{D_{v}}\exp i\left(\xi^{\mathrm{T}},Z_{\bar{x}}\mu-Z_{\bar{x}}v\right)d\Gamma(v)\,d\Gamma(\xi)\,,$$

$$\tilde{R}[Z_{\bar{x}}\mu]=\int\limits_{D_{v}}D[Z_{\bar{x}}\mu-Z_{\bar{x}}v]\,d\Gamma(v)\,.$$

Окончательно:

$$W_{\xi}[\mu]=\frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{D_{\rho}}Q[\rho]\exp-i\left(\rho^{\mathrm{T}},Z_{\bar{x}}\mu\right)d\Gamma(\rho)}{\displaystyle\int\limits_{D_{\rho}}D[Z_{\bar{x}}\mu-Z_{\bar{x}}\rho]\,d\Gamma(\rho)}\,. \tag{24}$$

Так как $Q\{\rho\}$ – ХФ поля q, имеем:

$$W_{\xi}[\mu]=W_{q}[Z_{\bar{x}}\mu]\cdot\left[\int\limits_{D_{\rho}}D[Z_{\bar{x}}\mu-Z_{\bar{x}}\rho]\,d\Gamma(\rho)\right]^{-1}.$$

Поскольку функционалы W в ряде случаев могут и не существовать, удобнее пока решать задачу в терминах ХФ поля ξ.

Обращая по Фурье обе части (24), получим:

$$\Psi[\varepsilon]=\int\limits_{D_{\rho}}Q[\rho]\,\mathrm{E}[\varepsilon,\rho]\,d\Gamma(\rho)\,, \tag{25}$$

где $$\mathrm{E}[\varepsilon,\rho]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{D_{\mu}}\exp i\left[\left(\varepsilon^{\mathrm{T}},\mu\right)-\left(\rho^{\mathrm{T}},Z_{\bar{x}}\mu\right)\right]\left[\int\limits_{D_{v}}D[Z_{\bar{x}}\mu-Z_{\bar{x}}v]\,d\Gamma(v)\right]^{-1}d\Gamma(\mu)\,. \tag{26}$$

Очевидно $\Psi[\varepsilon]$ в (25) есть ХФ поля ξ в уравнении (1).

Предположим теперь пока, что нам известен вид обратного оператора $G_{\bar{x}}=Z_{\bar{x}}^{-1}$.

Сделаем замену в (26):

$$Z_{\bar{x}}\mu\to\eta;\;\;\mu=Z_{\bar{x}}^{-1}\eta=G_{\bar{x}}\eta\,,$$

$$Z_{\bar{x}}v\to\xi;\;\; v=Z_{\bar{x}}^{-1}\xi=G_{\bar{x}}\xi\,. \tag{27}$$

Имеем:

$$d\Gamma(\mu)=I[\eta]d\Gamma(\eta);\;\; d\Gamma(v)=I[\xi]d\Gamma(\xi)\,,$$

где $I[\bullet]$ – якобиан преобразования (27), который при интегрировании в функциональном пространстве может быть выражен через определитель Фредгольма (см. [5]). При этом $I[\bullet]$, очевидно, зависит от структуры обратного оператора $G_{\bar{x}}$, т.е.:

$$I[\eta]\equiv I[G_{\bar{x}}\eta];\;\; I[\xi]\equiv I[G_{\bar{x}}\xi]\,. \tag{28}$$

Из соотношений

$$d\Gamma(\eta)=I[Z_{\bar{x}},\mu]d\Gamma(\mu);\;\; d\Gamma(\mu)=I[G_{\bar{x}},\eta]d\Gamma(\eta)$$

замечаем, что

$$I[Z_{\bar{x}},\mu]\cdot I[G_{\bar{x}},\eta]=1$$

является известным свойством якобианов.

Из (26) и (28) следует:

$$\mathrm{E}[\varepsilon,\rho]=\frac{1}{2\pi}\int_{D_\eta}\exp i\left[\left(\varepsilon^{\mathrm{T}},G_{\bar{x}}\eta\right)-\left(\rho^{\mathrm{T}},\eta\right)\right]\cdot I[G_{\bar{x}},\eta]\left[\int_{D_\xi}D[\eta-\xi]I[G_{\bar{x}},\xi]d\Gamma(\xi)\right]^{-1}d\Gamma(\eta).$$

Учитывая известную связь

$$I^{-1}[G_{\bar{x}},\eta]\equiv I\left[G_{\bar{x}}^{-1},\eta\right]=I[Z_{\bar{x}},\eta],$$

получаем:

$$\mathrm{E}[\varepsilon,\rho]=\int_{D_\eta}\exp i\left[\left(\varepsilon^{\mathrm{T}},G_{\bar{x}}\eta\right)-\left(\rho^{\mathrm{T}},\eta\right)\right]d\Gamma(\eta).$$

Делая теперь обратную замену

$$\omega=G_{\bar{x}}\eta;\;\; I[Z_{\bar{x}},\omega]d\Gamma(\omega)=d\Gamma(\eta),$$

получим:

$$\mathrm{E}[\varepsilon,\rho]=\frac{1}{2\pi}\int_{D_\omega}\exp i\left[\left(\varepsilon^{\mathrm{T}},\omega\right)-\left(\rho^{\mathrm{T}},Z_{\bar{x}}\omega\right)\right]I[Z_{\bar{x}},\omega]d\Gamma(\omega). \tag{29}$$

При этом во всех соотношениях предполагается существование якобиана соответствующего преобразования.

Из (25) и (29) вытекает:

$$\Psi[\varepsilon]=\int_{D_\omega}\exp i\left(\varepsilon^{\mathrm{T}},\omega\right)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{D_\rho}Q[\rho]\exp-i\left(\rho^{\mathrm{T}},Z_{\bar{x}}\omega\right)d\Gamma(\rho)\right]I[Z_{\bar{x}},\omega]d\Gamma(\omega).$$

По определению W_q (см. (3), (4)) получим:

$$\Psi[\varepsilon]=\int_{D_\omega}W_q[Z_{\bar{x}}\omega]I[Z_{\bar{x}},\omega]\exp i\left(\varepsilon^{\mathrm{T}},\omega\right)d\Gamma(\omega).$$

По определению ХФ $\Psi[\bullet]$ окончательно имеем:

$$W_\xi[\omega]=W_q[Z_{\bar{x}}\omega]I[Z_{\bar{x}},\omega]. \tag{30}$$

Разумеется, (30) – есть континуальная форма общеизвестного результата классической теории вероятностей. Однако при классическом подходе возникают определенные сложности при вычислении якобианов, особенно в вариантах решения стохастических уравнений с неизвестным обратным оператором. С позиции данной работы представление (30) есть некоторый промежуточный результат.

Соотношению (29) можно придать новую форму, учитывая то обстоятельство, что якобиан $I[\bullet]$ допускает разложение в функциональный ряд Тейлора.

Поэтому:

$$\mathrm{E}[\varepsilon,\rho]=I\left[Z_{\bar{x}},-i\frac{\delta}{\delta\varepsilon(\bar{x})}\right]\frac{1}{2\pi}\int_{D_\omega}\exp i\left[\left(\varepsilon^{\mathrm{T}},\omega\right)-\left(\rho^{\mathrm{T}},Z_{\bar{x}}\omega\right)\right]d\Gamma(\omega), \tag{31}$$

где $I[\bullet]$ выступает как вариационный оператор в функциональном пространстве D_ε.

Вводим

$$\left.\begin{aligned}\Psi[\varepsilon]&=I\left[Z_{\bar{x}},-i\frac{\delta}{\delta\varepsilon(\bar{x})}\right]\Psi_0[\varepsilon],\\ \Psi_0[\varepsilon]&=\int_{D_\rho}Q[\rho]\,\mathrm{E}_0[\varepsilon,\rho]d\Gamma(\rho)\end{aligned}\right\}$$

и обозначим

$$E_0[\varepsilon,\rho]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{D_\omega}\exp i\left[\left(\varepsilon^{\mathrm{T}},\omega\right)-\left(\rho^{\mathrm{T}},Z_{\bar{x}}\omega\right)\right]d\Gamma(\omega). \tag{32}$$

Цепочка (31), (32) позволяет в принципе построить ХФ $\Psi[r]$ поля ξ в уравнении (1) в виде вариационного ряда в терминах ХФ $Q[\bullet]$ правой части (1).

Практическое использование (32) мы ниже иллюстрируем двумя нелинейными стохастическими уравнениями, позволяющими конструктивно использовать (32) в интересах получения замкнутых выражений для ХФ (или ФПВ).

2. ХФ случайного процесса и его прохождение через нелинейную динамическую систему. В плане применения общей методики п.1 рассмотрим нелинейное уравнение во временной области, $t\in T$:

$$Z_t\xi(t)+A[\xi,t]=F(t), \tag{33}$$

где Z_t – линейный оператор;

A – нелинейная функция.

Из (33) при нулевых начальных условиях следует:

$$\xi(t)+\int\limits_{-\infty}^{t}G_L(t,\tau)A[\xi,\tau]d\tau=\int\limits_{-\infty}^{t}G_L(t,\tau)F(\tau)d\tau=g(t), \tag{34}$$

где $G_L(t,\tau)$ – функция Грина оператора Z_t, удовлетворяющая условию причинности:

$$G_L^{(0)}(t,\tau)=\begin{Bmatrix}G_L(t,\tau);\tau\in\langle-\infty,t\rangle\\ 0;\tau\in\langle t,+\infty\rangle\end{Bmatrix}=G_L(t,\tau)\sigma(t-\tau)\qquad\begin{cases}1,t>\tau,\\ 0,t<\tau,\end{cases} \tag{35}$$

где σ – функция скачка.

Перепишем (33) в виде:

$$Z_t\xi=F(t)-A[\xi,t]=g. \tag{36}$$

Якобиан преобразования (36) сводится в достаточно общем случае к определителю Фредгольма $I_F[k]$. Ядро преобразования $\hat{k}\equiv\hat{k}(t,\tau)$ при некоторых (довольно широких) ограничениях на нелинейный оператор A (см. [4]) имеет вид:

$$\hat{K}(t,\tau)=\frac{\delta}{\delta\xi(\tau)}\int\limits_{-\infty}^{t}G_L(t,\tau)A[\xi,\tau]d\tau=\sigma(t-\tau)G_L(t,\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}A[\xi,\tau] \tag{37}$$

(если учесть, что $\dfrac{\delta\xi(\tau)}{\delta\xi(\tau^{'})}=\delta(\tau-\tau^{'})$).

Тогда определитель Фредгольма приводится к форме:

$$I_F\left[\hat{k}\right]=I_F\left[\sigma(t-\tau)G_L(t,\tau)\frac{\partial}{\partial\omega}A\left[\omega(\tau),\tau\right]\right]$$

и вычисляется в явном виде через следы итерированных ядер:

$$I\left[\hat{K}\right]=\exp-\sum_k k^{-1}\chi_k\left[\hat{K}\right]=\exp-\chi_1\left[\hat{K}\right], \tag{38}$$

где χ_k – следы $\hat{K}$; т.к. для ядра Вольтерра (см. (37)) все следы χ_k; $k=2,3,\ldots$ тождественно равны нулю, то приходим к (38).

При этом след χ_1 равен:

$$\chi_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(t,t)dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_L(t,t)\frac{\partial}{\partial\omega}A\left[\omega(t),t\right]dt,$$

ибо $\sigma(t-t)=1/2$.

Из (38) получаем $\left[G_L(t,t)=0\right]$:

$$I\left[\hat{K}\right]=\exp-\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G_L(t,t)\frac{\partial}{\partial\omega}A\left[\omega(t),t\right]dt=1. \tag{39}$$

Из (30) и (34) и (39) получаем замкнутую форму для ФПВ процесса $\xi(t)$ как решения уравнения (33) этого пункта. Т.е.:

$$W_\xi[\omega] = W_q\left[\omega(t) + \int_{-\infty}^{t} G_L(t,\tau)\, A\left[\omega(\tau),\tau\right]d\tau\right]. \tag{40}$$

Здесь функционал W_q дает распределение правой части в (34), т.е.:

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} G_L(t,\tau)\, F(\tau)\,d\tau. \tag{41}$$

Легко установить связь распределений W_q и W_F.

Пусть Q – ХФ поля q и F – ХФ поля F. Поскольку q и F связаны линейно по формуле (41), постольку имеем:

$$Q[\alpha] = F\left[\tilde{G}_0\alpha\right];\ \ G_0(t,\tau) = \sigma(t-\tau)G_L(t,\tau).$$

Отсюда:

$$W_q[\omega] = \frac{1}{2\pi}\int_{D_\alpha} F\left[\tilde{G}_0\alpha\right]\exp - i(\omega,\alpha)\,d\Gamma(\alpha),$$

где $\tilde{G}_0\alpha \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\alpha(t)G_0(t,\tau)\,dt$; $\tilde{G}_0$ - оператор Грина; $\tilde{G}_0 \neq \hat{G}_L$.

Вводя новую переменную, получим:

$$p = \tilde{G}_0\alpha;\ \ d\Gamma(p) = I[G_0]\,d\Gamma(\alpha).$$

Тогда:

$$W_q[\omega] = \frac{1}{2\pi}I_0^{-1}[G_0]\int_{D_p} F[p]\exp - i\left(\omega^{\mathrm{T}}, R_p\right)d\Gamma(p),$$

где R_p – резольвента ядра G_0: $R_p = G_0^{-1} = Z_t$;

Z_t – оператор из (33).

Тогда

$$W_q[\omega] = W_F\left[Z_t\omega(t) + A\left[\omega(t),t\right]\right]. \tag{42}$$

При этом $Z_t\int_{-\infty}^{t} G_L(t,\tau)A\left[\omega(\tau),\tau\right]d\tau = A\left[\omega(t),t\right]$,

где $Z_t\hat{G}_L = \hat{I}$ – определение функции Грина $\hat{G}_L$ в операторной форме.

Соотношения (40) и (42) решают поставленную задачу (см. (35)) при нулевых начальных условиях. При этом выполняются равенства:

$$G_L(t,t) = 0 \to I[G_0] = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} G_0(t,t)\,dt\right\} = 1.$$

Тем самым (40) и (42) связывают ФПВ внешних воздействий $W_F[\bullet]$ и ФПВ $W_\xi[\bullet]$ решения ξ исходного динамического уравнения (33).

Если теперь объединить выражения (40) и (42), то получаем окончательно итоговую форму:

$$W_\xi\left[\omega(t)\right] = W_F\left\{Z_t\omega(t) + A\left[\omega(t),t\right] + A\left[\omega(t) + \int_{-\infty}^{t} G_L(t,\tau)\, A\left[\omega(\tau),\tau\right]d\tau\right]\right\}. \tag{43}$$

3. ХФ нелинейного волнового оператора. Рассмотрим нелинейное волновое уравнение (одномерный случай):

$$U_{tt} - a^2U_{xx} + F[U,x,t] = f(x,t). \tag{44}$$

Начальные условия – нулевые, F – нелинейная функция; $f(\bullet)$ – сторонняя сила.

Введем обозначения:

$$\left[x_\pm(t,\tau) = x \pm a(t-\tau) \equiv x_\pm\right].$$

Тогда из (44) получаем:

$$U(x,t) + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_x^{x_+} F(U,\xi,\tau)\,d\xi = \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_x^{x_+} f(\xi,\tau)\,d\xi$$

или при использовании σ-функций:

$$\begin{aligned} &U(x,t) + \frac{1}{2a}\int\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sigma(\tau)-\sigma(\tau-t)\right]\left[\sigma(\xi-x_-)-\sigma(\xi-x_+)\right]F(U,\xi,\tau)\,d\xi d\tau = \\ &= \frac{1}{2a}\int\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sigma(\tau)-\sigma(\tau-t)\right]\left[\sigma(\xi-x_-)-\sigma(\xi-x_+)\right]f(\xi,\tau)d\xi\,d\tau\,. \end{aligned} \quad (45)$$

Очевидно (45) формально представляет собой выражение

$$ZU = q\,.$$

Здесь Z – некоторый нелинейный оператор в левой части (45) и q – правая часть (45).

Аналогично (37) якобиан нелинейного преобразования равен определителю Фредгольма ядра $\hat{K}$:

$$\begin{aligned} &\hat{K}(x,t|\xi,\tau) = \frac{\delta}{\delta U(\xi,\tau)}\frac{1}{2a}\int\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sigma(\tau)-\sigma(\tau-t)\right]\left[\sigma(\xi-x_-)-\sigma(\xi-x_+)\right]F(U,\xi,\tau)\,d\xi d\tau = \\ &= \frac{1}{2a}\left[\sigma(\tau)-\sigma(\tau-t)\right]\left[\sigma(\xi-x_-)-\sigma(\xi-x_+)\right]\frac{\partial}{\partial U}F\left[U(\xi,\tau),\xi,\tau\right]\,. \end{aligned}$$

Определитель Фредгольма этого ядра Вольтерра, возникающего как результат принципа причинности, подобно (37) равен:

$$I_F\left[\hat{K}\right] = \exp - \chi_1\left[\hat{K}\right];$$

$$\begin{aligned} &\chi_1\left[\hat{K}\right] \equiv \int\int_{-\infty}^{\infty} k(\xi,\tau|\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau = \\ &= \frac{1}{2a}\int\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sigma(\tau)-\sigma(0)\right]\cdot\left[\sigma(0)-\sigma(0)\right]\frac{\partial}{\partial U}F(U,\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau = 0 \end{aligned}\,.$$

Здесь $\chi_1[\bullet]$ – первый след ядра $\hat{K}$, остальные следы $\chi_2,\ldots,\chi_i,\ldots$, как уже указывалось выше, равны нулю по свойствам вольтерровых ядер.

Отсюда следует, что определитель Фредгольма:

$$I_F\left[\hat{K}\right] \equiv 1\,.$$

Поэтому аналогично (40):

$$W_U[\omega] = W_q\left[\omega(x,t) + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F\left[\omega(\xi,\tau),\xi,\tau\right]d\xi\right], \quad (46)$$

где W_q – функционал распределения правой части (44), (45).

Формула (46) решает задачу.

Таким образом, полученные выше результаты формируют некоторую методологию исследования полной статистической структуры решений определенного класса стохастических нелинейных уравнений статистической гидрофизики и гидроакустики (см., напр., [7]), отвечающих за причинно-следственную динамику образования решений и выступающих в этой связи как дисперсионные соотношения в функциональных пространствах, на которых строятся вероятностные структуры (ХФ и ФПВ) решений.

Очевидно, соотношения (43) и (46) описывают закономерности трансформации ФПВ для некоторого класса стохастических уравнений типа (33) и (47) во временной и пространственно-временной областях соответственно.

Разумеется, развитая технология решений вероятностных задач может быть расширена по направлениям охвата случайных полей параметров нелинейных операторов неоднородных стохастических уравнений, включая также задачи с неоднородными и нестационарными граничными и начальными условиями. Формально эта постановка требует расширения размерности фазового вектора динамического решения задачи с целью охвата вкладов случайных источников (граничных и начальных условий), имеющих различное физическое происхождение, отличающееся от механизма функционирования только случайных сторонних воздействий, например, при решении задачи Коши в статистической гидродинамике при случайных начальных течениях [12].

Развитая методология может быть распространена и на случай исследования различных случайных полей механики и физики сплошной среды, в том числе по направлениям ряда гидрофизических и гидродинамических задач (см. [8, 9]), а также обратных задач статистического оценивания неизвестных параметров сторонних источников и среды распространения на основе расширения методологии работы [11].

В плане конкретизации научно-прикладной адресации статьи можно предложить для ознакомления мою статью ”О трансформации вероятностных структур случайных полей источников в процессе нелинейно-параметрических отображений” (Акустический журнал, т.54, № 4, 2008 г.), а также завершаемую мною статью “Оптимальные алгоритмы регистрации гидроакустических и гидрофизических полей единой интегрированной системой пространственно-временной обработки”, которую я хотел бы представить в редакцию данного сборника научных трудов в этом году, либо в начале следующего года.

Summary

This work deals with the probability solution structure for some stochastic equations as the dynamic foundation for statistic generation on the base of functional methods. At the first step, the general methodology is formed for the characteristic functionals (ChF) determining in the case of non-linear dynamic problem solutions in terms of the ChF of external action (source). This method is used for concluding the statistics of solutions for definite class of non-linear equations in space-time-domain, whereas satisfied to cause conditions. Then this method is distributed on one-dimension non-linear wave equation. Finally, the analytical forms are constructed for ChF of the solutions in terms of ChF of external random sources for hydrophisical and hydroacoustic channels for information propagation.

Литература

1. *Рытов С.М., Татарский В.И., Кравцов Ю.А.* Статистическая радиофизика. т.II. Москва. 1978.
2. *Новиков Е.А.* Успехи математических наук. Т. 16. № 2 (98). 1961. С.135-141.
3. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Ч. I, II. М.: Наука. 1965.
4. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980.
5. *Клячкин В.И.* Ктеории нелинейных преобразований случайных процессов // Известия ВУЗов. Радиофизика. 1974. Т. 1. XVII. № 1.
6. *Клячкин В.И., Иоффе М.И.* Определение характеристического функционала на выходе системы перемножитель-фильтр // Известия ВУЗов. Радиофизика. 1975. Т. 18, № 5. С.707-715.
7. *Клячкин В.И.* Вероятностные задачи статистической гидроакустики. Ч. I. Гранично-контактные задачи. СПб.: Наука. 2007.
8. *Клячкин В.И.* Вероятностная модель случайно-неоднородных акустических полей и структура отношения правдоподобия // Акустика океана: Доклады X школы-семинара акад.Л.М.Бреховских РАН, ИО РАН, АКИН. М.: Геос, 2004. С.479-483.
9. *Клячкин В.И., Клячкин А.В.* Векторно-фазовое оценивание на базе прямых наблюдений элементов движения источников звука. Материалы VII Международной конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». СПб.: Наука, 2006. С.377-378.
10. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
11. *Клячкин В.И.* Об одной обратной задаче в теории рассеяния волн на случайных неоднородностях. Труды VIII всесоюзной школы семинара по статистической гидроакустике. Новосибирск: Институт математики СО АН СССР, 1977. С.39-44.
12. *Клячкин В.И.* О распределении вероятностей поля скорости в потоке несжимаемой жидкости. Тезисы докладов III всесоюзного симпозиума по физике акустико-гидродинамических явлений и оптоакустике. АН СССР, АН Уз.ССР объединененный Научный Совет по комплексной проблеме «Физическая и техническая акустика». Ташкент, 1982.

Статья поступила в редакцию 14.11.2007 г.