

УДК 532.59

Д.Г.Архипов¹, Н.С.Сафарова¹, Г.А.Хабахпашев¹

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В МОРЯХ И ОКЕАНАХ СО СКАЧКОМ ПЛОТНОСТИ И ПОЛОГИМ ДНОМ

Предложен комбинированный подход для описания трансформации трехмерных возмущений пикноклина над неподвижным недеформируемым дном в приближении «твердой крышки». Предполагается, что длины волн умеренно большие, их амплитуды малы, но конечны, а дно может быть слабонаклонным. Выведенная система уравнений применима для моделирования возмущений, которые одновременно распространяются в произвольных горизонтальных направлениях. Основное нелинейное уравнение для возмущений рассчитывалось по неявной конечно-разностной схеме, а линейные вспомогательные уравнения для нахождения поля скорости решались методом быстрого преобразования Фурье. Используемый алгоритм был протестирован на задаче о динамике плоских волн. Численно найдены решения ряда характерных планарных задач и продемонстрировано влияние топографии дна на эволюцию протяженных или уединенных в пространстве возмущений.

Вопрос о волнах в стратифицированных жидкостях занимает существенное место в понимании динамики морей и океанов [1–3]. Для правильного описания внутренних возмущений в естественных водоемах, содержащих пикноклин, необходимо задавать реальную зависимость плотности от глубины. Но наиболее простой моделью, учитывающей стратификацию, является профиль плотности воды в виде одной ступеньки. Хотя в двухслойной жидкости возможны только две моды колебаний (баротропная и первая бароклинная), это ограничение не так серьезно. Результаты наблюдений [2–4] показывают, что во многих ситуациях большая часть энергии приходится именно на первые две моды колебаний.

Вопрос о распространении плоских возмущений малой, но конечной амплитуды в системе, состоящей из двух неглубоких жидкостей близкой плотности со свободной верхней поверхностью и неподвижным горизонтальным дном, впервые был поставлен в работе [5]. Допущение о том, что скачок плотности на границе раздела слоев много меньше абсолютных значений плотностей, позволяет воспользоваться приближением «твердой крышки» (см. также приложение в статье [6]). Дальнейшее развитие данной проблемы достаточно подробно рассмотрено в монографиях [7–9].

К настоящему времени для слабонелинейных волн на границе раздела несмешивающихся сред различной плотности исследованы, в основном, плоские и квазиплоские случаи. В частности, для умеренно длинных возмущений были получены модельные уравнения типа уравнения Кортевега–де Вриза [10] и расширенного уравнения Кортевега–де Вриза [11], уравнения Буссинеска [12] и его двумерного обобщения [13]. Эти уравнения удобны для анализа, но при их выводе предполагалось, что нелинейные волны бегут преимущественно в одном горизонтальном направлении. Лишь в таких ситуациях можно выразить векторы скоростей жидкостей, входящие в конвективные члены уравнений движения, через возмущения границы раздела и свести задачу к одному уравнению для скалярной величины.

В противном случае для описания умеренно длинных волн конечной амплитуды, одновременно распространяющихся под любыми углами друг к другу, необходимо исполь-

¹ Институт теплофизики им.С.С.Кутателадзе СО РАН (Новосибирск)

зовать системы уравнений, которые содержат как возмущения границы раздела, так и скорости сред. Однако в указанных системах [14] даже линейные члены всех уравнений включают слагаемые, зависящие от скоростей жидкостей.

Целью данной статьи является разработка комбинированного метода моделирования эволюции пространственных нелинейных внутренних волн, который будет обладать основными достоинствами упомянутых выше подходов, но при этом свободен от их недостатков (для однородной среды со свободной поверхностью это было сделано в [15]). Кроме того, будет продемонстрирована пригодность метода к ряду гидрофизических задач.

Постановка задачи и упрощение исходных уравнений. Учитывая, что скорость распространения внутренних гравитационных волн в морях и океанах много меньше скорости звука, можно считать воду несжимаемой, далее исходим из того, что можно пренебречь диссипативными потерями, т.е. вязкостью жидкости. Тогда исходную систему уравнений гидродинамики (уравнение неразрывности и уравнения Эйлера) в каждом из однородных слоев можно записать в классической форме:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_l + \partial w_l / \partial z = 0, \quad \nabla = (\partial / \partial x, \partial / \partial y), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + (\mathbf{u}_l \cdot \nabla) \mathbf{u}_l + w_l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial z} + \frac{1}{\rho_l} \nabla p_l = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial w_l}{\partial t} + (\mathbf{u}_l \cdot \nabla) w_l + w_l \frac{\partial w_l}{\partial z} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p_l}{\partial z} + g = 0. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор горизонтальной компоненты скорости воды (рис. 1), w – его вертикальная составляющая; z – вертикальная координата; t – время; ρ – плотность жидкости; p – давление в слое; g – ускорение свободного падения; индекс $l = 1$ для верхнего слоя и $l = 2$ для нижнего слоя.

Кроме того, сделаем следующие предположения: 1) стационарные составляющие движения равны нулю; 2) «длина волны» λ существенно больше, а амплитуда возмущения пикноклина η_a значительно меньше равновесных глубин слоев h_l ($h_l / \lambda \sim \varepsilon^{1/2}$ и $\eta_a / h_l \sim \varepsilon$, где ε – малый параметр); 3) горизонтальная «крышка» и слабонаклонное дно ($|\nabla h_2| \sim \varepsilon^{1/2}$) неподвижны и недеформируемы; 4) возникающие течения потенциальны внутри каждого слоя; и, наконец, 5) капиллярные эффекты не велики (модифицированное число Бонда $Bo = \Delta \rho g h_1 h_2 / \sigma > 1$, где $\Delta \rho = \rho_2 - \rho_1$, а σ – поверхностное натяжение). Благодаря этим допущениям можно пренебречь всеми нелинейными слагаемыми в уравнениях (3) и вторыми нелинейными слагаемыми в уравнениях (2), как членами не учитываемого порядка малости

($\mathbf{u}_l \nabla w_l / g \sim \varepsilon^2$ и $w_l^2 / u_l^2 \sim \varepsilon$). В результате, имеем упрощенную систему уравнений движения:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{u}_l^2) + \frac{1}{\rho_l} \nabla p_l = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial w_l}{\partial t} + \frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p_l}{\partial z} + g = 0. \quad (5)$$

Сделанные предположения соответствуют условиям проведения экспериментов в различных гидрофизических лабораториях [11, 16–21].

Наконец, примем обычные краевые условия (условия непротекания воды через неподвижные недеформируемые горизонталь-

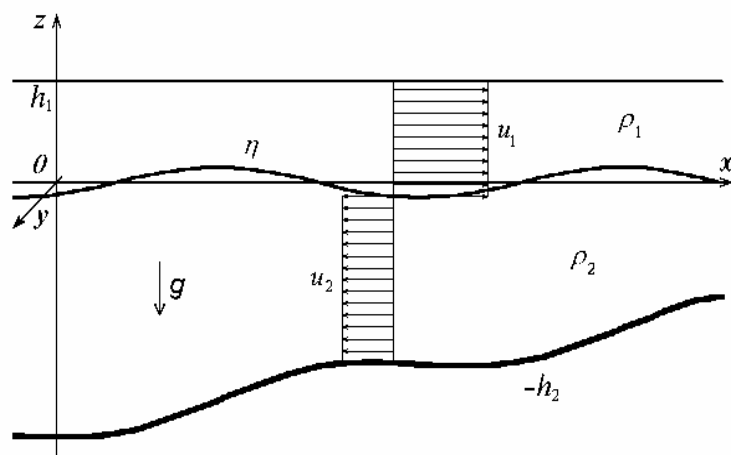


Рис. 1. Волны на границе раздела и скорости течения в неглубокой двухслойной воде между неподвижными недеформируемыми пологим дном и горизонтальной крышкой

ную крышку и пологое дно; кинематические условия в пикноклине и условие для давления на данной границе):

$$w_1 = 0 \text{ при } z = h_1 \text{ и } w_2 + (\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) h_2 = 0 \text{ при } z = -h_2(x, y),$$

$$w_l = w_{li} = \partial \eta / \partial t + (\mathbf{u}_{li} \cdot \nabla) \eta \text{ и } p_{li} = p_{2i} + \sigma \nabla^2 \eta \text{ при } z = \eta(t, x, y).$$

Здесь η – отклонение пикноклина, а индексом i помечены значения величин, относящиеся к этой поверхности.

В дальнейшем нам понадобятся законы сохранения массы в каждом слое. Для их получения проинтегрируем уравнения (1) по координате z от $-h_2$ до η при $l = 2$ и от η до h_1 при $l = 1$. С помощью правила Лейбница о дифференцировании по параметру и кинематического условия в пикноклине имеем:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}_l [\eta + (-1)^l h_l]) = 0, \quad (6)$$

где также использовано, что при сделанных предположениях (длинные слабонелинейные волны в невязких жидкостях) локальные значения векторов горизонтальных составляющих скоростей воды приближенно равны величинам этих векторов, усредненных по глубинам слоев [13]. Конечно, данные законы сохранения массы выглядят более громоздкими, чем исходные уравнения неразрывности. Но законы сохранения (6) содержат достаточно легко определяемую переменную $\eta(t, x, y)$, а в уравнения (1) входят локальные значения нормальных компонент скоростей воды $w_l(t, x, y, z)$, измерение полей которых намного сложнее.

Вначале рассмотрим задачу в первом приближении (очень длинные линейные волны, распространяющиеся в водоеме с горизонтальным дном и без учета капиллярности). Тогда уравнения (4)–(6) еще упрощаются:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + \frac{1}{\rho_l} \nabla p_l = 0; \quad (7)$$

$$\frac{1}{\rho_l} \frac{\partial p_l}{\partial z} + g = 0; \quad (8)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (-1)^l h_l (\nabla \cdot \mathbf{u}_l) = 0. \quad (9)$$

Из уравнений (8) и динамического краевого условия (т.е. непрерывности давления в пикноклине) можно найти гидростатические профили давлений: $p_l = p_i + \rho_l g (\eta - z)$. Эти подстановки позволяют переписать уравнения (7) в форме:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + \frac{1}{\rho_l} \nabla p_i + g \nabla \eta = 0. \quad (10)$$

Для того чтобы исключить из уравнений (9) и (10) горизонтальные составляющие векторов скоростей воды, продифференцируем законы сохранения массы по времени, а к уравнениям движения применим скалярно оператор ∇ , умноженный на $(-1)^l$, и вычтем вторые уравнения из первых. В результате получаем систему двух уравнений:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - (-1)^l g h_l \nabla^2 \eta - (-1)^l \frac{h_l}{\rho_l} \nabla^2 p_i = 0.$$

Из условия тождественности данных уравнений (при $l = 1$ и 2), описывающих один и тот же волновой процесс, определяем лапласиан давления в пикноклине:

$$\nabla^2 p_i = -\rho_1 \rho_2 g H \nabla^2 \eta / \chi, \quad H = h_1 + h_2, \quad \chi = \rho_1 h_2 + \rho_2 h_1. \quad (11)$$

Отсюда легко находим аналогичное соотношение для градиента давления:

$$\nabla p_i = -\rho_1 \rho_2 g H \nabla \eta / \chi.$$

При этом возникающая произвольная постоянная положена равной нулю, так как согласно сделанному предположению вода покоится в отсутствии возмущения (не физические решения для давления в пикноклине, линейно зависящие от горизонтальных координат, конечно же, исключаем). В итоге, благодаря этой формуле, запишем приближенные законы сохранения горизонтальных компонент импульсов в простом виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + (-1)^l \frac{\mathbf{c}_0^2}{h_l} \nabla \eta = 0, \quad \mathbf{c}_0^2 = g h_1 h_2 \Delta \rho / \rho_1 H. \quad (12)$$

Здесь $\mathbf{c}_0$ – вектор фазовой скорости очень длинных линейных волн, бегущих в водоеме с горизонтальным дном.

Вывод системы модельных уравнений. Теперь применим скалярно оператор ∇ к горизонтальным компонентам уравнений движения (4):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}_l) + \nabla^2 \left(\frac{\mathbf{u}_l^2}{2} + \frac{p_l}{\rho_l} \right) = 0.$$

Заменив в первых слагаемых левых частей этих уравнений $\nabla \cdot \mathbf{u}_l$ на $-\partial w_l / \partial z$ с помощью уравнений неразрывности (1), имеем:

$$\frac{\partial^2 w_l}{\partial t \partial z} - \nabla^2 \left(\frac{\mathbf{u}_l^2}{2} + \frac{p_l}{\rho_l} \right) = 0. \quad (13)$$

Для нахождения давления в слоях проинтегрируем уравнения вертикального движения (5) по координате z от z до η . С помощью динамического граничного условия в пикноклине находим профили давлений в слоях:

$$\frac{p_l}{\rho_l} = \frac{p_{li}}{\rho_l} + g(\eta - z) + \int_z^\eta \frac{\partial w_l}{\partial t} dz.$$

В рассматриваемом приближении (достаточно длинные волны небольшой амплитуды) можно воспользоваться простыми профилями вертикальных составляющих скоростей

$$w_l = \left(1 + (-1)^l \frac{z}{h_l} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

где опущены поправки третьего и более высоких порядков малости. Подставив данные выражения в формулы для давлений, получаем зависимости:

$$\frac{p_l}{\rho_l} = \frac{p_{li}}{\rho_l} + g(\eta - z) - z \left(1 + (-1)^l \frac{z}{2h_l} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}.$$

Здесь мы снова пренебрегли членами следующих (не учитываемых) порядков малости. Таким образом, уравнения (13) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial^2 w_l}{\partial t \partial z} - \nabla^2 \left[\frac{\mathbf{u}_l^2}{2} + g\eta + \frac{p_{li}}{\rho_l} - z \left(1 + (-1)^l \frac{z}{2h_l} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right] = 0.$$

Теперь проинтегрируем оба эти уравнения по координате z (от $-h_2$ до η при $l = 2$ и от η до h_1 при $l = 1$). В результате приходим к двум следующим уравнениям:

$$\int_{(-1)^{l+1}h_l}^\eta \left[\frac{\partial^2 w_l}{\partial t \partial z} - \nabla^2 \left(\frac{\mathbf{u}_l^2}{2} \right) \right] dz - [(-1)^l h_l + \eta] \nabla^2 \left(g\eta + \frac{p_{li}}{\rho_l} \right) - \frac{h_l^2}{3} \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0. \quad (14)$$

Первые части интегралов в уравнениях (14) можно легко преобразовать благодаря правилу Лейбница о дифференцировании по параметру, кинематическому граничному условию в пикноклине, уравнениям неразрывности (1), а также линеаризованным законам сохранения массы (9) и импульса (12) в обоих слоях для замен в членах второго порядка малости:

$$\begin{aligned}
 \int_{(-1)^{l+1}h_l}^{\eta} \frac{\partial^2 w_l}{\partial t \partial z} dz &= \frac{\partial w_{li}}{\partial t} - \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial w_l}{\partial z} \Big|_{z=\eta} + (-1)^l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} \cdot \nabla h_l = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_l \cdot \nabla \eta) + \frac{\partial \eta}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{u}_l + \\
 &+ (-1)^l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} \cdot \nabla h_l = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left(\mathbf{u}_l \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) + \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} \cdot \nabla \eta + (-1)^l \frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} \cdot \nabla h_l = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - (-1)^l \nabla \cdot (\mathbf{u}_l h_l \nabla \cdot \mathbf{u}_l) - \\
 &- (-1)^l \frac{c_0^2}{h_l} \nabla \eta \cdot \nabla \eta - \frac{c_0^2}{h_l} \nabla \eta \cdot \nabla h_l = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - (-1)^l \frac{h_l}{2} \nabla^2 (\mathbf{u}_l^2) - (-1)^l \frac{c_0^2}{h_l} (\nabla \eta)^2 - \frac{c_0^2}{h_l} \nabla \eta \cdot \nabla h_l,
 \end{aligned}$$

где, конечно же, поправки третьего и более высоких порядков малости, как всегда, опущены. Во вторых частях интегралов в уравнениях (14) заменим верхний предел на 0 и вынесем ∇^2 за знаки интегралов:

$$\int_{(-1)^{l+1}h_l}^{\eta} \nabla^2 \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) dz = (-1)^l \frac{h_l}{2} \nabla^2 \langle \mathbf{u}_l^2 \rangle,$$

где угловыми скобками обозначены величины, усредненные по глубинам соответствующих слоев. Наконец, для длинноволновых слабонелинейных возмущений, распространяющихся в невязких жидкостях между пологим дном и горизонтальной крышкой, имеют место «заполненные» профили [13], и, следовательно, в членах второго порядка малости можно воспользоваться приближенными равенствами $\langle \mathbf{u}_l^2 \rangle = \mathbf{u}_l^2$. Тогда уравнения (14) запишем в виде:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + g h_1 \nabla^2 \eta + \frac{h_1}{\rho_1} \nabla^2 p_{1i} + h_1 \nabla^2 (\mathbf{u}_1^2) + \frac{c_0^2}{h_1} (\nabla \eta)^2 - g \eta \nabla^2 \eta - \frac{\eta}{\rho_1} \nabla^2 p_{1i} - \frac{h_1^2}{3} \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0; \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g h_2 \nabla^2 \eta - \frac{h_2}{\rho_2} \nabla^2 p_{2i} - h_2 \nabla^2 (\mathbf{u}_2^2) - \frac{c_0^2}{h_2} (\nabla \eta)^2 - \\
 &- g \eta \nabla^2 \eta - \frac{\eta}{\rho_2} \nabla^2 p_{2i} - \frac{c_0^2}{h_2} \nabla \eta \cdot \nabla h_2 - \frac{h_2^2}{3} \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0.
 \end{aligned} \quad (16)$$

Для членов второго порядка малости лапласиан давления в пикноклине достаточно определить из первого приближения, т. е. с помощью формулы (11). Для того чтобы исключить давление в пикноклине и из линейных членов уравнений (15) и (16), умножим данные уравнения на h_2/ρ_2 при $l = 1$ и на h_1/ρ_1 при $l = 2$. Сложив эти два уравнения, получаем:

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{h_1}{\rho_1} + \frac{h_2}{\rho_2} \right) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - g h_1 h_2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right) \nabla^2 \eta - h_1 h_2 \nabla^2 \left(\frac{\mathbf{u}_2^2}{\rho_1} - \frac{\mathbf{u}_1^2}{\rho_2} \right) - g \left(\frac{h_1}{\rho_1} + \frac{h_2}{\rho_2} - \frac{H^2}{\chi} \right) \eta \nabla^2 \eta - \\
 &- c_0^2 \left(\frac{h_1}{\rho_1 h_2} - \frac{h_2}{\rho_2 h_1} \right) (\nabla \eta)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{h_1^2 h_2}{\rho_2} + \frac{h_2^2 h_1}{\rho_1} \right) \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \sigma \frac{h_1 h_2}{\rho_1 \rho_2} \nabla^4 \eta = \frac{c_0^2 h_1}{\rho_1 h_2} \nabla h_2 \cdot \nabla \eta.
 \end{aligned} \quad (17)$$

В капиллярном слагаемом можно заменить $c_0^2 \nabla^2$ на $\partial^2/\partial t^2$. Теперь, умножив все члены уравнения (17) на произведение $\rho_1 \rho_2$ и разделив их на χ , имеем:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \eta - c_0^2 \frac{\rho_2 h_1^2 - \rho_1 h_2^2}{h_1 h_2 \chi} \nabla \cdot (\eta \nabla \eta) - \frac{h_1 h_2}{\chi} \nabla^2 (\rho_2 \mathbf{u}_2^2 - \rho_1 \mathbf{u}_1^2) - \\
 &- h_1 h_2 \left(\frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{3\chi} - \frac{1}{Bo} \right) \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{c_0^2 \rho_2 h_1}{h_2 \chi} \nabla h_2 \cdot \nabla \eta.
 \end{aligned}$$

В естественных водоемах $\Delta \rho \ll \rho_1$ и $Bo \gg 1$, поэтому данное уравнение становится проще:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \eta - c_0^2 \frac{h_1 - h_2}{2 h_1 h_2} \nabla^2 (\eta^2) - \frac{h_1 h_2}{H} \nabla^2 (\mathbf{u}_2^2 - \mathbf{u}_1^2) - \frac{h_1 h_2}{3} \nabla^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{c_0^2 h_1}{h_2 h} \nabla h_2 \cdot \nabla \eta.$$

Введем обозначения для коэффициентов при нелинейном $C_N = c_0^2 (h_1 - h_2) / (2 h_1 h_2)$, дисперсионном $C_D = h_1 h_2 / 3$ и градиентном $C_B = c_0^2 h_1 / (h_2 H)$ членах. Тогда основное эволюционное уравнение модели можно записать в еще более компактном виде:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \eta - C_N \nabla^2 \eta^2 - \frac{h_1 h_2}{H} \nabla^2 (\mathbf{u}_2^2 - \mathbf{u}_1^2) - C_D \frac{\partial^2 \nabla^2 \eta}{\partial t^2} = C_B \nabla h_2 \cdot \nabla \eta. \quad (18)$$

Отметим, что коэффициенты при всех членах зависят только от геометрических (h_1, h_2) и физических (g, ρ_1, ρ_2) параметров задачи.

Уравнение (18) характерно тем, что величины горизонтальных компонент скоростей воды входят лишь в члены второго порядка малости, поэтому для их определения достаточно первого приближения законов сохранения массы (9). Введем также потенциалы для этих скоростей и перейдем к уравнениям Пуассона:

$$\mathbf{u}_l = \nabla \varphi_l, \quad \nabla^2 \varphi_l = \frac{(-1)^{l+1}}{h_l} \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (19)$$

Подчеркнем, что выведенная модель, т.е. система уравнений (18) и (19), пригодна для возмущений, движущихся под любыми углами друг к другу. Она принципиально проще известных систем дифференциальных уравнений [22, 23], в которых все уравнения содержат как линейные, так и нелинейные слагаемые.

Если волны распространяются преимущественно в одном направлении, то в членах второго порядка малости величины горизонтальных компонент скоростей жидкостей можно выразить через возмущение пикноклина: $\mathbf{u}_l = (-1)^l c_0 \eta / h_l$. В этом случае уравнения (19) не нужны, а уравнение (18) согласуется с модифицированным уравнением Буссинеска [13].

Если дно горизонтально, то у системы есть плоские стационарно бегущие решения (от трансверсальной координаты ничего не зависит, а возмущения распространяются с постоянной скоростью и неизменной формой). Это могут быть периодические кноидальные волны, а в частном случае и уединенные (по продольной координате) решения [12]:

$$\eta = \eta_a \operatorname{sech}^2[(x - x_0 - Ut) / L]. \quad (20)$$

Здесь $U = c_0 \sqrt{(1 + \eta_a^*) / (1 - 2\eta_a^*)}$ – скорость солитона, $L = 2\sqrt{C_D(1 + 1/\eta_a^*)} / 3$ – его ширина (характерный размер), а $\eta_a^* = 2\eta_a C_N / (3c_0^2)$.

Численные решения модельной системы уравнений. Основное уравнение предложенной модели (18) очень похоже на эволюционное уравнение, выведенное в работе [24] для волн на свободной поверхности однородной жидкости. Поэтому расчеты выполнены с помощью модификации неявной трехслойной конечно-разностной схемы, описанной в статье [25]. На шаге «предиктор» определение вектора скорости воды осуществлялось по значениям возмущения пикноклина с предыдущего шага по времени. А на шаге «корректор» поле скоростей находилось из решения системы уравнений (19). Для этого применялся метод быстрого преобразования Фурье по обоим горизонтальным координатам.

Для верификации алгоритма и программы расчетов по данной модели использовались не только исследование устойчивости аналитических решений (20), но и задачи о взаимодействии уединенных волн над горизонтальным дном. В этих случаях задание начальных данных (первые два временных слоя) проведено с помощью аналитических решений (20). Скорости и формы солитонов сохранялись по мере распространения с высокой точностью. Если более крупное возмущение догоняло менее крупное, то картина их взаимодействия была такой же, как и при решении уравнения Кортевега–де Вриза (см., например, монографию [26]): если отношение амплитуд волн равнялась двум, то наблюдалось обменное взаимодействие, а если – трем, то обгонное.

На рис. 2 показано слабое нелинейное увеличение возмущения при столкновении двух одинаковых уединенных волн (амплитуда примерно на 3 % превосходит сумму ам-

плитуд исходных возмущений) и практически полная остановка жидкостей в момент максимального взаимодействия волн. Видно, что в это время амплитуда возмущения, вычисленного по модифицированному уравнению Буссинеска [13], приблизительно на 8 % меньше амплитуды, рассчитанной по системе уравнений (18) и (19). После встречного столкновения волны возвращаются к прежним амплитудам. Указанные значения отношений плотностей (пресная и соленая вода) и глубин слоев соответствуют реальным значениям параметров, при которых были выполнены лабораторные эксперименты [19, 20] по динамике одиночных возмущений.

На рис. 3 и 4 продемонстрированы результаты некоторых вычислений для различных пространственных волн в квадратной расчетной области. При этом полагалось, что жидкости в начальный момент времени находились в состоянии покоя (т.е. производные по времени равны нулю).

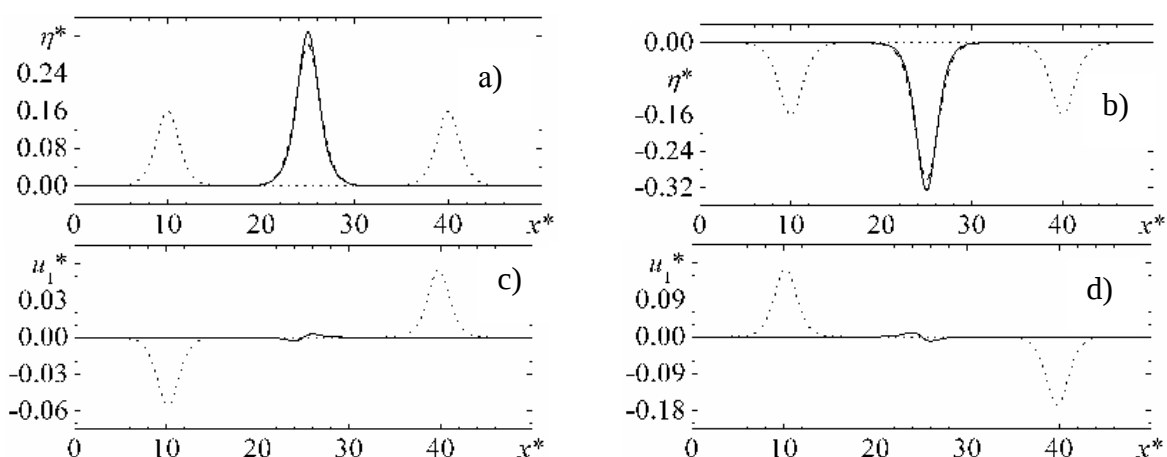


Рис. 2. Профили плоских уединенных волн (а и б – возмущения границы раздела $\eta^* = \eta / h_m$, где h_m – меньшая глубина слоя жидкости; с и д – скорости верхнего слоя $u_1^* = u_1 / c_0$, $x^* = x / H$) при $\rho_1 / \rho_2 = 0.98$, $h_1 / h_2 = 3$ (а и с), $h_1 / h_2 = 1/3$ (б и д) в различные моменты времени: пунктирные линии – $t = 0$, сплошные кривые (расчет по предложенной модели), штриховые линии (расчет по модифицированному уравнению Буссинеска) – $t^* = t c_0 / H = 14$

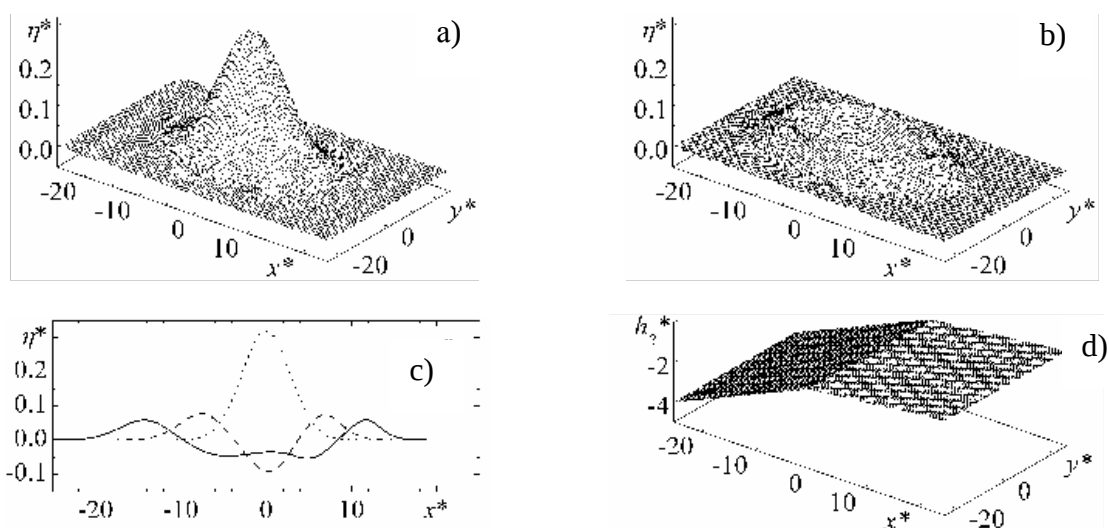


Рис. 3. Эволюция исходного колоколообразного возмущения пикноклина (где $y^* = y / H$, $\eta^* = \eta / h_{20}$, а – пикноклин при $t = 0$, б – пикноклин при $t^* = 10$, с – сечения пикноклина при $y = 0$ в три момента времени: пунктирная линия – $t = 0$, штриховая кривая – $t^* = 5$, сплошная линия – $t^* = 10$) над склоном с изломом ($h^* = h_2 / h_{20}$) при $\rho_1 / \rho_2 = 0.98$ и $h_1 / h_2 = 3$

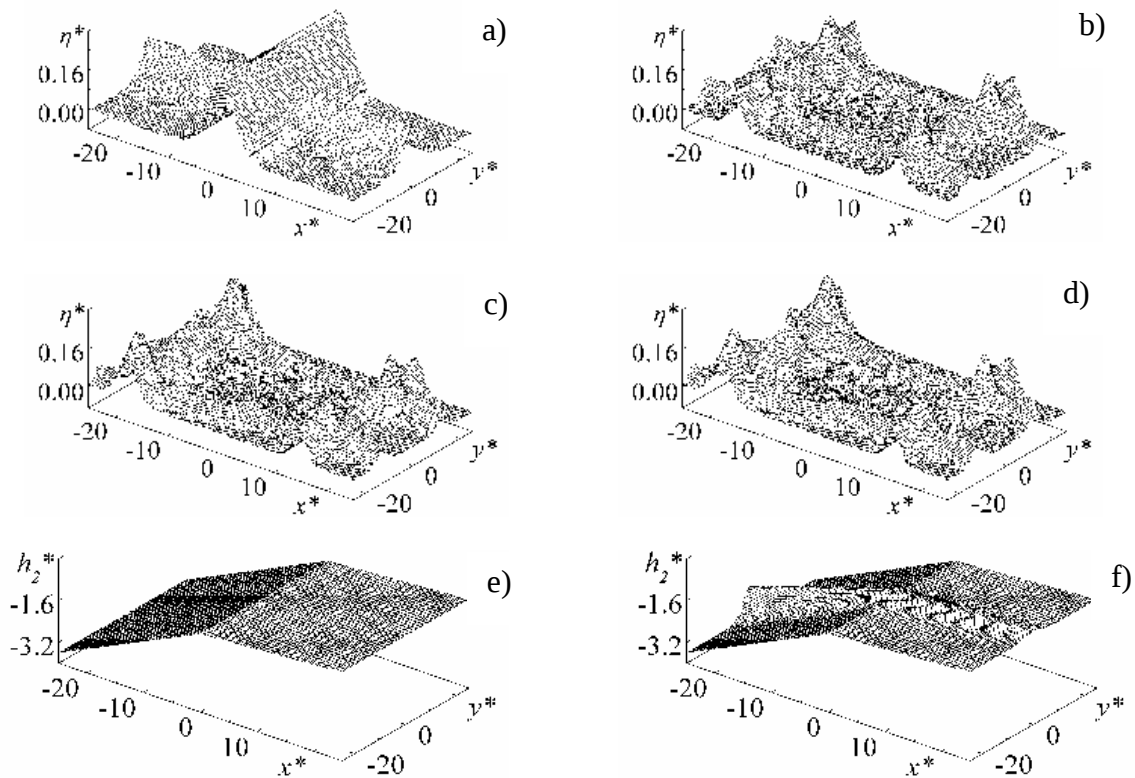


Рис. 4. Трансформация первоначально крестообразного нелинейного возмущения пикноклина (а – $t^* = 0$; б, с и д – $t^* = 14$) над горизонтальным дном (б), над склоном с изломом (с) и над склоном с изломом и подводным хребтом (д) при $\rho_1/\rho_2 = 0.98$, $h_1/h_{20} = 3$ и формы пологого дна (е – склон с изломом, ф – склон с изломом и подводным хребтом)

На рис. 3 представлена трансформация аксиально-симметричного уединенного возмущения, исходная форма которого была колоколообразной: $\eta = \eta_0 \exp[-(x^*/4)^2 - (y^*/4)^2]$ (см. рис. 3а). Рельеф дна с изломом по координате x задавался следующим образом: $h_2 = h_{20} (1 - 0.12 x^*)$ при $x < 0$ и $h_2 = h_{20} (1 - 0.03 x^*)$ при $x > 0$ (см. рис. 3с). Как и ожидалось, со временем уровень пикноклина сперва заметно снижается за фронтом основной волны, а затем слабо возрастает (см. сплошную линию на рис. 3д). Из этого же рисунка видно, что скорость и характерная ширина возмущения заметно меньше на мелководье, чем при $x < 0$. Следует отметить, что при $t^* > 5$ и $x > 0$ отношение максимального значения возмущения к соответствующей местной глубине нижнего слоя практически не меняется (приблизительно 10 %).

На рис. 4 показана эволюция возмущения, имевшего в начальный момент времени форму креста (нелинейная суперпозиция удвоенного решения (20) и такого же, но по координате y): $\eta = \eta_x$ если $\eta_x > \eta_y$ и $\eta = \eta_y$ если $\eta_y > \eta_x$, где $\eta_x = 2\eta_{xa} / \cosh^2(x/L)$, а $\eta_y = 2\eta_{ya} / \cosh^2(y/L)$. Видно, что образуются четыре квазиплоские волны, бегущие во все четыре стороны (в направлениях роста обеих горизонтальных координат и в противоположных). Четыре пика возмущения пикноклина имеют место на пересечениях этих волн.

Формы дна, изображенные на рисунках 4е и 4ф, задавались следующим образом: в обоих случаях $h_2 = h_{2-}$ при $x < 0$ и $h_2 = h_{2+}$ при $x > 0$ (в случае рис. 4е – склон с изломом по координате x $h_{2-} = h_{20} (1 - 0.1 x^*)$ и $h_{2+} = h_{20} (1 - 0.016 x^*)$, а в случае рис. 4ф – склон с изломом и подводным хребтом – $h_{2-} = h_{2y} (1 - 0.1 x^*)$ и $h_{2+} = h_{2y} (1 - 0.016 x^*)$, где $h_{2y} = h_{20} + h_{2m} \exp[-(y^*/4)^2]$). В ситуации горизонтального дна (рис. 4б) $h_2 = h_{20}$.

Рисунки 4с и 4д демонстрируют слабое снижение скорости распространения и амплитуды таких возмущений при переходе на меньшую глубину воды и, наоборот,

небольшое возрастание их скорости и амплитуды при увеличении толщины слоя жидкости по сравнению со случаем $h_2 = \text{const}$, т.е. скорости распространения волн изменяются точно так же, как и для возмущений свободной поверхности неглубокого слоя однородной жидкости, а амплитуды волн – противоположным образом. Кроме того, на рис. 4d наблюдаются дополнительные пики во фронтах тех двух квазиплоских возмущений, которые бегут вдоль подводного хребта.

* * *

Учет поверхностного натяжения, вероятно, понадобится для сравнения результатов расчетов по новой модели с опытными данными, которые могут быть измерены в лабораторных установках с двумя различными жидкостями. Тогда из уравнения (17) легко получить, что коэффициент при дисперсионном члене $C_D = h_1 h_2 (1/3 - 1/Bo)$.

Далее, для сопоставления результатов вычислений по новой модели с экспериментальными данными, которые могут быть измерены в лабораторных установках небольших размеров, вероятно, понадобится учет вязкости воды и, соответственно, нестационарного трения о дно. Последнее хоть и заметно сложнее, чем учет поверхностного натяжения, но может быть осуществлено подобно тому, как это сделано в статье [27]. Следовательно, станет возможно исследовать влияние диссипации, в частности процессы затухания и торможения волн.

Необходимо отметить, что влияние наклона дна на трансформацию внутренних волн в обеих рассмотренных здесь задачах происходило, главным образом, через изменение коэффициентов при основном и дисперсионном линейных членах уравнения (18), а правая часть уравнения (18), содержащая градиент глубины воды, была не существенна. Даже в случае рис. 4d, во-первых, данный член был на порядок меньше суммарного нелинейного члена, а во-вторых, лишь на начальной стадии процесса скалярное произведение градиента глубины воды на градиент возмущения пикноклина могло быть значительным. Впоследствии в указанной ситуации волновые векторы тех двух квазиплоских возмущений, которые бегут над подводным хребтом, были направлены вдоль него, т.е. угол между этими градиентами был близок к 90° .

Наконец, подчеркнем, что использование приближения «твердой крышки» не является принципиальным. Данный подход может быть применен и в случае, когда верхняя поверхность воды является свободной, подобно тому, как это сделано в статье [27] для слабонелинейных возмущений пикноклина, движущихся преимущественно в одном, хотя и произвольном, направлении.

Кратко сформулируем основные результаты данной работы. Предложен комбинированный метод для описания динамики умеренно длинных внутренних волн малой, но конечной амплитуды, одновременно распространяющихся в различных направлениях. Модель состоит из одного главного нелинейного эволюционного уравнения для возмущения пикноклина и четырех простых вспомогательных линейных уравнений. Последние нужны для нахождения векторов горизонтальных скоростей воды, входящих лишь в члены второго порядка малости основного уравнения. С помощью численных экспериментов показана пригодность этого подхода к решению ряда характерных плоских и пространственных задач для нелинейных волн, в том числе с учетом пологих неровностей дна.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 07-01-00574).

Литература

1. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. М.: Гидрометеиздат, 1980.
2. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. М.: Мир, 1981.
3. Морозов Е.Г. Океанические внутренние волны. М.: Наука, 1985.

4. Сабинин К.Д., Серебряный А.Н., Назаров А.А. Интенсивные внутренние волны в Мировом океане // Океанология. 2004. Т.44. № 6. С.805-810.
5. Keulegan G.H. Characteristics of internal solitary waves // J. Res. Nat. Bureau Standards. 1953. V.51. No.3. P.133-140.
6. Хабахнашев Г.А. Распространение внутренних и поверхностных двумерных нелинейных волн в океане со скачком плотности и пологим дном // Изв. РАН, Физ. атм. океана. 2001. Т.37. № 3. С.397-406.
7. Миропольский Ю.З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981.
8. Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985.
9. Ильичев А.Т. Уединенные волны в моделях гидродинамики. М.: Физматлит, 2003.
10. Djordjevic V.D., Redekopp L.G. The fission and disintegration of internal solitary waves moving over two-dimensional topography // J. Phys. Oceanogr. 1978. V.8. No.6. P.1016-1024.
11. Koop C.G., Butler G. An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech. 1981. V.112. P.225-251.
12. Хабахнашев Г.А. Эволюция возмущений границы раздела двух слоев вязкой жидкости // Изв. АН СССР, Мех. жидк. газа. 1990. № 6. С.118-123.
13. Хабахнашев Г.А. Трансформация длинных нелинейных волн в двухслойной вязкой жидкости между пологими дном и крышкой // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т.46. № 6. С.45-57.
14. Helfrich K.R., Melville W.K. Long nonlinear internal waves // Annu. Rev. Fluid Mech. 2006. V.38. P.395-425.
15. Архипов Д.Г., Хабахнашев Г.А. Новый подход к описанию пространственных нелинейных волн в диспергирующих средах // Докл. Акад. наук. 2006. Т.409. № 4. С.476-480.
16. Walker R.L. Interfacial solitary waves in two-fluid medium // Phys. Fluids. 1973. V.16. No.11. P.1796-1804.
17. Segur H., Hammack J.L. Solitary models of long internal waves // J. Fluid Mech. 1982. V.118. P.285-304.
18. Гаврилов Н.В. Вязкое затухание уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1988. Т.29. № 4. С.51-55.
19. Maurer J., Hutter K., Diebels S. Viscous effect in internal waves of two-layered fluid with variable depth // Eur. J. Mech. B/Fluids. 1996. V.15. No.4. P.445-470.
20. Wessels F., Hutter K. Interaction of internal waves with a topographic sill in a two-layered fluid // J. Phys. Oceanogr. 1996. V. 26. No. 1. P. 5-20.
21. Michallet H., Barthélemy E. Ultrasonic probes and data processing to study interfacial solitary waves // Experiments in Fluids. 1997. V. 22. No. 5. P. 380-386.
22. Мальцева Ж.Л. Нестационарные длинные волны в двухслойной жидкости // Динамика сплошной среды. 1989. Вып.93-94. С.96-110.
23. Choi W., Camassa R. Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech. 1999. V.396. P.1-36.
24. Хабахнашев Г.А. Нелинейное эволюционное уравнение для достаточно длинных двумерных волн на свободной поверхности вязкой жидкости // Вычислительные технологии. 1997. Т.2. № 2. С. 94-102.
25. Литвиненко А.А., Хабахнашев Г.А. Численное моделирование нелинейных достаточно длинных двумерных волн на воде в бассейнах с пологим дном // Вычислительные технологии. 1999. Т.4. № 3. С.95-105.
26. Островский Л.А., Потапов А.И. Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит. 2003.
27. Хабахнашев Г.А. Динамика длинных пространственных нелинейных волн в океане со скачком плотности и слабонаклонным дном // Океанология. 2008. Т.48. № 4. С.501-509.

Статья поступила в редакцию 19.03.2009 г.