

УДК 532.59+532.516.5+519.63

З.И.Федотова¹, Л.Б.Чубаров¹, Г.С.Хахимзянов¹

НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННЫЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВОЙ ГИДРОДИНАМИКИ В ЗАДАЧАХ О ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН ЦУНАМИ ОПОЛЗНЕМ

Рассмотрены вопросы математического моделирования генерации волн цунами подвижным оползнем. Отмечено, что нелинейно-дисперсионные модели предпочтительнее классических моделей мелкой воды, так как они описывают более сложное поведение волн благодаря способности воспроизводить дисперсию и отражать неоднородность процесса в вертикальном направлении. Для учета движения оползня уравнения, определяющие модель, должны учитывать нестационарность донной поверхности. Основным результатом работы является анализ условий получения нелинейно-дисперсионных моделей волновой гидродинамики для случая подвижного дна акватории, а также алгоритм единообразного вывода моделей Грина-Нагди, Алешкова и Железняк-Пелиновского для этого случая. Обсуждены также и некоторые вопросы численной реализации нелинейно-дисперсионных уравнений.

Интерес к задачам генерации длинных волн вследствие перемещения больших масс грунта обусловлен известными фактами возникновения “аномальных” несейсмических волн цунами под воздействием механизмов, когда незначительные по мощности землетрясения порождают серьезные по своим последствиям катастрофические волны [1-3]. Изучение генерации цунами оползнями имеет долгую историю, но особый всплеск интереса к этому явлению проявился после события 1998 г. в Папуа-Новой Гвинее, унесшего большое количество человеческих жизней. Для математического моделирования гидродинамического аспекта такого класса явлений требуется описание динамики морского дна вследствие схода оползней или других типов внезапного движения грязевых или твердых масс грунта. В работах [1, 3-8] и других изучалась возможность применения приближенных и полных математических моделей длинноволновой гидродинамики для описания оползневого механизма генерации поверхностных волн. Моделирование поверхностных волн в рамках полных моделей гидродинамики требует большого времени расчета [5, 6]. Так, в статье [5] численно исследовались волновые режимы, возникающие при движении подводного оползня. Специфика моделирования таких волн определяется большой длительностью перемещения оползня от берега в глубоководную часть водоема, необходимостью использования расчетной области большой протяженности и сеток с большим числом узлов. В результате расчет одного варианта по полной модели занимал несколько часов. Приближенные же модели требуют меньших временных затрат, причем общая картина возникающих волновых режимов удовлетворительно описывается даже с помощью простейших моделей. Однако было замечено, что для детального моделирования явления на продолжительное время требуются модели, способные воспроизводить дисперсию и отражать неоднородность процесса в вертикальном направлении. Это было показано, например, в работах [7, 8], где для изучения генерации волн движущимся по откосу твердым недеформируемым телом были применены как различные приближенные, так и полные уравнения гидродинамики. В работе [4] целесообразность использования нелинейно-дисперсионных (НЛД) моделей подтверждается сопоставлением с данными физического эксперимента.

¹ Институт вычислительных технологий СО РАН (Новосибирск)

Сравнительный анализ показал, что на начальной стадии процесса в случае длинного тонкого оползня все модели, от классических уравнений мелкой воды до полной модели течения идеальной жидкости, хорошо описывают наиболее заметные характеристики волнообразования, отмеченные и в эксперименте. Даже линейная модель мелкой воды в начальной части процесса показывает картину, достаточно близкую к экспериментальным данным, однако с развитием процесса осредненные по вертикали уравнения приводят к весьма упрощенному волновому полю, далекому от полученного в эксперименте. Кроме того, уравнения мелкой воды показывают значительное превышение амплитудных характеристик. Что касается НЛД-моделей, то они воспроизводят более сложную картину волнового поля: под влиянием дисперсии увеличивается число волн, усложняется процесс перестройки свободной поверхности в момент остановки оползня, уменьшаются амплитуды волн, распространяющихся в сторону мелководья. Причина указанных эффектов – более точное по сравнению с гидростатическим описание вертикальной структуры процессов.

В работе [4] применялись модели типа Буссинеска [9], при выводе которых предполагалась малость амплитуды. При использовании НЛД-уравнений, свободных от этого ограничения (назовем их полными НЛД-моделями), точность воспроизведения волнового поля повышается, что показано в работе [7, 8] путем сравнения с расчетами по полной гидродинамической модели, которая с высокой точностью воспроизводит как амплитудный, так и частотный характер волнового режима [4, 10]. Анализ способов вывода известных НЛД-моделей, работающих в случае нестационарного дна, показал, что большинство моделей получено при использовании предположения о малости амплитуды [9, 10], но есть и полные НЛД-модели: это хорошо известные уравнения Грина-Нагди [11], модель Алешкова [12] и модель Лью- Линетта, применяемая в одно- и двухслойном вариантах [10, 13]. Модели различаются тем, что в каждой из них по-своему определяется приближенная скорость. Что касается широко используемой модели Железняк-Пелиновского, то она была выведена [14, 15] в предположении, что дно неподвижно. В настоящей работе выполнено обобщение этой модели на случай изменяющейся донной поверхности и показано, что, как и в случае стационарного дна [15], системы уравнений Грина-Нагди и Железняк-Пелиновского, хотя и имеют изначально различный вид определяющих уравнений, эквивалентны и являются разными формами записи одной и той же системы уравнений теории мелкой воды второго приближения. Отметим, что для получения уравнений Железняк-Пелиновского нами применен простой, основанный на интегральных законах сохранения способ вывода; этим же способом здесь выведены НЛД-уравнения моделей Грина-Нагди и Алешкова.

Сравнение различных моделей. Проблема сравнительного изучения различных математических моделей в контексте исследования оползневого механизма генерации поверхностных волн, в частности волн цунами, в последние годы занимает многих авторов [1, 4, 7, 8]. Здесь для сравнения различных моделей приведены примеры вычислительных экспериментов по моделированию волнового режима, порожденного движением твердого оползня. Для поиска ответа на вопрос о выборе наиболее адекватной приближенной модели следует обратиться к анализу мареограмм, рассчитанных в удаленной мористой точке. Как видно из рисунка 1, учет дисперсии, даже в ее линейном представлении, приводит к существенному усложнению волнового режима при одновременном сохранении базовых характеристик. Следует отметить близость результатов, полученных по моделям Перегринна и Грина-Нагди (слабо-нелинейный вариант [9]) – их линейные аналоги совпадают.

Следующим является вопрос о важности учета нелинейных дисперсионных членов. Для этого была рассмотрена НЛД-модель Лью-Линетта, учитывающая нелинейную дисперсию, и модель Нвогу, которая следует из вышеуказанной модели в случае пренебрежения нелинейной дисперсией [10].

На рис. 2 демонстрируется значительный эффект нелинейности дисперсии.

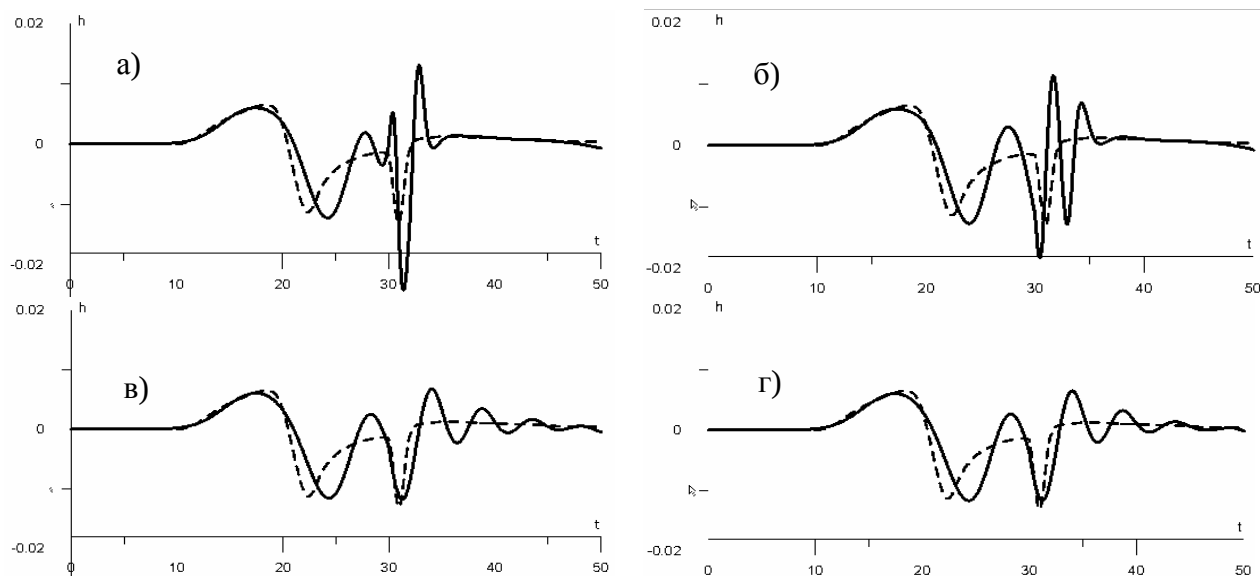


Рис. 1. Результаты, рассчитанные по НЛД-моделям (сплошные линии) с линейной дисперсией: (а) – модель Ле Меоте, б) – упрощенная модель Нвогу, в) – модель Перегрин, г) – модель Грина-Нагди. Для сравнения приведены результаты, рассчитанные с использованием модели нелинейной мелкой воды (пунктир)

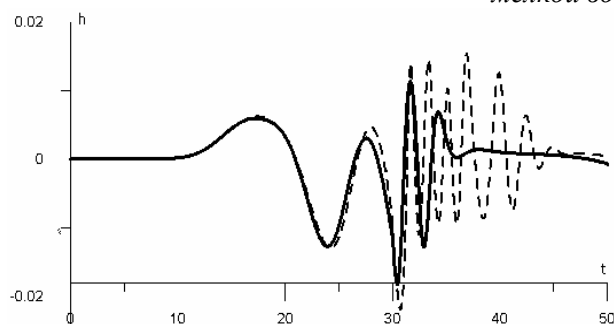


Рис. 2. Эффект нелинейной дисперсии: результаты, полученные по полной нелинейно-дисперсионной модели Лью-Линетта (пунктир) и модели Нвогу с линейной дисперсией (сплошная линия)

Интерес авторов данной работы по ряду причин связан с полной НЛД-моделью Железняк-Пелиновского, потому, в частности, что она хорошо изучена и для нее построены эффективные конечно-разностные алгоритмы, в том числе, с использованием адаптивных криволинейных сеток [16], и авторы неоднократно применяли ее для расчетов волновых полей. Ниже будет выполнено обобщение этой модели на случай изменяющейся донной поверхности.

Формулировка задачи. Пусть слой несжимаемой идеальной жидкости ограничен снизу подвижным дном $z = -h(x, y, t)$, а сверху – свободной границей $z = \eta(x, y, t)$, t – время, x, y, z – координаты точки в декартовой системе координат $Oxyz$ с осью Oz , направленной вертикально вверх, и плоскостью Oxy , совпадающей с невозмущенной свободной поверхностью. В полной постановке задачи требуется найти вектор скорости $\mathbf{U} = (u_1, u_2, w)$, давление p и функцию η , которые для произвольного значения ζ из промежутка $-h \leq \zeta \leq \eta$ удовлетворяют системе интегральных соотношений:

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\nabla \mathbf{u} + w_z) dz = 0, \quad (1)$$

$$\int_{\zeta}^{\eta} (\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + w \mathbf{u}_z + \nabla p) dz = 0, \quad (2)$$

$$\int_{\zeta}^{\eta} (w_t + \mathbf{u} \cdot \nabla w + w w_z + p_z) dz = - \int_{\zeta}^{\eta} g dz \quad (3)$$

и краевым условиям на свободной границе и дне:

$$(\eta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \eta - w) \Big|_{z=\eta} = 0, \quad (4)$$

$$p \Big|_{z=\eta} = 0, \quad (5)$$

$$(h_t + \mathbf{u} \cdot \nabla h + w) \Big|_{z=-h} = 0, \quad (6)$$

где $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ – вектор горизонтальной составляющей скорости, $\nabla \mathbf{u} = u_{1,x} + u_{2,y}$; g – ускорение свободного падения.

Приближенные модели выводятся при определенных предположениях относительно решения задачи (1)–(6), при этом искомыми обычно являются полная глубина жидкости $H = \eta + h$ и вектор скорости $\mathbf{c} = \mathbf{c}(x, y, t)$, связанный некоторым образом со скоростью $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ трехмерного течения. Например, в качестве $\mathbf{c}$ можно взять осреднение горизонтальной составляющей скорости по глубине:

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} \mathbf{u} dz. \quad (7)$$

Тогда для любой приближенной модели получается уравнение неразрывности вида:

$$H_t + \nabla(H\mathbf{v}) = 0. \quad (8)$$

Оно следует из уравнения (1), записанного при $\zeta = -h$, после применения правила Лейбница с учетом условий (4), (6).

Пусть вектор $\mathbf{c}$ выбран так, что:

$$\int_{-h}^{\eta} (\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + w \mathbf{u}_z) dz = H (\mathbf{c}_t + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{c} - \mathbf{a}), \quad (9)$$

где $\mathbf{a}$ – некоторая поправка, зависящая от $\mathbf{c}$, H , h и их производных. Отметим, что если $\mathbf{a} = 0$, то соотношение (9) означает, что осредненная по глубине горизонтальная составляющая вектора ускорения равна вектору ускорения в приближенной модели. Учитывая (9) и динамическое условие (5), интегральное соотношение (2) при $\zeta = -h$ можно записать в виде:

$$H (\mathbf{c}_t + (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{c} - \mathbf{a}) + \nabla \int_{-h}^{\eta} p dz - p \Big|_{z=-h} \nabla h = 0. \quad (10)$$

Теперь для вывода уравнения движения приближенной модели достаточно знать распределение по глубине давления в исходном трехмерном течении. Это можно получить из интегрального соотношения (3) при некоторых предположениях относительно вида скорости $\mathbf{U}$. Далее указанным способом будут получены определяющие уравнения моделей Железняк-Пелиновского, Грина-Нагди и Алешкова для случая нестационарной донной поверхности.

Уравнения приближенной модели Грина-Нагди. При выводе этой модели предполагается [11], что $\mathbf{u}$ – горизонтальная составляющая скорости $\mathbf{U}$ – постоянна по глубине, а вертикальная составляющая w – линейна по z :

$$w = w_0(x, y, t) + [z + h(x, y, t)] w_1(x, y, t). \quad (11)$$

Так как здесь $\mathbf{u}_z = 0$, возьмем скорость $\mathbf{u}$ за искомым вектор $\mathbf{c}$. Такое $\mathbf{u}$ совпадает со своим осреднением $\mathbf{v}$, поэтому уравнение неразрывности в модели Грина-Нагди имеет вид (8), где вместо $\mathbf{v}$ следует использовать $\mathbf{u}$.

Для вертикальной составляющей w вида (11) из (6) следует, что $w_0 = -Dh$, а из кинематического условия (4) нетрудно получить, что $w_1 = DH/H$, где D – оператор полной производной: $D = \partial/\partial t + \mathbf{c} \cdot \nabla$. Из уравнения (8) вытекает, что $DH = -H \nabla \mathbf{c}$, поэтому (11) запишем как $w = -Dh - (z + h) \nabla \mathbf{c}$. Тогда $Dw = -D^2 h - \nabla \mathbf{c} Dh - (z + h) D(\nabla \mathbf{c})$,

$w w_z = \nabla c D h + (z + h)(\nabla c)^2$, поэтому из (3) при учете условия (5) следует, что давление p является квадратичной функцией от z ($-h \leq z \leq \eta$):

$$p = -\frac{H^2}{2} R_1 + H(g - R_2) - (z + h)(g - R_2) + \frac{(z + h)^2}{2} R_1, \quad (12)$$

$$R_1 = D(\nabla c) - (\nabla c)^2, \quad R_2 = D^2 h.$$

Поскольку $u_z = 0$ и $c = u$, то справедливо соотношение (9) при $a \equiv 0$, а, следовательно, в уравнении (10) можно вычислить члены с давлением, применив (12):

$$\nabla \int_{-h}^{\eta} p dz - p|_{z=-h} \nabla h = g H \nabla \eta - \nabla \left(\frac{1}{3} H^3 R_1 + \frac{1}{2} H^2 R_2 \right) + H \nabla h \left(\frac{1}{2} H R_1 + R_2 \right). \quad (13)$$

В результате уравнение движения приближенной модели принимает вид:

$$c_t + (c \cdot \nabla) c + g \nabla \eta = \frac{1}{H} \nabla \left(\frac{H^3}{3} R_1 + \frac{H^2}{2} R_2 \right) - \nabla h \left(\frac{H}{2} R_1 + R_2 \right). \quad (14)$$

Используя уравнение неразрывности (8), получим эквивалентную формулу для R_1 :

$$R_1 = -D^2 H / H = -(D^2 h + D^2 \eta) / H.$$

Применив равенства:

$$(H/2) R_1 + R_2 = (1/2) D^2 (h - \eta), \quad (H^3/3) R_1 + (H^2/2) R_2 = (H^2/6) D^2 (h - 2\eta)$$

и сделав ряд простых выкладок в правой части уравнения (14), приходим к уравнению движения модели Грина-Нагди, полученного в работе [17]:

$$c_t + (c \cdot \nabla) c + g \nabla \eta = 1/6 \left(-D^2 \eta \nabla (4\eta + h) + D^2 h \nabla (2\eta - h) - (\eta + h) \nabla (2D^2 \eta - D^2 h) \right). \quad (15)$$

Подчеркнем, что уравнения (14) и (15) эквивалентны, так как получаются одно из другого путем элементарных преобразований.

Уравнения модели Железняк-Пелиновского для подвижного дна. В этой модели искомыми величинами являются полная глубина $H = \eta + h$ и осредненная скорость v . В таком случае, как указано выше, уравнение неразрывности будет иметь вид (8), при этом $c = v$. Как и в модели Грина-Нагди, считаем, что вертикальная компонента скорости w имеет вид (11), а горизонтальные компоненты определяются по-другому – они являются квадратичными функциями переменной z . Наводящие соображения относительно вида этих функций основаны на предположении о потенциальности течения и разложении потенциала скорости ϕ в ряд по параметру $\beta = h_0^2 / L^2$, где h_0 и L – характерные глубина и длина. Вывод уравнений для стационарного дна приводится в ряде работ [14–16].

Укажем основные шаги вывода уравнений в случае нестационарного дна, где $h = h(x, y, t)$. Вначале, как и в [14], выполняется обезразмеривание основных уравнений с целью выделить процессы в горизонтальном и вертикальном направлениях, затем потенциал ϕ разлагается в ряд по степеням β . Подстановка этого разложения в краевое условие на дне и уравнение Лапласа, решением которого является потенциал ϕ , позволяет получить для ϕ ряд по степеням $(z + h)$, что, после отбрасывания членов $O(\beta^2)$ и возвращения к размерному виду, приводит к соотношениям:

$$\phi = f - (z + h) D h - 1/2 (z + h)^2 \nabla v, \quad f = \phi|_{z=-h}, \quad (16)$$

$$u = \nabla \phi = v + [H/2 - z - h] (\nabla D h + \nabla h \nabla v) + [H^2/6 - (z + h)^2/2] \nabla (\nabla v), \quad (17)$$

$$w = \phi_z = -D h - (z + h) \nabla v, \quad (18)$$

$$|u|^2 = v \cdot v + [H - 2(z + h)] [v \cdot \nabla D h + \nabla v (v \cdot \nabla h)] + [H^2/3 - (z + h)^2] v \cdot \nabla (\nabla v). \quad (19)$$

В силу равенства $\mathbf{c} = \mathbf{v}$ выражения для вертикальных компонент в моделях Железня-ка-Пелиновского и Грина-Нагди совпадают. Используя равенство $\mathbf{u}_z = \nabla w$, следующее из потенциальности течения, и формулы (18), (19), из уравнения (3) получаем, что выражение (12) для давления в обеих моделях одно и то же.

Следующий, и окончательный, шаг вывода состоит в том, чтобы показать справедливость соотношения (9). Соответствующие громоздкие выкладки с применением формул (17), (19) и записью выражения $\nabla|\mathbf{u}|^2/2$ через скорость $\mathbf{v}$ с привлечением известной формулы:

$$\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})/2 = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = (v_2\omega, -v_1\omega)^T, \quad (20)$$

где $\omega = \partial v_2/\partial x - \partial v_1/\partial y$ – функция вихря в горизонтальной плоскости, здесь опущены. В итоге удастся получить, что для рассматриваемой модели, как и для модели Грина-Нагди, формула (9) верна при $\mathbf{a} \equiv 0$. Отсюда следует, что искомое уравнение движения имеет вид (14), формально совпадающий с видом аналогичного уравнения из работы [17] (разница в выражении для R_2 , которое содержит зависимость от t функции h). Одновременно, эквивалентность уравнений (14) и (15) указывает на эквивалентность дифференциальных уравнений моделей Железня-ка-Пелиновского и Грина-Нагди.

Уравнения модели Алешкова. Условия вывода модели Алешкова также включают предположение о потенциальности исходного трехмерного течения, однако здесь в качестве приближенной скорости $\mathbf{c}$ берется вектор ∇f , где $f = f(x, y, t)$ – значение потенциала ϕ на дне. Вывод модели дан в книге [12], а здесь мы укажем на возможность получения определяющих уравнений модели Алешкова тем же способом, что и для рассмотренных выше моделей. Особенность вывода этой модели в том, что вектор $\mathbf{a}$ для нее отличен от нуля.

Начнем с того, что для скорости $\mathbf{v}$ модели Железня-ка-Пелиновского из формул (7) и (16) нетрудно вывести представление через вектор $\mathbf{c} = \nabla f$, применив в правой части (7) разложение $\mathbf{u} = \nabla \phi$ по степеням β и выполнив необходимое интегрирование:

$$\mathbf{v} = \mathbf{c} - \beta(\nabla h D h + H/2 \nabla D h + H/2 \nabla \mathbf{c} \nabla h + H^2/6 \nabla(\nabla \mathbf{c})) + O(\beta^2).$$

Отбросив члены $O(\beta^2)$ и перейдя к размерным переменным, получим после подстановки этого соотношения в (8) уравнение неразрывности модели Алешкова. Его можно записать в дивергентном виде:

$$H_t + \nabla(H\mathbf{c}) = \nabla \left[H \nabla h D h + H^2 (\nabla D h + \nabla \mathbf{c} \nabla h)/2 + H^3 \nabla(\nabla \mathbf{c})/6 \right] \quad (21)$$

Установив, что вертикальная компонента скорости в модели Алешкова имеет вид (18), нетрудно заметить, что давление вычисляется по формуле (12), как и в предыдущих случаях. Если вектор $\mathbf{a}$ определить как:

$$\mathbf{a} = (H^2/6) \nabla R_1 + (H/2) \nabla R_2 + (1/2) \nabla(Dh)^2 + \nabla h((H/2) R_1 + R_2),$$

то соотношение (9) также оказывается верным, причем доказательство этого факта менее громоздко, чем для модели Железня-ка-Пелиновского, так как в модели Алешкова течение является безвихревым и аналог формулы (20) – равенство $\nabla(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c})/2 = (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{c}$ сильно упрощает необходимые вычисления. Следовательно, из формул (10) и (13) вытекает уравнение движения:

$$\mathbf{c}_t + (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{c} + g \nabla \eta = 1/2 \nabla \left(H^2 R_1 + 2 H R_2 + (Dh)^2 \right). \quad (22)$$

Таким образом, уравнения (21) и (22) составляют систему уравнений модели Алешкова.

* * *

Основным результатом настоящей работы является вывод на основе единого подхода определяющих НЛД-уравнений моделей Грина-Нагди, Железняк-Пелиновского и Алешкова для нестационарного дна. Показано, что при формулировке начально-краевой задачи для системы НЛД-уравнений следует учитывать условия вывода конкретной модели, в частности, выбор начального вектора скорости $\mathbf{c}(x, y, t)|_{t=t_0}$, тем или иным образом связанного со скоростью частиц жидкости.

Форма записи уравнений имеет немаловажное значение при конструировании эффективных численных алгоритмов. Так, уравнение (15) модели Грина-Нагди неудобно для численной реализации, поскольку оно содержит вторые производные по времени от функции η . Уравнения движения (14) и (22) моделей Железняк-Пелиновского и Алешкова, соответственно, свободны от этого недостатка и в их правых частях содержатся только первые производные по времени от скорости, что эффективно используется при построении численных алгоритмов для НЛД-уравнений [10, 16].

Уравнение неразрывности (21) модели Алешкова, в отличие от уравнения (8), записанного в дивергентной форме, содержит производные высокого порядка, и это можно считать недостатком. Однако правая часть этого уравнения имеет дивергентный вид, поэтому осложнений при численной реализации может и не возникнуть. Достоинством же формы записи уравнения движения (22) модели Алешкова, в отличие от уравнений (14), (15), является то, что правая часть записана как градиент скалярной функции, и это можно эффективно учесть при создании численного алгоритма. Наконец, несомненное достоинство модели Алешкова заключается в том, что вихрь приближенной скорости в этой модели, в отличие от двух других, равен нулю, то есть течение является потенциальным, поэтому при численном решении можно использовать богатый опыт разработки методов расчета потенциальных течений жидкости и газа [16].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-05-64869), программы Государственной поддержки научных школ Российской Федерации НШ-931.2008.9 (проекты 06-05-64869, 09-05-00294).

Литература

1. Grill S.T., Watts P. Modeling of waves generated by moving submerged body. Applications to underwater landslide // Engineering Analysis with boundary elements. 1999. V.23. P.645–656.
2. Watts P. Some opportunities of the landslide tsunami hypothesis // Sci. Tsunami Hazards. 2001. V.19. No.3. P.126–149.
3. Watts P., Grilli S.T., Kirby J.T., Fryer G.J., Tappin D.R. Landslide tsunami case studies using a Boussinesq model and a fully nonlinear tsunami generation model // Natural Hazards and Earth System Sciences. 2003. V.3. No.5. P.391–402.
4. Елецкий С.В., Майоров Ю.Б., Максимов В.В., Нуднер И.С., Федотова З.И., Хажоян М.Г., Хакимзянов Г.С., Чубаров Л.Б. Моделирование генерации поверхностных волн перемещением фрагмента дна по береговому склону // Совместный вып.: Вычисл.технологии, т.9, спец.вып. & Вест. КазНУ им.Аль-Фараби. Сер. математика, механика, информатика. № 3(42). Ч.II. 2004. С.194–206.
5. Хажоян М.Г. Численное моделирование поверхностных волн над подвижным дном // Вычислительные технологии. 2007. Т.12. № 4. С.96–105.
6. Khakimzyanov G.S., Khazhoyan M.G. Numerical simulation of the interaction between surface waves and submerged obstacles // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2004. V.11. No.1. P.17–34.
7. Beisel S.A., Chubarov L.B., Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S. On the approaches to a numerical modeling of landslide mechanism of tsunami wave generation // Communications in Applied Analysis. 2007. V.11. No.1. P.121–135.
8. Shokin Yu.I., Fedotova Z.I., Khakimzyanov G.S., Chubarov L.B., Beisel S.A. Modelling surfaces waves generated by a moving landslide with allowance for vertical flow structure // Rus. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2007. V.22. No.1. P.63–85.

9. Дорфман А.А., Яговдик Г.И. Уравнения приближенной нелинейно-дисперсионной теории длинных гравитационных волн, возбуждаемых перемещениями дна и распространяющихся в бассейне переменной глубины // Числ. методы механики сплошной среды. 1977. Т.8. № 1. С.36–48.
10. Lynett P.J., Liu P.L.-F. A numerical study of submarine-landslide-generated waves and run-up // Proc. Royal Society of London. A. 2002. V.458. P.2885–2910.
11. Green A.E., Naghdi P.M. A derivation of equations for wave propagation in water of variable Depth // J. Fluid Mech. 1976.V.78. Part 2. P.237–246.
12. Алешков Ю.З. Течение и волны в океане. СПб.: СПбГУ, 1996.
13. Lynett P.J., Liu P.L.-F. A two-layer approach to water wave modeling // Proc. Royal Society of London. A. 2004. V.460. P.2637–2669.
14. Железняк М.И., Пелиновский Е.Н. Физико-математические модели наката цунами на берег // Накат цунами на берег: Сб.научн.тр. / Горький: ИПФ АН СССР, 1985. С.8–33.
15. Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.: Гидрометеиздат, 1989.
16. Хакимзянов Г.С., Шокин Ю.И., Барахнин В.Б., Шокина Н.Ю. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.
17. Ertekin R.C., Webster W.C., Wehausen J.V. Waves caused by a moving disturbance in a shallow channel of finite width // J. Fluid Mech. 1986. V.169. P.275–292.

Статья поступила в редакцию 17.11.2008 г.