

УДК 532.59

О.Ф.Воропаева¹, Н.П.Мошкин¹, Г.Г.Черных¹

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН, ГЕНЕРИРУЕМЫХ ТУРБУЛЕНТНЫМИ СЛЕДАМИ ЗА САМОДВИЖУЩИМСЯ И БУКСИРУЕМЫМ ТЕЛАМИ В УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

Представлены результаты численного моделирования динамики внутренних волн, генерируемых турбулентными следами за самодвижущимся и буксируемым телами в устойчиво стратифицированной жидкости. Рассмотрены случаи линейного и нелинейного распределений плотности по глубине. Показано, что турбулентный след за буксируемым телом генерирует волны значительно большей амплитуды, чем след за самодвижущимся телом. Дана физическая интерпретация полученного результата.

Факт генерации турбулентными следами внутренних волн достаточно хорошо известен [1–14]. При сравнительно слабой стратификации турбулентный след вначале развивается почти так же, как и в однородной жидкости и расширяется симметрично. Однако турбулентной диффузии в вертикальном направлении препятствуют архимедовы силы, поэтому на больших расстояниях от тела след приобретает сплюснутую форму и перестает расти в вертикальном направлении. Поскольку вследствие турбулентного перемешивания плотность жидкости в пределах следа распределена более равномерно, чем вне его, архимедовы силы стремятся восстановить прежнее состояние устойчивой стратификации. В результате в плоскости, перпендикулярной оси следа, возникают конвективные течения, приводящие к интенсивной генерации внутренних волн [2].

Обзор работ, посвященных изучению турбулентных следов и индуцируемых ими внутренних волн, выполнен в [8–10].

Анализируя работы по численному моделированию динамики генерируемых турбулентными следами внутренних волн, можно отметить следующее. Внутренние волны, генерируемые турбулентными следами за самодвижущимися телами, достаточно подробно рассмотрены как для случая линейно стратифицированной жидкости [2, 4, 6, 7, 10, 11], так и в пикноклине [6, 9]. Внутренние волны, генерируемые турбулентными следами за буксируемыми телами, изучены недостаточно [5, 7, 12]. Построенная в [5, 7, 12] численная модель турбулентного следа за буксируемым телом основана на применении локально-равновесных аппроксимаций для компонент тензора рейнольдсовых напряжений. Ее использование для расчета характеристик турбулентных следов и генерируемых ими внутренних волн в пикноклине приводит к физически неправдоподобным результатам. Ниже представлена построенная авторами численная модель внутренних волн, генерируемых турбулентными следами в устойчиво стратифицированной среде. Осуществлено сопоставление параметров внутренних волн, генерируемых турбулентными следами за буксируемым и самодвижущимся телами. Работа является развитием и продолжением [12, 13].

Постановка задачи. Система уравнений, описывающая течение в дальнем турбулентном следе за телом вращения в стратифицированной среде, включает в себя осредненные уравнения движения, неразрывности и несжимаемости :

¹ Институт вычислительных технологий СО РАН (Новосибирск)

$$U_\infty \frac{\partial U_d}{\partial x} + V \frac{\partial U_d}{\partial y} + W \frac{\partial U_d}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle + \frac{\partial}{\partial z} \langle u'w' \rangle \quad (1)$$

$$U_\infty \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'^2 \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle v'w' \rangle \quad (2)$$

$$U_\infty \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'w' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle w'^2 \rangle - g \frac{\langle \rho_1 \rangle}{\rho_0} \quad (3)$$

$$U_\infty \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} + W \frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial z} + W \frac{d\rho_s}{dz} = -\frac{\partial}{\partial y} \langle v'\rho' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle w'\rho' \rangle \quad (4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Система координат связана с движущимся телом так, что скорость его движения равна $-U_\infty$; ось z направлена вертикально вверх, против силы тяжести. В уравнениях (1)–(5) приняты следующие обозначения: U, V, W – компоненты скорости осредненного движения в направлении осей x, y, z ; $U_d = U_\infty - U$ – дефект осредненной продольной компоненты скорости; p_1 – отклонение давления от гидростатического, обусловленного стратификацией $\rho_s(z)$; g – ускорение силы тяжести; $\langle \rho_1 \rangle$ – осредненный дефект плотности, $\rho_1 = \rho - \rho_s$, где $\rho_s = \rho_s(z)$ – плотность невозмущенной жидкости, $\rho_0 = \rho_s(0)$; штрихом обозначены пульсационные составляющие; $\langle \rangle$ – знак осреднения. Плотность жидкости считается линейной функцией температуры; стратификация предполагается устойчивой ($d\rho_s/dz \leq 0$) и слабой, используется приближение Обербека-Буссинеска. В уравнениях (1)–(4) отброшены, в предположении малости, члены с молекулярной вязкостью (диффузией) и слагаемое $-(1/\rho_0)\partial \langle p_1 \rangle / \partial x$ в (1). Так же, как и в [9-11, 15], слагаемое $\partial U / \partial x$ в уравнении (5) отброшено как малое. Это предположение основывается на том, что в случае однородной жидкости, когда $g = 0$ и $V = W = 0$, система уравнений (1)–(5) эквивалентна классической системе уравнений дальнего турбулентного следа. В стратифицированной среде динамика следа характеризуется наличием генерируемого им конвективного течения. Вырождение компонент скорости V, W происходит значительно медленнее, чем вырождение U_d . Применение (5) значительно упрощает численный алгоритм и его реализацию. Численные эксперименты, обосновывающие такой подход, представлены в [12]. Система уравнений (1)–(5) незамкнута; для ее замыкания привлекается модифицированная $(e - \varepsilon)$ -модель турбулентности, аналогичная используемой в [10]. В этой модели неизвестные величины реинольдсовых напряжений $\langle u_i'^2 \rangle (i = j = 1, 2, 3)$, $\langle u'v' \rangle$, $\langle u'w' \rangle$ и потоков $\langle u_i'\rho' \rangle (i = 1, 2, 3)$ определяются из алгебраических аппроксимаций [16] (здесь по повторяющимся индексам предполагается суммирование):

$$\frac{\langle u_i' u_j' \rangle}{e} = \frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{1 - C_2}{C_1} \left(\frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{P}{\varepsilon} \right) + \frac{1 - C_3}{C_1} \left(\frac{G_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{G}{\varepsilon} \right) \quad (6)$$

$$P_{ij} = - \left\{ \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \langle u_j' u_k' \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\}, \quad G_{ij} = \frac{1}{\rho_0} (\langle u_i' \rho' \rangle g_j + \langle u_j' \rho' \rangle g_i)$$

$$\vec{g} = (0, 0, -g), \quad U_1 = U, \quad U_2 = V, \quad U_3 = W, \quad 2P = P_{ii}, \quad 2G = G_{ii}$$

$$-\langle u_i' \rho' \rangle = \frac{e}{C_{1T}\varepsilon} \left\{ \langle u'w' \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + (1 - C_{2T}) \langle w'\rho' \rangle \frac{\partial U}{\partial z} \right\}$$

$$-\langle v' \rho' \rangle = \frac{\langle v'^2 \rangle e}{C_{1T} \varepsilon} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y} \quad (7)$$

$$-\langle w' \rho' \rangle = \frac{e}{C_{1T} \varepsilon} \left\{ \langle w'^2 \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} + \frac{1 - C_{2T}}{\rho_0} g \langle \rho'^2 \rangle \right\}. \quad (8)$$

Величина дисперсии турбулентных флуктуаций плотности $\langle \rho'^2 \rangle$ аппроксимируется известным локально-равновесным алгебраическим соотношением [9, 10]:

$$\langle \rho'^2 \rangle = -\frac{2}{C_T} \frac{e}{\varepsilon} \langle w' \rho' \rangle \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}. \quad (9)$$

Наконец, для определения энергии турбулентности e , скорости диссипации ε и касательного рейнольдсова напряжения $\langle v' w' \rangle$ воспользуемся соответствующими дифференциальными уравнениями переноса:

$$U_\infty \frac{\partial e}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial y} + W \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{ey} \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{ez} \frac{\partial e}{\partial z} + P + G - \varepsilon \quad (10)$$

$$U_\infty \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + W \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{\varepsilon y} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{\varepsilon z} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} (P + G) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e} \quad (11)$$

$$U_\infty \frac{\partial \langle v' w' \rangle}{\partial x} + V \frac{\partial \langle v' w' \rangle}{\partial y} + W \frac{\partial \langle v' w' \rangle}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} K_{ey} \frac{\partial \langle v' w' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_{ez} \frac{\partial \langle v' w' \rangle}{\partial z} + (1 - C_2) P_{23} + (1 - C_3) G_{23} - C_1 \frac{\varepsilon}{e} \langle v' w' \rangle \quad (12)$$

$$P_{23} = - \left\{ \langle v'^2 \rangle \frac{\partial W}{\partial y} + \langle w'^2 \rangle \frac{\partial V}{\partial z} \right\}.$$

Коэффициенты турбулентной вязкости определяются из соотношений (6) [10]:

$$K_{ey} = \frac{1 - C_2}{C_1} \frac{e \langle v'^2 \rangle}{\varepsilon}, \quad K_{\varepsilon y} = K_{ey} / \sigma; \quad (13)$$

$$K_{ez} = \frac{(1 - C_2) e \langle w'^2 \rangle - \frac{(1 - C_3)(1 - C_{2T})}{C_{1T}} \frac{g}{\rho_0} \frac{e^2}{\varepsilon} \langle w' \rho' \rangle}{C_1 \varepsilon \left(1 - \frac{(1 - C_3) g}{C_1 C_{1T}} \frac{e^2}{\rho_0 \varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \right)}, \quad K_{\varepsilon z} = K_{ez} / \sigma, \quad (14)$$

так что

$$-\langle u' v' \rangle = K_{ey} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad -\langle u' w' \rangle = K_{ez} \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Для нахождения компонент вектора потоков $\langle v' \rho' \rangle$, $\langle w' \rho' \rangle$ воспользуемся следствием соотношений локально-равновесного приближения (7)–(9):

$$-\langle v' \rho' \rangle = K_{\rho y} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial y}, \quad -\langle w' \rho' \rangle = K_{\rho z} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z}$$

$$K_{\rho y} = \frac{\langle v'^2 \rangle e}{C_{1T} \varepsilon}, \quad K_{\rho z} = \frac{e \langle w'^2 \rangle}{C_{1T} \varepsilon \left(1 - 2 \frac{g}{\rho_0} \frac{1 - C_{2T}}{C_{1T} C_T} \frac{e^2}{\varepsilon^2} \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial z} \right)}. \quad (15)$$

В соотношениях и уравнениях (6)–(15) величины $C_1 = 2.2$, $C_2 = C_3 = 0.55$, $C_{1T} = 3.2$, $C_{2T} = 0.5$, $C_T = 1.25$, $C_{\varepsilon 1} = 1.45$, $C_{\varepsilon 2} = 1.9$, $C_s = 0.25$, $\sigma = 1.3$ – эмпирические постоянные [16].

Выбор именно этой модели турбулентности обусловлен ее относительной простотой, близостью к классической $e \sim \varepsilon$ – модели турбулентности и возможностью учесть анизотропию характеристик турбулентности в следе в стратифицированной жидкости. Более того, как показывают численные эксперименты [10], характеристики внутренних волн слабо зависят от применяемой модели турбулентности.

Маршевая переменная x в уравнениях (1)–(5), (10)–(12) играет роль времени. На расстоянии x_0 от тела задаются следующие начальные условия:

$$e(x_0, y, z) = \Phi_1(r), \quad \varepsilon(x_0, y, z) = \Phi_2(r), \quad U_d(x_0, y, z) = \Phi_3(r), \quad r^2 = y^2 + z^2, \quad 0 \leq r \leq \infty, \\ \langle \rho_1 \rangle = V = W = \langle v'w' \rangle = 0, \quad -\infty < z < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad x = x_0.$$

Здесь $\Phi_1(r)$, $\Phi_2(r)$, $\Phi_3(r)$ – колоколообразные функции, согласующиеся с экспериментальными данными об эволюции турбулентных следов в однородной жидкости. При $r^2 = y^2 + z^2 \rightarrow \infty$ ставились условия невозмущенного потока:

$$V = W = \langle \rho_1 \rangle = e = \varepsilon = \langle v'w' \rangle = 0, \quad x \geq x_0.$$

При численном решении задачи нулевые краевые условия, соответствующие $r \rightarrow \infty$, сносились на границы достаточно большого прямоугольника.

В данной работе рассматриваются случаи линейного $\rho_{ls}(z) = \rho_0(1 - az)$ и нелинейного $\rho_{ns} = \rho_0(1 - a\beta \tanh(z/\beta))$, $\beta = const \geq 0$ распределений плотности по глубине. Для таких распределений плотности справедливы соображения симметрии, когда решение отыскивается лишь в первом квадранте плоскости (y, z) . Граничные условия на осях симметрии принимаются следующими:

$$\frac{\partial \langle \rho_1 \rangle}{\partial y} = V = \langle v'w' \rangle = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial U_d}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad z \geq 0 \\ \langle \rho_1 \rangle = W = \langle v'w' \rangle = \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial U_d}{\partial z} = \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad y \geq 0.$$

В качестве масштабов длины и скорости при обезразмеривании используются диаметр тела D и скорость набегающего потока U_∞ . Безразмерные переменные вводятся следующим образом:

$$x^* = x/D, \quad y^* = y/D, \quad z^* = z/D, \quad U_i^* = U_i/U_\infty, \quad \langle u'_i u'_j \rangle^* = \langle u'_i u'_j \rangle / U_\infty^2, \quad e^* = e/U_\infty^2 \\ \varepsilon^* = \varepsilon D / U_\infty^3, \quad \langle \rho \rangle^* = \langle \rho \rangle / a D \rho_0; \quad a = -(1/\rho_0) d\rho_s/dz, \quad z = 0.$$

В обезразмеренных уравнениях вместо g появляется величина $4\pi^2/F_d^2$, где F_d – плотностное число Фруда, определяемое равенством:

$$F_d = \frac{U_\infty T}{D}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{ag}}.$$

Для удобства интерпретации результатов расчетов ниже используется время t , связанное с расстоянием от тела соотношением: $t = x/U_\infty$, $t^* = t/T = xD/(U_\infty DT) = x^*/F_d$, T – период Вайсяля-Брента.

Конечно-разностный алгоритм решения задачи основан на переходе к функциям тока ψ и завихренности ω :

$$V = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad W = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \omega = \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}.$$

Численное интегрирование осуществлялось с применением методов расщепления по пространственным переменным [17]. Подробное изложение алгоритма представлено в [9-11].

Тестирование численной модели. Для проверки работоспособности представленной модели проведены тестовые расчеты на последовательности сеток. Результаты численных экспериментов сопоставлялись с экспериментальными данными Линя и Пао [15, 18] о вырождении турбулентных следов в однородной и линейно стратифицированной средах за самодвижущимся и буксируемым телами.

Начальные условия при $x = x_0$ задавались в виде функций [15], согласованных с данными лабораторных экспериментов Линя и Пао. В случае следа за самодвижущимся телом начальные данные были следующими ($x_0 = 8D$):

$$\begin{aligned} e(x_0, y, z) &= E_0^2 \cdot \exp(-4r^2/D^2), \\ \varepsilon(x_0, y, z) &= \sqrt{12}E_0^{3/2} \cdot \exp(-6r^2/D^2), \\ U_d(x_0, y, z) &= U_{d0}(1 - 8r^2/D^2) \exp(-8r^2/D^2). \end{aligned} \quad (16)$$

В следе за буксируемым телом используются следующие распределения ($x_0 = 11D$):

$$\begin{aligned} e(x_0, y, z) &= E_0 \cdot \exp(-r^2/(D^2 \cdot A_0)), \\ \varepsilon(x_0, y, z) &= \sqrt{3/A_0} \cdot E_0^{3/2} \cdot \exp(-3 \cdot r^2/(2A_0 \cdot D^2)), \\ U_d(x_0, y, z) &= U_{d0} \exp(-r^2/(A_0 \cdot D^2)), \end{aligned} \quad (17)$$

$$x = x_0, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty, A_0 = c_d \cdot U_0 / (8 \cdot U_{d0}), U_{d0} = U_d(x_0, 0, 0).$$

Здесь c_d – коэффициент сопротивления тела. Величины E_0, U_{d0}, A выбираются из условий согласования при $x = x_0$ с экспериментальными данными Линя и Пао, представленными в [15]. Как и в [15], число Фруда полагалось равным 31.

Конечно-разностные сетки содержали 62×52 (сетка 1), 82×62 (сетка 2), 72×37 (сетка 3) ячеек. Узлы сетки 1 распределялись следующим образом (ниже, в этом разделе статьи, знак обезразмеривания (* сверху) будет опущен):

$$\begin{aligned} y_i &= i \cdot h_{1y}, \quad i = 0, \dots, 31; \quad y_i = y_{i-1} \cdot q_{1y}, \quad i = 32, \dots, 62, \quad q_{1y} = 1.04, \\ z_j &= j \cdot h_{1z}, \quad j = 0, \dots, 21; \quad z_j = z_{j-1} \cdot q_{1z}, \quad i = 22, \dots, 52, \quad q_{1z} = 1.047. \end{aligned}$$

Значения h_x^n полагались постоянными для $x < 19$; а при больших значениях x значения h_x^n изменялись от 0.01 до 0.5 по формуле суммы членов арифметической прогрессии с разностью 0.01; $h_{1y} = h_{1z} = 0.1$. Расчеты проводились также на более подробной сетке 2, которая определялась следующим образом:

$$\begin{aligned} y_i &= i \cdot h_{2y}, \quad i = 0, \dots, 41; \quad y_i = y_{i-1} \cdot q_{2y}, \quad i = 42, \dots, 82, \quad q_{2y} = 1.041, \\ z_j &= j \cdot h_{2z}, \quad j = 0, \dots, 31; \quad z_j = z_{j-1} \cdot q_{2z}, \quad j = 32, \dots, 62, \quad q_{2z} = 1.057, \end{aligned}$$

$h_{2y} = h_{2z} = h_{1y}/2$; значения h_x^n для $x > 19$ изменялись от 0.0025 до 0.15 по формуле суммы членов арифметической прогрессии с разностью 0.0025, затем полагались постоянными. Основные расчеты проводились на сетке 3. В плоскости (y, z) узлы сеточной области распределялись следующим образом

$$\begin{aligned} y_i &= i \cdot h_{3y}, \quad i = 0, \dots, 31; \quad y_i = y_{i-1} \cdot q_{3y}, \quad i = 32, \dots, 72, \quad q_{3y} = 1.06, \\ z_j &= j \cdot h_{3z}, \quad j = 0, \dots, 11; \quad z_j = z_{j-1} \cdot q_{3z}, \quad j = 12, \dots, 37, \quad q_{3z} = 1.113, \end{aligned}$$

$h_{3y} = h_{3z} = 0.075$, шаг сетки h_x^n для $x > 19$ изменялся от 0.055 по формуле $h_x^{n+1} = h_x^n + 0.055$ до 3.0 и далее полагался постоянным.

Результаты расчетов для плотностного числа Фруда $F_d = 31$ представлены на рис. 1, 2. Результаты тестирования модели на последовательности конечно-разностных сеток для случая безимпульсного следа приведены в [9]. Расчеты показали, что данные,

полученные на разных сетках, достаточно близки между собой. В табл. 1 для иллюстрации приведены некоторые данные. Здесь приняты следующие обозначения:

$$\langle \rho_0'^2 \rangle = \langle \rho'^2 \rangle(t, 0, 0), \quad \psi_m = \max_{y,z} (|\psi(t, y, z)|).$$

Горизонтальный L_y и вертикальный L_z размеры следа определяются из соотношений $e(t, L_y, 0) = 0.01e(t, 0, 0)$, $e(t, 0, L_z) = 0.01e(t, 0, 0)$. Для следа за буксируемым телом результаты аналогичны.

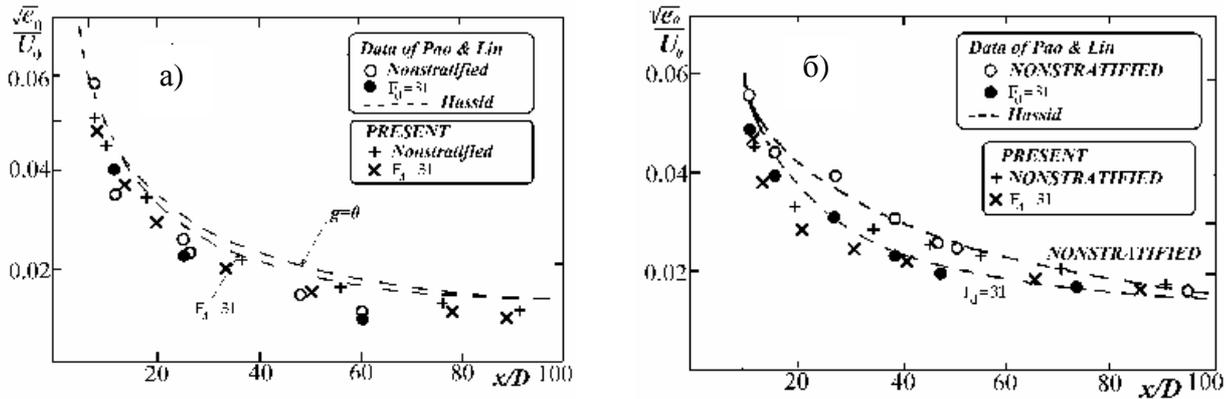


Рис. 1. Изменение осевых значений энергии турбулентности $e_0(x) = e(x, 0, 0)$ в зависимости от расстояния от тела в случае самодвижущегося (а) и буксируемого (б) тел в однородной и линейно стратифицированной средах. Штриховые линии соответствуют результатам численных экспериментов [15]

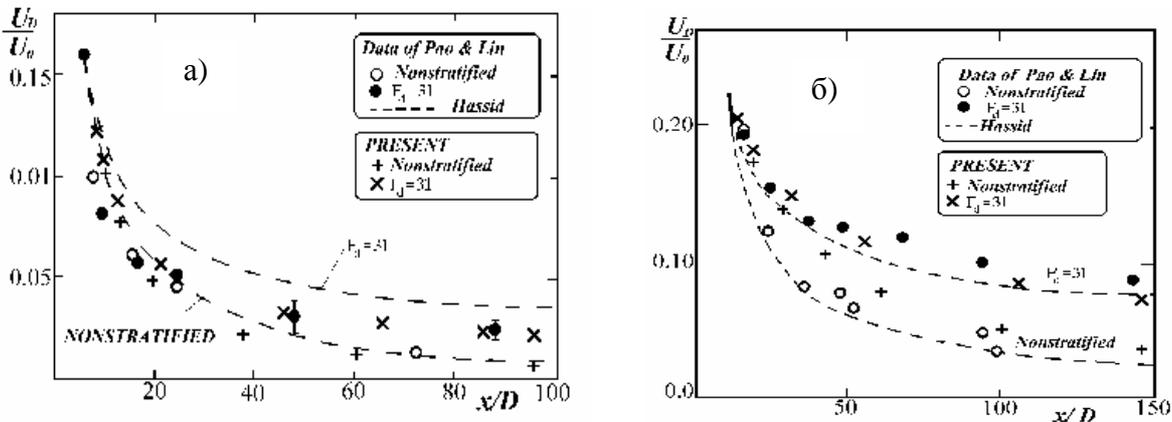


Рис. 2. Изменение дефекта осевой скорости $U_{a0} = U_a(x, 0, 0)$ для следов за самодвижущимся (а) и буксируемым (б) телами в однородной и линейно стратифицированной средах. Штриховые линии соответствуют результатам численных экспериментов [15]

Таблица

Сопоставление результатов расчетов на сетках 1 и 2 (безымпulsный след)

Сетка	$e_0^{0.5}$	$\langle \rho_0'^2 \rangle^{0.5}$	U_{a0}	L_y	L_z	ψ_m
$t/T = 0.5$						
1	3.136×10^{-2}	1.282×10^{-1}	7.723×10^{-2}	1.205	1.195	6.140×10^{-4}
2	3.174×10^{-2}	1.289×10^{-1}	7.404×10^{-2}	1.203	1.194	6.355×10^{-4}
$t/T = 4$						
1	6.655×10^{-3}	3.256×10^{-2}	2.344×10^{-2}	1.581	1.484	2.757×10^{-4}
2	6.660×10^{-3}	3.261×10^{-2}	2.223×10^{-2}	1.583	1.481	2.473×10^{-4}

Основные результаты

Линейная стратификация. С целью изучения характеристик внутренних волн, генерируемых турбулентными следами в линейно стратифицированной жидкости, выполнены расчеты для плотностного числа Фруда $F_d = 565$. Это значение F_d соответствует условиям одного из экспериментов Линя и Пао для безимпульсного следа [18]. Поскольку в случае линейной стратификации имеет место подобие по плотностному числу Фруда [4], представленные ниже результаты справедливы для произвольного достаточно большого числа Фруда.

Начальные данные по-прежнему задавались при $x_0 = 8D$ для безимпульсного следа и при $x_0 = 11D$ для следа за буксируемым телом в виде функций (16), (17). Плотность невозмущенной жидкости определялась следующим образом: $\rho_s(z) = \rho_{ls}(z)$. Основные вычисления проводились на сетке 3.

На рис. 3 представлены линии $\langle \rho_1 \rangle / aD\rho_0 = const$ ($t/T = 2$). Видно, что буксируемое тело генерирует волны большей амплитуды.

Фазовую картину внутренних волн при $t/T = 2$ иллюстрирует рис. 4, где приведены изолинии $\partial \langle \rho_1 \rangle / \partial y = const$. Нулевой уровень (линии 5) соответствует линиям постоянной фазы. Можно видеть, что фазовые характеристики для следов за буксируемым (штриховые линии) и самодвижущимся (сплошные линии) телами достаточно близки.

Динамику генерируемых турбулентными следами внутренних волн иллюстрирует также рис. 5, на котором представлено изменение во времени изолиний $\tilde{\rho}_0 - \langle \rho \rangle^* = \tilde{\rho}_0 - \rho_s^*(z_c^*)$ для $t/T = 1, 2, 3, 4, 5$ (линии 1–5), $\tilde{\rho}_0 = 1/(aD)$. Рис. 5, а) соответствует $z_c^* = z_c/D = 0.1$, рис. 5, б) – $z_c^* = z_c/D = 1$. Эти данные показывают (как и данные рис. 3), что внутренние волны, генерируемые следом за буксируемым телом, имеют существенно большую амплитуду, чем волны за самодвижущимся телом.

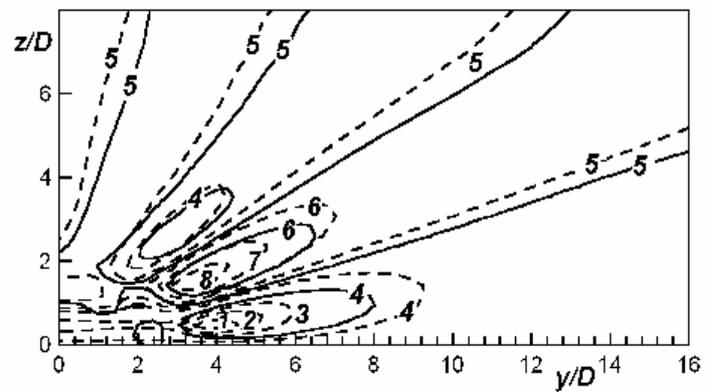


Рис. 3. Линии $\langle \rho_1 \rangle / aD\rho_0 = const$ ($t/T = 2$, линейная стратификация). Линии 1–8 соответствуют следующим уровням: 1 – 0.08, 2 – 0.06, 3 – 0.04, 4 – 0.02, 5 – 0, 6 – -0.02, 7 – -0.04, 8 – -0.06. Сплошные линии – след за самодвижущимся телом, штриховые – след за буксируемым телом

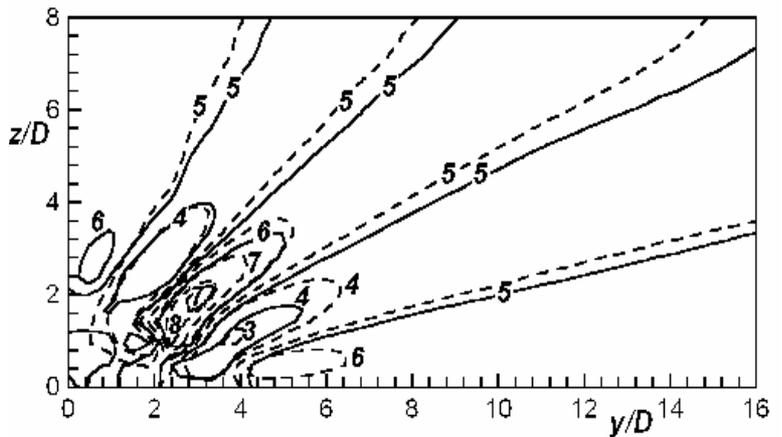


Рис. 4. Изолинии $\partial \langle \rho_1 \rangle / \partial y = const$ ($t/T = 2$, линейная стратификация). Значения уровней те же, что и на рис. 3. Сплошные линии – след за самодвижущимся телом, штриховые – след за буксируемым телом

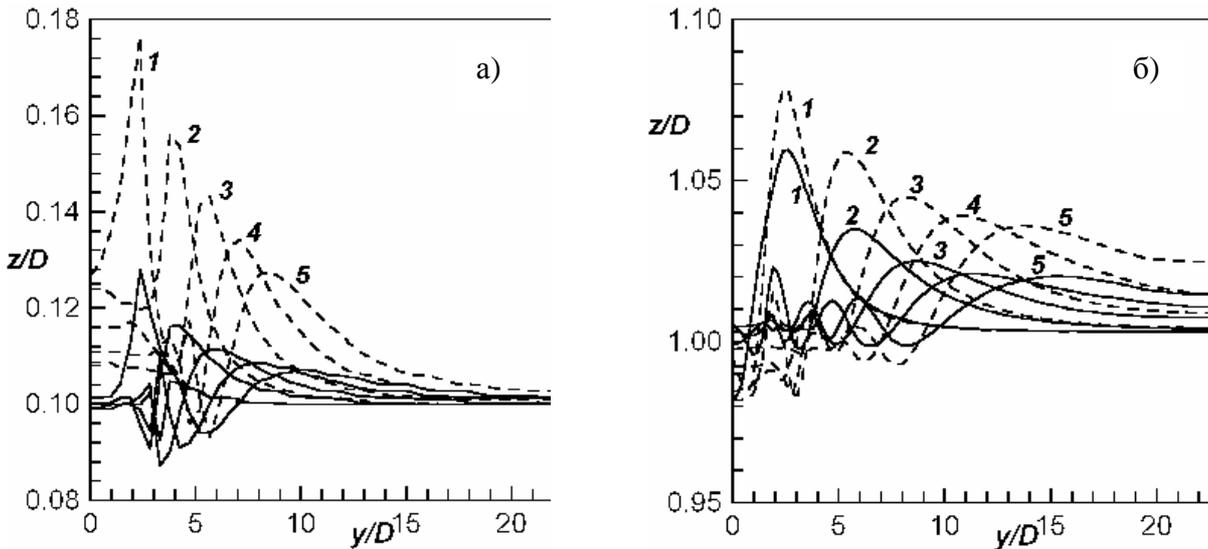


Рис. 5. Изменение во времени изолиний $\tilde{\rho}_0 - \langle \rho \rangle^* = \tilde{\rho}_0 - \rho_s^*(z_c^*)$ в случае линейной стратификации:

а) – $z_c^* = z_c/D = 0.1$, б) – $z_c^* = z_c/D = 1$. Линии 1–5 соответствуют моментам времени $t/T = 1, 2, 3, 4, 5$. Сплошные линии – след за самодвижущимся телом, штриховые – след за буксируемым телом

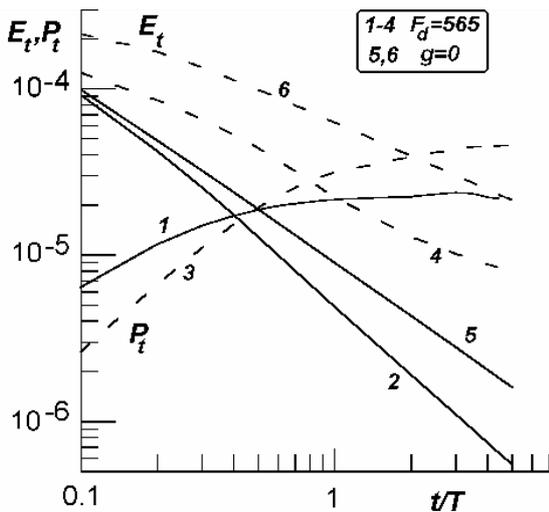


Рис. 6. Изменение во времени суммарных энергий внутренних волн $P_t^*(t)$ (линейная стратификация, линии 1, 3) и турбулентности $E_t^*(t)$ (линии 2, 4, 5, 6) для случая однородной ($g = 0$ – линии 5, 6) и линейно стратифицированной ($F_d = 565$ – линии 2, 4) жидкостей. Сплошные линии – самодвижущееся тело, штриховые – буксируемое тело

$E_t \sim x^{-1}$ – для самодвижущегося тела, $E_t \sim x^{-0.67}$ – для буксируемого тела. Эти данные согласуются с известными представлениями об автомодельном вырождении энергии турбулентности и изменении размеров турбулентных следов, а также с теорией размерности [19]. Результаты расчетов свидетельствуют (как и в случае безимпульсного следа [10])

На рис. 6 приведено изменение во времени суммарных энергий турбулентности $E_t^*(t)$ и внутренних волн $P_t^*(t)$ для случая линейной стратификации, где:

$$E_t^*(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^* dy^* dz^*, \quad (18)$$

$$P_t^*(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\frac{V^{*2} + W^{*2}}{2} + \frac{4\pi^2}{F_d^2} \langle \rho_1 \rangle^* z^* \right] dy^* dz^*.$$

При вычислении (18) использовалась квадратурная формула трапеций. Кривые 1, 2 характеризуют изменение P_t^* , E_t^* в безимпульсном следе; кривые 3, 4 иллюстрируют поведение P_t^* , E_t^* в следе за буксируемым телом. Суммарная энергия турбулентности $E_t^*(t)$ в случае однородной жидкости показана линиями 5 (самодвижущееся тело) и 6 (буксируемое тело). Расчеты показывают, что изменение суммарной энергии турбулентности в однородной жидкости происходит при больших значениях времени по степенным законам

о расщеплении при $t/T \geq 2$ течения в следе за буксируемым телом в линейно стратифицированной среде на волновой и диффузионный процессы [5, 12].

Нелинейная стратификация. Численные эксперименты по изучению характеристик внутренних волн, генерируемых турбулентными следами в пикноклине, проводились, как и в случае линейной стратификации, для плотностного числа Фруда $F_d = 565$. Начальные данные и расчетные сетки те же, что и для линейной стратификации. Распределение плотности невозмущенной жидкости задавалось как $\rho_s(z) = \rho_{ns}(z)$. Если ввести величину H :

$$\rho_s(H) - \rho_0 = 0.99(B - \rho_0), \quad B = \lim_{z \rightarrow \infty} \rho_s(z),$$

то при $\beta^* = 1.0; 0.3; 0.15$ имеем величину полуширины пикноклина $H^* = 2.64; 0.78; 0.39$.

Картина внутренних волн, генерируемых турбулентным следом в пикноклине, значительно отличается от наблюдаемой в случае линейной стратификации. Кроме того, картина внутренних волн изменяется также с изменением величины H [9]. Для иллюстрации на рис. 7 приведены линии тока $\psi^* = \text{const}$ (а) – линейная стратификация; б) – пикноклин, $\beta^* = 1.0$; в) – пикноклин, $\beta^* = 0.15$; $t/T = 2$). На рис. 8 представлены линии $\langle \rho_1 \rangle / aD\rho_0 = \text{const}$, иллюстрирующие внутренние волны в пикноклине с $\beta^* = 0.15$ ($t/T = 2$). Видно, что в случае пикноклина область возмущенной жидкости является значительно более локализованной в сравнении с линейно стратифицированной жидкостью (уровни те же, что и на рис. 3). Следу за буксируемым телом соответствует возмущенная область больших размеров, чем следу за самодвижущимся телом.

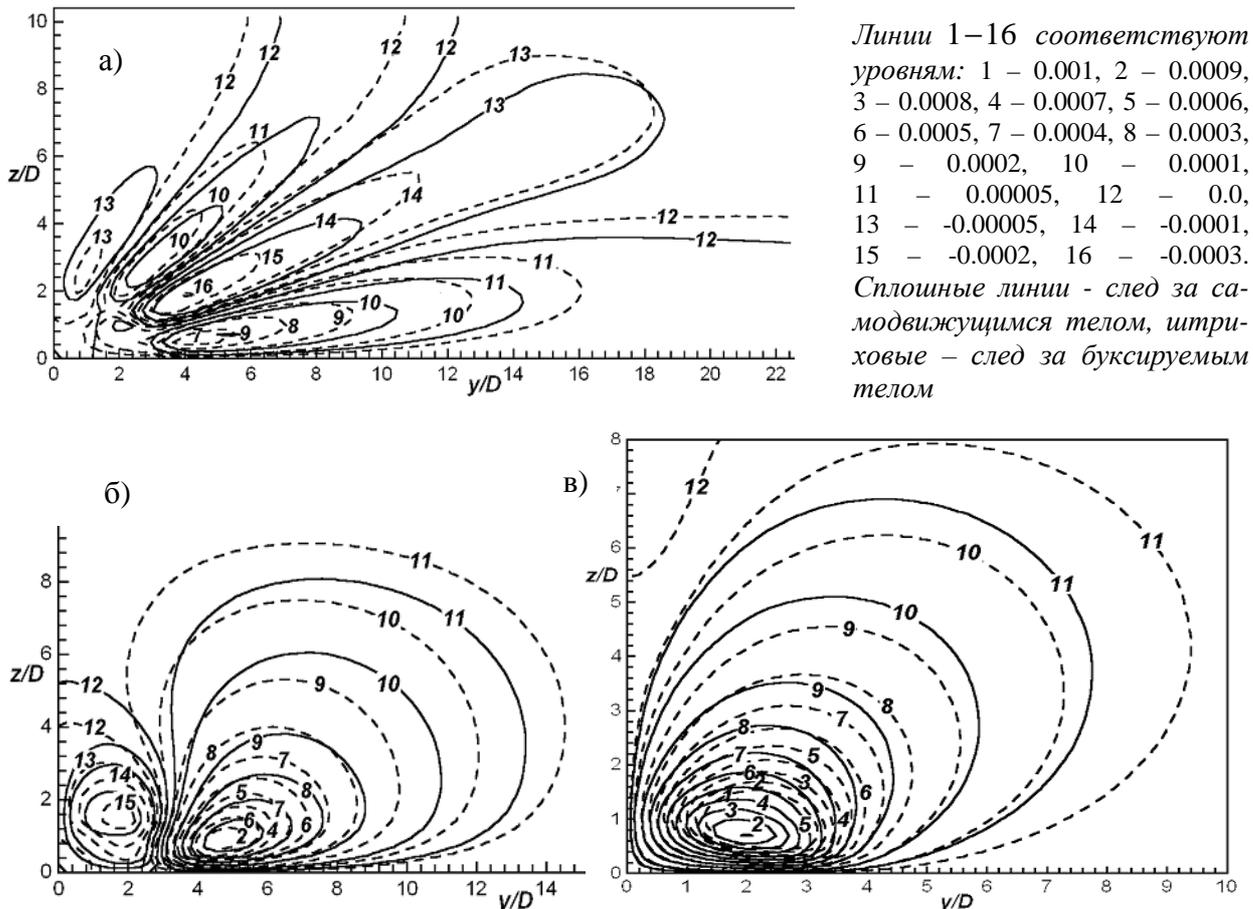


Рис. 7. Линии тока $\psi^* = \text{const}$: а) – линейная стратификация; б) – пикноклин, $\beta^* = 1.0$; в) – пикноклин, $\beta^* = 0.15$; $t/T = 2$.

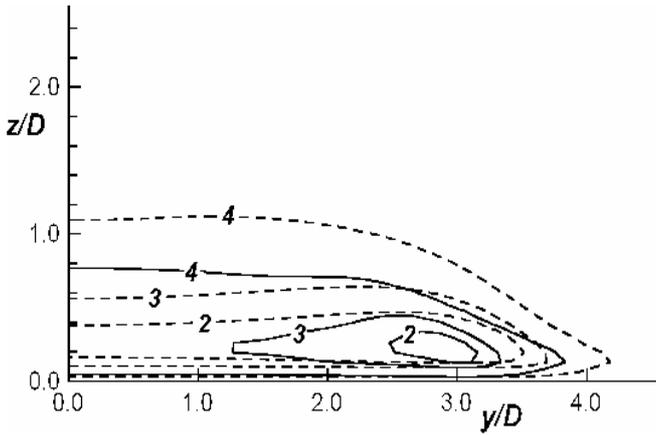


Рис. 8. Изолинии дефицита плотности $\langle \rho_1 \rangle / aD\rho_0 = \text{const}$ в пикноклине с $\beta^* = 0.15$ ($t/T = 2$, уровни те же, что на рис. 3). Сплошные линии - след за самодвижущимся телом, штриховые - след за буксируемым телом

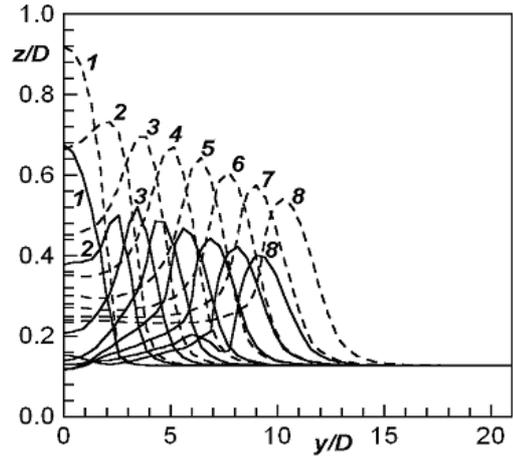


Рис. 9. Изменение во времени изолиний $\bar{\rho}_0 - \langle \rho \rangle^* = \bar{\rho}_0 - \rho_s^*(z_c^*)$, $z_c^* = z_c/D = 0.1$ в пикноклине при $\beta^* = 0.15$ ($F_d = 565$). Линии 1–8 соответствуют значениям времени $t/T = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Сплошные линии - след за самодвижущимся телом, штриховые - след за буксируемым телом

Динамика генерируемых турбулентными следами внутренних волн показана на рис. 9, где представлено изменение во времени изолиний $\bar{\rho}_0 - \langle \rho \rangle^* = \bar{\rho}_0 - \rho_s^*(z_c^*)$, $\bar{\rho}_0 = 1/(aD)$, $z_c^* = z_c/D = 0.1$, $\beta^* = 0.15$ для $t/T = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (линии 1–8). Видно, что, как и в случае линейной стратификации, внутренние волны, генерируемые турбулентным следом за буксируемым телом, имеют существенно большую амплитуду, чем волны за самодвижущимся телом.

Анализ результатов численных экспериментов, выполненных для случая пикноклина ($\beta^* = 0.3$) и значений числа Фруда $F_d = 565$ и $F_d = 280$, показал следующее. При $F_d = 280$

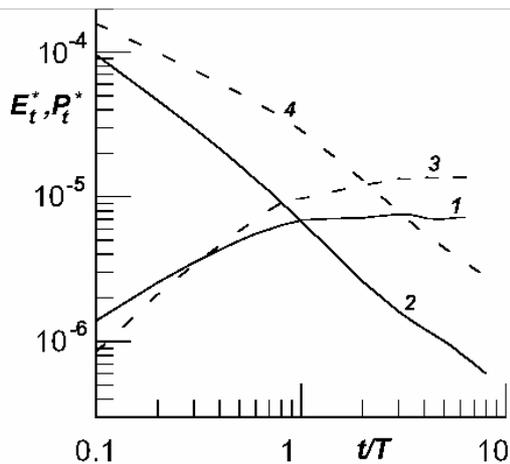


Рис. 10. Изменение во времени суммарных энергий турбулентности $E_t^*(t)$ (линии 2, 4) и внутренних волн $P_t^*(t)$ (линии 1, 3) для случая нелинейной стратификации ($\beta^* = 0.15$). Сплошные линии - след за самодвижущимся телом, штриховые - след за буксируемым телом

формируются волны несколько меньшей амплитуды, чем при $F_d = 565$ в соответствующие моменты времени, и скорость перемещения волны в сторону роста $|y|$ при $F_d = 280$ меньше. Однако, при обоих значениях плотностного числа Фруда полученные картины внутренних волн аналогичны: волны, генерируемые турбулентным следом за буксируемым телом, имеют существенно большую амплитуду, чем за самодвижущимся телом.

На рис. 10 приведено изменение во времени суммарных энергий турбулентности $E_t^*(t)$ и внутренних волн $P_t^*(t)$ для случая нелинейной стратификации ($\beta^* = 0.15$). Кривые 1, 2 характеризуют изменение P_t^* , E_t^* для безимпульсного следа; кривые 3, 4

иллюстрируют поведение P_t^* , E_t^* в следе за буксируемым телом. Расчеты показывают, что и суммарная энергия турбулентности и суммарная энергия внутренних волн для следа с ненулевым избыточным импульсом значительно больше, чем для безимпульсного следа.

* * *

Полученный результат – генерация внутренних волн турбулентным следом за буксируемым телом существенно большей амплитуды, чем за самодвижущимся телом – допускает достаточно простое физическое объяснение. Эволюция осесимметричных турбулентных следов за буксируемым и самодвижущимся телами в однородной жидкости отличается весьма существенно [19]. Для автомодельного следа за буксируемым телом имеем: $e_0(x) = e(x, 0, 0) \sim x^{-4/3}$, $U_1(x, 0, 0) \sim x^{-2/3}$, $l(x) \sim x^{1/3}$ ($l(x)$ – характерный размер следа). Автомодельный след за самодвижущимся телом может быть охарактеризован законами вырождения: $e_0(x) \sim x^{-1.5}$, $U_1(x, 0, 0) \sim x^{-1.5}$, $l(x) \sim x^{1/4}$. Такое различие в поведении характеристик следов обусловлено их существенно разной структурой. В следе за буксируемым телом порождение энергии турбулентности за счет градиентов осредненного течения играет важную роль; в безимпульсном следе уже на расстоянии около десяти диаметров реализуется практически бесдвиговый режим течения [20, 21]. В результате, в стратифицированной жидкости турбулентность в следе за буксируемым телом приводит к перемешиванию большей массы жидкости. Воздействие силы тяжести вызывает при этом генерацию внутренних волн большей амплитуды.

Основные результаты работы сводятся к следующему. Построена численная модель динамики турбулентных следов за самодвижущимся и буксируемым телами в устойчиво стратифицированной среде. Представлены результаты расчетов характеристик внутренних волн, генерируемых турбулентными следами в линейно стратифицированной жидкости и пикноклине. Показано, что турбулентный след за буксируемым телом генерирует волны значительно большей амплитуды.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 07-01-00363а).

Литература

1. *Schooley A.H., Stewart R.W.* Experiments with a self-propelled body submerged in a fluid with vertical density gradient // *J.Fluid Mech.* 1964. V.15. P.1. P.83–96.
2. *Vasiliev O.F., Kuznetsov B.G., Lytkin Yu.M., Chernykh G.G.* Development of the turbulized fluid region in stratified medium // *Proc. Int. Symp. on Stratified Flows. Paper 4.* Novosibirsk. 1972. published by Institute of Hydrodynamics Siberian Division of the U.S.S.R. Acad. Sci. 14 p.
3. *Трохан А.М., Чашечкин Ю.Д.* Генерация внутренних волн в стратифицированной жидкости импульсным гидродинамически линейным источником (двумерная задача) // *Теория дифракции и распространения волн: Краткие тексты докл. VII Всесоюз. симпозиума по дифракции и распространению волн.* Ростов-на-Дону. 1977. Т.3. С.186–189.
4. *Лыткин Ю.М., Черных Г.Г.* Подобие течения по плотностному числу Фруда и баланс энергии при эволюции зоны турбулентного смешения в стратифицированной среде // *Математические проблемы механики сплошных сред (Динамика сплошной среды).* Новосибирск: ИГиЛ СО АН СССР, 1980. Вып.47. С.70–89.
5. *Мошкин Н.П., Федорова Н.Н., Черных Г.Г.* О численном моделировании турбулентных следов // *Вычислительные технологии: Сб. науч. тр. РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. технологий.* 1992. Т.1. № 1. С.70–92.
6. *Воропаева О.Ф., Черных Г.Г.* О численном моделировании динамики областей турбулизованной жидкости в стратифицированной среде // *Вычислительные технологии: Сб. науч. тр. РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. Технологий.* 1992. Т.1. № 1. С.93–104.
7. *Chernykh G.G., Moshkin N.P., Voropaeva O.F.* Turbulent wakes in stratified fluids: results of numerical experiments // *Preprints of the Fourth Int. Symp. on Stratified Flows, Grenoble, France, June 29 — July 2, 1994.* — Grenoble: Grenoble Inst.of Mech. 1994. Vol. 2. sess. A2. 103. 8 p.

8. *Chashechkin Yu.D.* Internal waves, vortices and turbulence in a wake past a bluff body in a continuously stratified liquid // Preprints of the Fourth Int. Symp. on Stratified Flows. Grenoble. France. June 29 - July 2, 1994. Grenoble: Grenoble Inst.of Mech. 1994. V.2. sess. B4. 29. 8 p.
9. *Воропаева О.Ф., Черных Г.Г.* Численная модель динамики безымпulsive турбулентного следа в пикноклине // ПМТФ. 1997. Т.38. № 3. С.69–86.
10. *Chernykh G.G., Voropayeva O.F.* Numerical modeling of momentumless turbulent wake dynamics in a linearly stratified medium // Computers and Fluids. 1999. V.28. P.281–306.
11. *Chernykh G.G., Voropayeva O.F.* Internal waves generated by a momentumless turbulent wake in linearly stratified media // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1999. V.14. No.4. P.311–326.
12. *Воропаева О.Ф., Мошкин Н.П., Черных Г.Г.* Внутренние волны, генерируемые турбулентными следами за буксируемым и самодвижущимся телами в линейно стратифицированной среде // Математическое моделирование. 2000. № 10. С.77–94.
13. *Воропаева О.Ф., Мошкин Н.П., Черных Г.Г.* Внутренние волны, генерируемые турбулентными следами в устойчиво стратифицированной среде // ДАН. 2003. Т.392. № 2. С.190–194.
14. *Rottman J.W., Broutman D., Spedding G., Diamessis P.* A model for the internal wavefield produced by a submarine and its wake in the littoral ocean // Proceed. Of 26th Symposium on Naval Hydrodynamics. Rome. Italy. 17-22 September, 2006. P.279-287.
15. *Hassid S.* Collapse of turbulent wakes in stable stratified media // J. Hydronautics. 1980. V.14. No.1. P.25–32.
16. *Rodi W.* Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids // J. Geophys. Res. 1987. V.92. No.C5. P.5305–5328.
17. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1967.
18. *Lin J.T., Pao Y.H.* Wakes in stratified fluids // Annu.Rev. Fluid Mech. 1979. V.11. P.317–336.
19. *Городцов В.А.* Автомодельность и слабые замыкающие соотношения для симметричной свободной турбулентности // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1979. № 1. С.43–50.
20. *Naudascher E.* Flow in the wake of self-propelled bodies and related sources of turbulence // J. Fluid Mech. 1965. V.22. No.4. P.625–656.
21. *Алексенко Н.В., Костомаха В.А.* Экспериментальное исследование осесимметричного безымпulsive турбулентного струйного течения // ПМТФ. 1987. №1. С.65–69.

Статья поступила в редакцию 13.11.2008 г.