

УДК 517.9

С.Ю.Доброхотов¹, Б.И.Волков², С.Я.Секерж-Зенькович¹, Б.Тироцци³

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВОЛН ЦУНАМИ В РАМКАХ ПОРШНЕВОЙ МОДЕЛИ: ОБЩИЕ КОНСТРУКЦИИ И ЯВНО РЕШАЕМЫЕ ПРИМЕРЫ

Предложено асимптотически-численное описание волн цунами в бассейне переменной глубины в окрестности волнового фронта, который может иметь каустики. Использована поршневая модель и длинноволновое приближение. Предполагается, что размер области начального возмущения небольшой по сравнению с характерной длиной интервала изменения глубины дна и расстоянием от точки наблюдения. Описание основано на обобщении асимптотического подхода, известного как канонический оператор Маслова. Для возмущений специального вида представлены простые явные формулы, которые трансформированы в компьютерную программу для быстрого расчета волнового профиля. С их помощью графически проиллюстрированы некоторые особенности распространения волн цунами в бассейне переменной глубины.

Традиционное моделирование волн цунами в открытом океане осуществляется в 2-D длинноволновом приближении в рамках так называемой "поршневой модели", которая сводится к решению следующей задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \langle \nabla, C(\mathbf{x}) \nabla \rangle \eta, \quad C(\mathbf{x}) = \sqrt{gH(\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_x^2 \quad (1)$$

$$\eta|_{t=0} = V\left(\frac{\mathbf{x}}{l}\right), \quad \eta_t|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\eta(\mathbf{x}, t)$ — возвышение свободной поверхности жидкости, $H(\mathbf{x})$ — глубина бассейна, g — ускорение силы тяжести, $V(\mathbf{x}/l)$ — заданная функция, локализованная в некоторой области характерного радиуса l около точки $\mathbf{x} = 0$. Угловые скобки здесь и далее означают скалярное произведение. Предполагается, что l является небольшим по сравнению как с характерной длиной интервала изменения глубины, так и с расстоянием $|\mathbf{x}|$ до точки наблюдения. Это, в частности, означает также, что функция $V(\mathbf{y})$ убывает быстро, при $|\mathbf{y}| \rightarrow \infty$.

Поставленная задача обычно решается с помощью прямых численных методов. Однако такие методы требуют много времени и информации об источнике возбуждения волн, и их применение затруднительно для предупреждения волн цунами в реальном времени; поэтому представляется важным получение аналитических формул для решения задачи. Наличие таких формул может выявить различные особенности поведения волн цунами в зависимости от рельефа дна, формы источника и т.д., а также дать возможность с малыми затратами просчитать большое количество различных сценариев распространения волн цунами, используя программы типа Mathematica или Mat Lab. Кроме того, эти формулы могут быть использованы для тестирования численных расчетов.

Задача (1), (2) является классической для математической физики и асимптотического анализа. Тем не менее, явные формулы для ее решения, которые могут быть реализованы в виде компьютерной программы для быстрого расчета волновых профилей, были по-

¹ Институт проблем механики РАН им.А.И.Ишлинского (Москва)

² Физический факультет Московского государственного университета

³ Департамент физики Римского университета "La Sapienza"

лучены совсем недавно, хотя некоторые асимптотические представления, основанные на работе [1] для случая линейных гиперболических систем с постоянными коэффициентами, были приведены в [2]. Основные математические трудности здесь связаны с метаморфозой решения: оно локализовано в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ при $t = 0$, но через некоторое время изменяет свою структуру и принимает форму функции, локализованной в окрестности замкнутой кривой (волнового фронта), которая, в свою очередь, может иногда иметь самопересечения и особые (фокальные) точки. Для быстро осциллирующих и разрывных решений широкого круга дифференциальных уравнений в частных производных явления такого типа анализируются с помощью лучевых разложений и квазиклассического приближения; они были изучены довольно давно [3-5]. Глобальное асимптотическое представление для быстро осциллирующих решений (с учетом указанных особенностей) дается каноническим оператором Маслова [5, 6]. Однако, эта теория не может быть непосредственно применена к задаче (1), (2), поскольку решения в этом случае имеют другую структуру. Тем не менее, два соображения позволяют модифицировать теорию Маслова [5-7] и, кардинально упростив [2], получить явные асимптотические формулы для решения задачи (1), (2). Эти соображения следующие:

- с помощью интегрального преобразования Фурье задача о локализованных решениях может быть преобразована в хорошо изученную задачу о быстро осциллирующих решениях;
- окончательная формула может быть упрощена, если использовать идеи теории пограничного слоя о разложениях вблизи волнового фронта.

Реализация этих соображений приводит к формулам, связанным, с одной стороны, с системой обыкновенных дифференциальных уравнений — гамильтоновой системой, содержащей как переменные коэффициенты рельеф дна $H(\mathbf{x})$, и, с другой — с формой начального возмущения $V(\mathbf{x}/l)$. В простой и прямой форме они учитывают физические эффекты: закон Грина и влияние на амплитуду лучевой расходимости, а также метаморфозу фронта цунами, фокальные точки, каустики и т.д. Важно отметить, что формулы для волновых профилей, соответствующих начальным возмущениям специального типа, могут еще более упроститься и сравнительно легко объяснить многие особенности поведения волн цунами в рамках решения задачи (1), (2) без каких-либо дополнительных усложнений. Они реализованы в виде асимптотико-численного алгоритма и быстродействующих компьютерных программ для описания волновых фронтов и волновых профилей цунами в бассейне переменной глубины, включая ситуации, когда волновое поле может иметь каустики. Компьютерные программы основаны на применении программного обеспечения типа Mathematica или Maple и могут быть использованы в системах раннего предупреждения цунами. В этой статье мы реализуем общие формулы [8] для начального возмущения специального “степенного” вида, даем их физическую интерпретацию и проводим сравнение с результатами, полученными в [8, 9] для “гауссового” начального возмущения. Подчеркнем, что несмотря на достаточно простую окончательную форму, вывод и доказательство указанных формул опирается на нетривиальные математические конструкции и рассуждения, которые в более общей постановке задачи приведены в [10-14].

Расчет волнового профиля в случае бассейна постоянной глубины

Общие уравнения. Приведем вначале очень грубые аргументы, показывающие возможности использования (1), (2) для описания волн цунами в рамках поршневых моделей для бассейна с медленно меняющейся глубиной. Уравнения получаются из следующих линейных уравнений поршневой модели без предположения длинноволновой аппроксимации для потенциала скоростей $\eta(\mathbf{x}, z, t)$ и возвышения свободной поверхности $\eta(\mathbf{x}, t)$ [15]:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_x^2, \quad -H(\mathbf{x}) < z < 0, \\ \eta_t - \Phi_z|_{z=0} &= 0, \quad \Phi_t|_{z=0} + g\eta = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$[\Phi_z + \langle \nabla H, \nabla \Phi \rangle]_{z=-H(\mathbf{x})} = V\left(\frac{\mathbf{x}}{l}\right) \delta(t),$$

где δ – дельта-функция; предполагается, что $\Phi \equiv 0$, $\eta \equiv 0$ при $t < 0$.

Задача состоит в вычислении $\eta(\mathbf{x}, t)$ на больших расстояниях $|\mathbf{x}| > l$ от центра начального возмущения (в так называемой "дальней зоне"), возле волнового фронта, где η имеет свои максимальные значения в предположении, что $l \gg H(\mathbf{x})$ и что глубина $H(\mathbf{x})$ мало меняется на расстояниях порядка l .

Асимптотические формулы. В случае бассейна постоянной глубины H_0 волновые фронты – круги $C_0 t$, где $C_0 = \sqrt{gH_0}$ – скорость длинных волн. Будем искать решение задачи (3) в форме преобразования Фурье относительно $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и параметра Фурье $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$. Используя в интеграле полярные координаты (ρ, φ) , определяемые по формулам $p_1 = \frac{\rho}{l} \cos(\varphi)$, $p_2 = \frac{\rho}{l} \sin(\varphi)$, получаем:

$$\eta(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{\rho C_0 t}{l} \sqrt{\frac{H_0}{l\rho} \operatorname{th}\left(\frac{H_0 \rho}{l}\right)}\right) \rho d\rho \int_0^{2\pi} \tilde{V}(\rho, \varphi) \exp\left[i \frac{|\mathbf{x}|}{l} \rho \cos(\varphi - \psi)\right] d\varphi, \quad (4)$$

где

$$\tilde{V}(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int V(\mathbf{y}) e^{-i\rho \langle \mathbf{n}, \mathbf{y} \rangle} d\mathbf{y}, \quad \mathbf{n}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T, \quad \mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{l} \quad (5)$$

и угол ψ определен формулами:

$$x_1 = |\mathbf{x}| \cos \psi, \quad x_2 = |\mathbf{x}| \sin \psi.$$

В рассматриваемой дальней зоне, т.е. при $|\mathbf{x}| \gg l$, интеграл по φ можно оценить по методу стационарной фазы [21-23]. После некоторых преобразований имеем:

$$\eta(\mathbf{x}, t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{l}{|\mathbf{x}|}} \operatorname{Re} \left[e^{-i\pi/4} \int_0^\infty \frac{V(\rho, \psi) \sqrt{\rho}}{\operatorname{ch}\left(\frac{\rho H_0}{l}\right)} \exp\left[i\rho \left(\frac{|\mathbf{x}|}{l} - \frac{C_0 t}{l} \sqrt{\frac{l}{\rho H_0} \operatorname{th}\left(\frac{\rho H_0}{l}\right)}\right)\right] d\rho \right].$$

При $|\mathbf{x}| \gg l$ модуль последнего интеграла достигает максимальной величины в окрестности волнового фронта $C_0 t$. Ограничиваясь рассмотрением этой окрестности и привлекая длинноволновое приближение, справедливое при $|\mathbf{x}| \ll l^3/H_0^2$, асимптотическую формулу (4) представим в виде:

$$\eta(\mathbf{x}, t) \approx \sqrt{\frac{l}{|\mathbf{x}|}} \operatorname{Re} F\left(\frac{\Phi(\mathbf{x}, t)}{l}, \psi(\mathbf{x})\right), \quad \Phi(\mathbf{x}, t) = |\mathbf{x}| - C_0 t, \quad (6)$$

где ψ – угол между вектором $\mathbf{x}$ и осью Ox_1 ,

$$F(z, \psi) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(\rho, \psi) e^{iz\rho} d\rho, \quad f(\rho, \psi) = \sqrt{\rho} \tilde{V}(\rho, \psi). \quad (7)$$

В (7) функция $\tilde{V}(\rho, \varphi)$ определяется по формуле (5) для начального возмущения общего типа.

Хотя подход, разработанный здесь, применим для любых локализованных начальных возмущений, ниже подробно рассмотрены два случая. В этих случаях задаваемые начальные возвышения свободной поверхности жидкости моделируют результат мгновенного образования на дне бассейна хребта (или долины). Специфика выбранных начальных условий такова, что оказалось возможным получить явные аналитические формулы для функции $F(z, \psi)$.

Случай 1. Рассмотрим начальное возвышения жидкости в форме гауссовой экспоненты с осцилляциями [9, 24-26]:

$$V(\mathbf{y}) = V_0 \cos(a_1 Y_1^2 + a_2 Y_2^2 + \chi) e^{-b_1 Y_1^2 - b_2 Y_2^2}, \quad \mathbf{Y} = \Theta(\theta) \mathbf{y}, \quad \Theta(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $a_1, a_2, 1 < b_1, b_2 < 3$, θ, χ являются безразмерными параметрами и V_0 — параметр размерности длины.

Функция $V(\mathbf{y})$ имеет свое максимальное абсолютное значение около $\mathbf{y} = 0$ ($\mathbf{x} = 0$) и убывает "в среднем", когда $|\mathbf{y}|$ возрастает.

Подставляя $V(\mathbf{y})$ из (8) в (5), получим:

$$\tilde{V}(\rho, \varphi) = \frac{V_0}{2\sqrt{b_1 b_2}} e^{-\sigma - \beta \rho^2} \text{ch}(\gamma \rho + i\chi),$$

где

$$\sigma = \frac{1}{4b_1 b_2} (b_1 a_2^2 + b_2 a_1^2), \quad \beta = \frac{1}{4b_1 b_2} [b_1 \sin^2(\varphi - \theta) + b_2 \cos^2(\varphi - \theta)],$$

$$\gamma = \frac{1}{2b_1 b_2} [b_1 a_2 \sin(\varphi - \theta) + b_2 a_1 \cos(\varphi - \theta)].$$

В данном случае интеграл в (7) вычисляется аналитически:

$$F(z, \psi) = \frac{V_0}{\sqrt{32\pi b_1 b_2}} [(Q_+ + Q_-)],$$

$$Q_{\pm}(z, \psi) = \frac{e^{-[\sigma + i(\pi/4 \mp \chi)]}}{8\beta^{5/4}} \left(-\sqrt{\beta} \Gamma\left(-\frac{1}{4}\right) {}_1F_1\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{w_{\pm}^2}{4\beta}\right) + w_{\pm} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) {}_1F_1\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{w_{\pm}^2}{4\beta}\right) \right),$$

где $w_{\pm} = \pm\gamma + iz$ и ${}_1F_1(\dots)$ является конфлюэнтной гипергеометрической функцией Куммера. Функция $F(z, \psi)$ может быть выражена также и в терминах функции параболического цилиндра D_{ν} [2]. Здесь используется функция, имеющаяся в системе Mathematica.

Как видно из (6), профиль волны в дальней зоне определяется функцией $F(z, \psi)$, которая, в свою очередь, зависит от функции V , моделирующей, начальное возмущение дна. На рис. 1 представлена зависимость $\text{Re} F(z, \psi)$ от z для нескольких значений угла ψ . При построении рисунка было учтено, что $z = o(1)$, поскольку рассматривается окрестность волнового фронта; значения ψ взяты лишь из промежутка $[0, \pi/2]$ с учетом симметрии изображаемой функции при выбранных значениях $a_1 = a_2 = 0$. Рис. 1 показывает, что в случае $b_1 \neq b_2$ (не осесимметричном начальном возвышении свободной поверхности жидкости) профиль волны имеет различную высоту при различных значениях угла ψ .

Случай 2. Здесь начальное возвышение свободной поверхности жидкости задается функцией (начальное возмущение такого типа в численном моделировании волн цунами было рассмотрено в [27]):

$$V(\mathbf{y}) = V_0 \left[(y_1)^2 + (by_2)^2 + 1 \right]^{-3/2}, \quad (9)$$

где b является безразмерным параметром. Подставив $V(\mathbf{y})$ из (9) в (5), получим:

$$\tilde{V}(\rho, \varphi) = V_0 b^{-1} \exp(-\rho \sqrt{\cos^2 \varphi + b^{-2} \sin^2 \varphi}).$$

В этом случае интеграл в (7) также вычисляется аналитически (его график приведен на рис. 2), причем ответ получается в элементарных функциях:

$$F(z, \psi) = \frac{V_0 e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2\sqrt{2} b} \left(\sqrt{\cos^2 \psi + b^{-2} \sin^2 \psi} - iz \right)^{-3/2}.$$

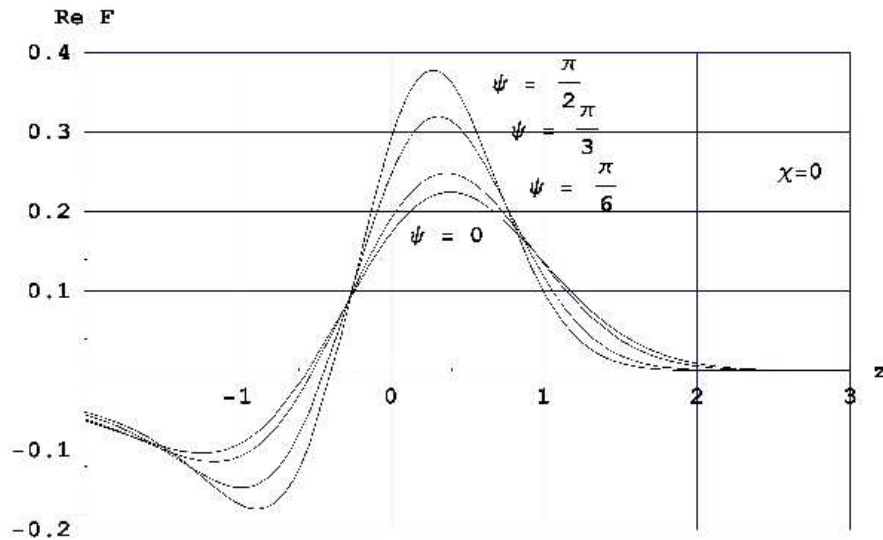


Рис. 1. Зависимость $\text{Re}[F(z, \psi)]$ от z при нескольких ψ для $V(y)$, заданной в (8), где $V_0 = 1$ м, $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $\chi = 0$

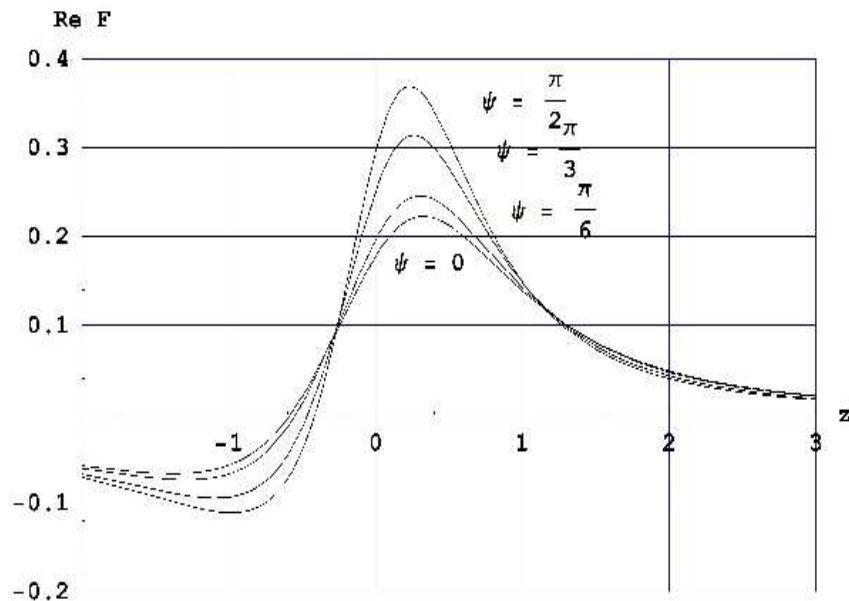


Рис. 2. Зависимость $\text{Re}[F(z, \psi)]$ от z при нескольких ψ для $V(y)$, заданной в (9), где $V_0 = 1$ м, $b = 1.4$

В этой формуле под комплексным аргументом выражения $\sqrt{\cos^2 \psi + b^{-2} \sin^2 \psi} - iz$ понимается $-\arctg\left(z/\sqrt{\cos^2 \psi + b^{-2} \sin^2 \psi}\right) \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Параметры рис. 1 и 2 выбраны таким образом, чтобы начальные возмущения были по возможности похожи. Сравнивая рисунки, можно заметить их качественное сходство в поведении $\text{Re } F(z, \psi)$ как в зависимости от z , так и от ψ . Основное различие наблюдается при возрастании z : во втором случае убывание происходит медленнее, что, впрочем, соответствует виду функций $V(y)$, сравни (8) и (9).

В случае начальных возмущений общего типа функция $F(z, \psi)$ может быть рассчитана из (7) и (5) численно. Расчет упрощается благодаря тому, что основная часть интеграла (7) определяется интегрированием на интервале длиной порядка нескольких единиц.

Принимая во внимание тот факт, что структуры асимптотических формул для $\eta(\mathbf{x}, t)$ в случаях бассейнов постоянной и переменной глубины имеют много общего, мы даем следующие комментарии к формулам (6) с использованием терминологии теории ВКБ.

Функцию $\Phi(\mathbf{x}, t)$ в (6) можно назвать *фазой* из-за двух обстоятельств. Во-первых, из (6) и (7) ясно, что $|\eta(\mathbf{x}, t)|$ имеет максимум, когда $\Phi(\mathbf{x}, t) = 0$ и быстро убывает с ростом $|\Phi(\mathbf{x}, t)|$. Во-вторых, вне окрестности начального возмущения $\mathbf{x} = 0$ функция $\Phi(\mathbf{x}, t)$, есть *действие* или решение двумерного уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + C_0 |\nabla S| = 0, \quad (10)$$

соответствующее (1) в случае бассейна постоянной глубины H_0 . Интеграл последнего уравнения, связан с гамильтоновой системой [7]; для (10) он определяется с помощью следующего 2-D *гамильтониана* $\mathcal{H} = C_0 |\mathbf{p}|$, где $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ — импульс. Таким образом, соответствующая *гамильтонова система* имеет форму:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} C_0, \quad \dot{\mathbf{p}} = 0.$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство траекторий этой системы, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$\mathbf{x}|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{p}|_{t=0} = \mathbf{n}(\psi),$$

где

$$\mathbf{n}(\psi) = (\cos \psi, \sin \psi)^T \quad (11)$$

и угол $\psi \in [0, 2\pi]$ является параметром. Эти траектории (вектора-столбцы) суть $\mathbf{X}(t, \psi) = (C_0 t \cos(\psi), C_0 t \sin(\psi))^T$, $\mathbf{P}(t, \psi) = \mathbf{n}(\psi)$. Семейство траекторий $\mathbf{X}(t, \psi)$, $\mathbf{P}(t, \psi)$ выходит из точки $\mathbf{x} = 0$ с единичным импульсом $\mathbf{P} = \mathbf{n}(\psi)$. Проекция траектории $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t, \psi)$ на плоскость $\mathbb{R}_x^2$ называется *лучом*. Здесь лучи являются прямыми линиями, начиная от точки $\mathbf{x} = 0$ и приходящие в момент t в точку $x_1 = C_0 t \cos(\psi)$, $x_2 = C_0 t \sin(\psi)$. Кривая, образованная концами лучей в каждый момент $t > 0$, называется *волновым фронтом*. В данном случае волновой фронт есть круг $|\mathbf{x}| = C_0 t$. Можно видеть из (6), что на волновом фронте фаза $\Phi = 0$. Следует также отметить, что точки на фронте параметризованы по параметру $\psi \in (0, 2\pi)$, который был введен в (11) в качестве начального условия для импульса $\mathbf{p}(t)$. Таким образом, ψ в (6) можно рассматривать с той же точки зрения.

В случае бассейна переменной глубины асимптотические формулы для $\eta(\mathbf{x}, t)$ имеют структуру, аналогичную (6). Но лучи перестают быть прямыми линиями, гамильтониан является более сложным, множитель $\sqrt{l/|\mathbf{x}|}$ должен быть заменен другим, а в некоторых случаях показатель степени в экспоненте $e^{-i\pi/4}$ должен быть умножен на целое число m . Это число имеет глубокий топологический смысл — индекса Морса траектории (частного случая индекса Маслова).

Хотя лучи уже приходится находить численными методами, тем не менее, понятно, что алгоритм расчета $\eta(\mathbf{x}, t)$ с (6) работает быстрее, чем метод конечных разностей: для расчета высоты волн цунами в точке $\mathbf{x}$ вблизи фронта в момент времени t нужно проводить интегрирование не во всем пространстве, а требуется рассчитать траекторию, начиная с момента начального возмущения до точки $\mathbf{x}$ в момент времени t , а затем использовать аналитическую формулу для $\eta(\mathbf{x}, t)$. Иными словами, этот метод интегрирования является "локальным" в том смысле, что интегрирование требуется лишь для определения траектории гамильтоновой системы. Эту систему нетрудно решить численно в случае бассейна переменной глубины, причем сама форма ответа содержит (при необходимости)

возможность распараллеливания процесса расчета как траекторий, так и функций F для различных углов ψ .

Асимптотическая формула для профиля волны в случае бассейна переменной глубины

Отношение между быстрыми осцилляциями и локальными решениями. В этой части мы начинаем асимптотический анализ задачи Коши (1), (2), где будем использовать хорошо известные объекты и их характеристики, которые можно найти в книгах, связанных с квазиклассической асимптотикой и лучевым методом, геометрической оптикой и волновыми фронтами, гамильтоновой механикой, теорией катастроф и т.д. Здесь собраны все необходимые концепции и дано их краткое описание в простой форме. Более полное изложение и детали можно найти в [28-30], [5], [7].

Введем параметр $\mu = l/L$, выражающий отношение между характерным размером источника l и характерной длиной L интервала медленно меняющейся глубины.

Наши асимптотические разложения выведены в предположении, что параметр $\mu \ll 1$, то есть $C(\mathbf{x}) = \sqrt{gH(\mathbf{x})}$ — функция, мало меняющаяся на расстоянии l .

Проблема здесь заключается в том, чтобы найти асимптотические решения $\eta(\mathbf{x}, t)$ для волнового уравнения с переменным коэффициентом. Они могут быть выражены с помощью траекторий, задающих волновой фронт (точное определение приведено в следующем подразделе). Нужно ввести искривленные лучи и характеристики, образующие одномерное семейство траекторий $\mathbf{P}(\psi, t)$, $\mathbf{X}(\psi, t)$ соответствующей гамильтоновой системы. Эта гамильтонова система может быть найдена с помощью ВКБ выражения для $\eta = A(\mathbf{x}, t) \exp(iS(\mathbf{x}, t)/h)$ с некоторым малым искусственным параметром h , введя его в уравнение и учитывая уравнения нулевого и первого порядка малости. Уравнение первого порядка — *уравнение Гамильтона-Якоби*, аналогичное (10), но с коэффициентом $C(\mathbf{x})$ вместо C_0 .

Решения соответствующей гамильтоновой системы определяют траектории, которые, в отличие от случая с постоянным коэффициентом C_0 , являются уже кривыми линиями.

Как уже упоминалось, ВКБ-решения описывают лишь осциллирующие решения. Чтобы перейти к локализованным решениям, введем новую переменную ρ , полагая $h = \rho/L$, умножим ВКБ-решения на некоторую затухающую (при $\rho \rightarrow \infty$) функцию $g(\rho, \psi)$ и проинтегрируем это произведение по ρ от 0 до ∞ . Получим функцию, локализованную в окрестности кривой, задаваемой уравнением $S(\mathbf{x}, t) = 0$, которая и определяет фронт. Переменная ρ и угол ψ подобны соответствующим переменным в случае бассейна постоянной глубины. Проблема состоит в определении фазы $S(\mathbf{x}, t)$ и функции $g(\rho, \psi)$ для получения решения задачи (1), (2). Трудность заключается в том, что при $t = 0$ фаза S , соответствующая задаче (1), (2), не является гладкой функцией, и точка $\mathbf{x} = 0$ — сильная фокальная точка. Таким образом, необходимо использовать асимптотическое представление, отличающееся от ВКБ-решений. Поэтому здесь и используется *канонический оператор Маслова*.

Реализация этих соображений вместе с разложением пограничного слоя [31, 32] вблизи волнового фронта дает не только фазу S и функцию $G(\rho, \psi) = \sqrt{\rho} \tilde{V}(\rho, \psi)$ ($\tilde{V}$ та же, что и в (5)), но также и глобальные асимптотические решения задачи (1), (2), удовлетворяющие начальным условиям при $t = 0$ и справедливые в случае фокальных точек и точек самопересечений на фронте и т.д. [10, 11]. Отметим, что для построения решений с локализованными начальными данными можно попытаться использовать асимптотику функции Грина [33, 34], но в ходе реализации этого подхода нужно вычислять довольно сложные интегралы [2]. Привлекая указанные выше идеи, нам удалось «угадать» правильное обобщение канонического оператора Маслова для решения задачи (1), (2), и задача свелась к упрощению соответствующих формул. Такой подход оказался хотя и не вполне

тривиальным, но существенно более простым, чем подход, основанный на асимптотике функции Грина. Полученные в результате достаточно явные формулы мы приводим ниже.

Лучи и волновые фронты. Гамильтонова система в случае бассейна переменной глубины $H(x)$ следующая:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} C(x), \quad \dot{\mathbf{p}} = -|\mathbf{p}| \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{p} \Big|_{t=0} = \mathbf{n}(\psi), \quad C(\mathbf{x}) = \sqrt{gH(\mathbf{x})}, \quad (12)$$

где $\mathbf{n}(\psi)$ есть единичный вектор (11). Следовательно, семейство траекторий $\mathbf{P}(\psi, t)$, $\mathbf{X}(\psi, t)$ системы (12) выходят из точки $\mathbf{x} = 0$ с единичным моментом $\mathbf{p} = \mathbf{n}(\psi)$ (при фиксированном ψ). Гамильтониан, соответствующий (12), имеет вид: $\mathcal{H} = C(\mathbf{X})|\mathbf{p}|$. Из свойства сохранения гамильтониана вдоль траектории следует:

$$|\mathbf{p}| C(\mathbf{X}) = C_0, \quad (13)$$

где введено обозначение $C(0) = C_0$.

Проекции $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\psi, t)$ траекторий на плоскость $\mathbb{R}_x^2$ называются *лучами*. Напомним, что *фронт* на плоскости $\mathbb{R}_x^2$ в момент $t > 0$ есть кривая $\gamma_t = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_x^2 | \mathbf{x} = \mathbf{X}(\psi, t), \psi \in [0, 2\pi)\}$ [5, 28]. Точки на этой кривой параметризуются углом $\psi \in [0, 2\pi)$. Если $\partial \mathbf{X} / \partial \psi \neq 0$ в каждой точке $\mathbf{x}$ волнового фронта γ_t , то волновой фронт есть гладкая кривая. Точки, в которых $\partial \mathbf{X} / \partial \psi = 0$, называются *фокальными точками*. В этих точках волновой фронт теряет гладкость. В ситуациях, когда появляются фокальные точки (такие ситуации очень интересны для проблемы цунами), разумно определить волновой фронт $\Gamma_t = \{\mathbf{p} = \mathbf{P}(\psi, t), \mathbf{x} = \mathbf{X}(\psi, t), \psi \in [0, 2\pi)\}$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}_{xp}^4$. В отличие от γ_t , множество Γ_t – гладкая замкнутая кривая для всех t . Отметим, что по крайней мере одна из компонент вектора $\mathbf{P}_\psi, \mathbf{X}_\psi$ отлична от нуля и что лучи $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t, \psi)$ ортогональны волновому фронту⁴ $\gamma_t: \langle \dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}_\psi \rangle = 0$.

Волновые профили в докритические моменты времени. Нетрудно показать, что найдутся такие $\delta > 0$ и $t_1 > \delta$, что волновой фронт γ_t уже образовался, но на нем нет фокальных точек при $t \in [\delta, t_1]$. Момент времени, с которого начинают формироваться фокальные точки, называется *критическим* и обозначается t_{cr} . Сначала мы предположим, что $\delta < t < t_{cr}$. Для этих моментов времени асимптотическое решение определится следующим образом. Рассмотрим окрестность волнового фронта для достаточно малой, не зависящей от μ координаты y , введенной как отклонение точки x из окрестности волнового фронта от волнового фронта. При этом примем, что $y \geq 0$ для внешней подобласти окрестности волнового фронта и $y \leq 0$ для внутренней подобласти. Тогда точка x в окрестности волнового фронта характеризуется двумя координатами: $\psi(t, x)$ и $y(t, x)$, где угол $\psi(t, x)$ определяется условием, что вектор $y = \tilde{x} - \mathbf{X}(\psi, t)$ ортогонален вектору, касательному к волновому фронту в точке $\mathbf{X}(\psi, t)$, такой что $\langle y, \mathbf{X}_\psi(\psi, t) \rangle = 0$.

Фаза определяется следующим образом:

$$S(t, x) = \langle \mathbf{P}(\psi(t, x), t), \mathbf{x} - \mathbf{X}(\psi(t, x), t) \rangle = \sqrt{\frac{H(0)}{H(\mathbf{X}(\psi(t, x), t))}} y, \quad (14)$$

где второе равенство есть следствие уравнения (13).

⁴ Эти факты справедливы для задачи (12), но не обязательно справедливы для фронтов и лучей, возникающих в других задачах.

Теперь сформулируем первое главное утверждение работы.

Утверждение 1. Для $t_{cr} > t > \delta$, в некоторой окрестности γ волнового фронта, не зависящей от μ , асимптотическая формула для возвышения свободной поверхности жидкости η представляется формулой:

$$\eta = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{|X_\psi(\psi, t)|}} \sqrt[4]{\frac{H(0)}{H(X(\psi, t))}} \operatorname{Re}[F(S(t, \mathbf{x})/l, \mathbf{n}(\psi))] \Big|_{\psi=\psi(t, \mathbf{x})} + O(\mu^{3/2}). \quad (15)$$

Вне этой окрестности $\eta = O(\mu^{3/2})$. Функция $F(z, \psi)$ определена в (7).

Для того чтобы вычислить $\eta(\mathbf{x}, t)$ в точке $\mathbf{x}$ в момент t , надо сначала найти траекторию гамильтоновой системы, выходящую из точки $\mathbf{x} = 0$, которая приходит в момент t в точку $\mathbf{x}$. Затем возможно рассчитать фазу $S(\mathbf{x}, t)$, используя описанное выше приближение.

Траектория определяется (см.(12)) функцией $H(\mathbf{x})$ и углом $\psi(\mathbf{x}, t)$ между осью $\mathbf{x}$ и лучом, который приходит в точку $\mathbf{x}$ в момент t , стартуя из начала координат $\mathbf{x} = 0$ в момент $t = 0$. Так что угол ψ может быть найден как решение уравнения $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\psi, t)$. Решение существует и единственно, поскольку вектор $\partial \mathbf{X} / \partial \psi \neq 0$ в докритические моменты времени.

Из явной формулы (15) видно, что возвышение свободной поверхности жидкости $\eta(\mathbf{x}, t)$ явно представляется в виде частей, определяемых формой начального возмущения через функцию $F(z, \psi)$ и изменением глубины бассейна вдоль траектории гамильтоновой системы.

Выведем несколько следствий из (15). Поскольку фаза $S(\mathbf{x}, t)$ равна нулю на волновом фронте и $|S(\mathbf{x}, t)| / l$ быстро возрастает по мере удаления от него, то максимум возвышения $|\eta|$ достигается в окрестности волнового фронта. Иногда при фиксированном t профиль волны может иметь несколько локальных максимумов и минимумов, число которых зависит от свойств функции $F(z, \psi)$, которая, в свою очередь, зависит от формы начального возмущения (см. рис. 1, 2).

Второй сомножитель в (15) есть не что иное, как двухмерный аналог закона Грина, хорошо известного в теории волн в каналах: высота волны возрастает как $1/\sqrt[4]{H(\mathbf{x})}$, когда глубина $H(\mathbf{x})$ бассейна уменьшается. Множитель $1/\sqrt{|X_\psi|}$ связан с расхождением лучей: чем меньше лучей приходит в окрестности точки $\mathbf{X}(\psi, t)$, тем меньше здесь будет амплитуда волны.

Множитель $\frac{H(0)}{H(X(\psi, t))}$ в фазе $S(\mathbf{x}, t)$ (см.(14)) выражает явление, называемое “сжатием”

профиля волны, и объясняет уменьшение длины волны цунами при уменьшении глубины.

Возможна следующая ситуация. Пусть значения функции $F(z, \psi)$ сильно различаются для двух заметно разных углов ψ_1 и ψ_2 . Предположим, что два луча, выходящие из точки $\mathbf{x} = 0$ под углами ψ_1 и ψ_2 , приходят из-за свойств функции $H(\mathbf{x})$ на волновой фронт в две очень близкие точки. Тогда высота волны может сильно различаться в этих точках. Эта ситуация иллюстрируется на рис. 3, 4. Линии уровня дна изображены сплошными линиями (1), волновые фронты (2), лучи (3) и волновые профили (4) – разными штриховыми линиями. Сплошные линии характеризуют изменение глубины. На них $H(\mathbf{x}) = \text{const}$, где

$$H(\mathbf{x}) = \frac{(1 + 3\text{th}^2(2x_1 + x_2 - 11))}{\text{ch}^2\left(\sqrt{4(x_1 - 7)^2 + (x_2 + 2)^2}/5\right)} \text{ (км)}. \quad \text{На рис. 5 дано условное изображение глубины, точ-}$$

нее, для наглядности, 3-D график функции $-100\sqrt[4]{H(\mathbf{x})}$. В формуле для $H(\mathbf{x})$ и на рис. 3-5 переменные x_1 и x_2 безразмерны и равны обозначенным ранее в тексте переменным x_1 и x_2 , деленным на величину l , измеряемую в км.

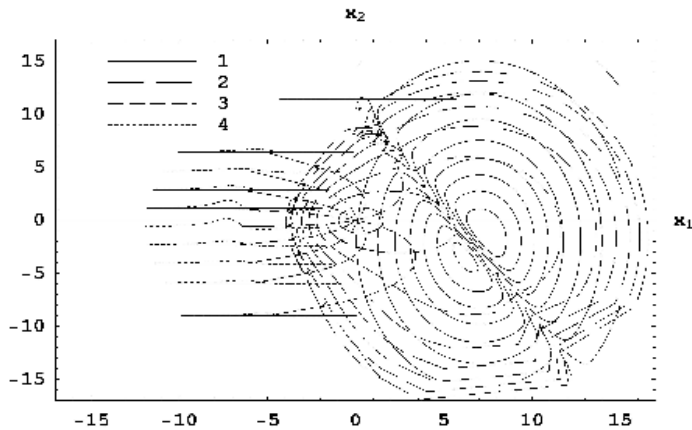


Рис. 3. Волновые фронты, лучи и профили в случае бассейна переменной глубины (см. текст).
 $V(y)$ задана в (9), где $V_0 = 1$ м, $b = 1.4$

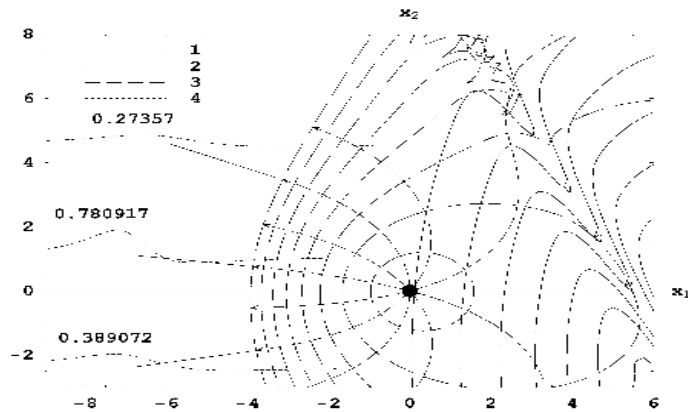


Рис. 4. Часть рис. 3

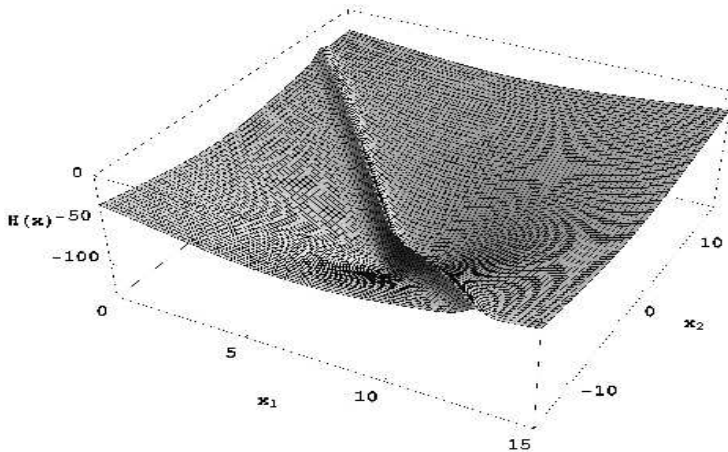


Рис. 5. Условный трехмерный график функции $H(x)$, соответствующей рис. 3, 4

$$\eta = \sum_j \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{|X_{\psi_j}(\psi_j, t)|}} \sqrt{\frac{H(0)}{H(X(\psi_j, t))}} \operatorname{Re} \left[e^{i\pi m_j/2} F(S_j(x, t), n(\psi)) \right] \Big|_{\psi=\psi_j(t, x)} + O(\mu^{3/2}). \quad (16)$$

Вне окрестности фронта γ_t $\eta(x, t) = O(\mu^{3/2})$. Функция $F(z, \psi)$ по-прежнему определена (7).

Видно, что индекс m_j меняет поведение функций, определяющих волновой профиль (рис. 6).

Волновые фронты показаны в моменты $t = 50l, 100l, \dots, 400l$ с. Волновые профили показаны в окрестностях последних волновых фронтов в направлениях лучей, указанных стрелками. Число около каждого волнового профиля показывает его максимальную высоту в метрах.

Волновые профили в за- критические моменты времени.

В моменты $t > t_{cr}$ на волновом фронте появляются фокальные точки. Теперь возвышение волны $\eta(x, t)$ в точке x , принадлежащей окрестности фокальной точки, представляется суммой компонент (волн), пришедших с различными $\psi_j(x, t)$, $y_j(x, t)$ и $S_j(x, t)$, помеченных номером j , и с так называемым индексом Маслова $m_j = m(\psi_j(x, t), t)$.

Индекс Маслова принимает одно из четырех значений: 0, 1, 2, 3. Он определяется многими способами и содержит топологическую информацию о рассматриваемой задаче. В статье [11] показано, что для задачи (1), (2) можно упростить его вычисление, связав $m_j = m(\psi_j(x, t), t)$ с индексом Морса, который определяется количеством фокальных точек, находящихся на траектории. Сформулируем утверждение, обобщающее формулу (15).

Утверждение 2. В окрестности фронта, но вне некоторой окрестности фокальных точек, асимптотическая формула для возвышения свободной поверхности жидкости η представляется суммой:

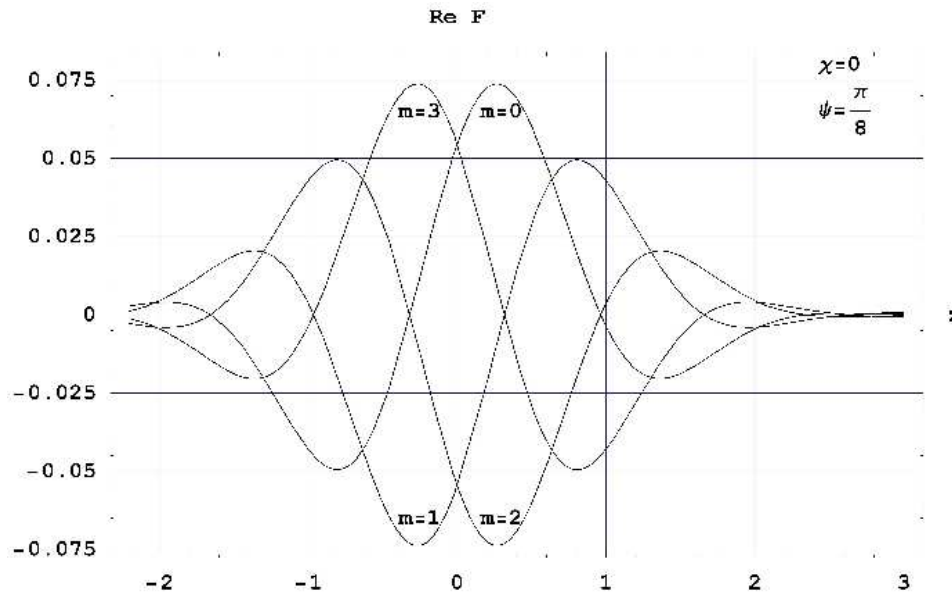


Рис. 6. *Метаморфозы профиля, вызванные индексом Маслова (Морса): функция $\text{Re}[F(z, \psi)]$ для $V(y)$ определенной (8), где $V = 1$ м, $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $\chi = 0$; соответствующие индексы Маслова (Морса) $m = 0, 1, 2, 3$*

Подчеркнем, что число m имеет чисто топологический и геометрический смысл и может быть вычислено без всякой связи с асимптотическими формулами для волнового поля. Из утверждения 2 следует, что для того чтобы определить $\eta(\mathbf{x}, t)$ в некоторый момент t в некоторой точке $\mathbf{x}$, нужно знать только начальные значения $\eta|_{t=0}$ и $\eta|_{t=0}$ и не нужно знать волновое поле η в предыдущие времена между 0 и t . Траектории вместе с индексом Маслова (Морса) учитывают все метаморфозы волнового поля в течение всей эволюции от нулевого времени до времени t .

Найти изменение индекса Морса при прохождении через фокальную точку можно, изучая изменения знака детерминанта (якобиана) $\det(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}_\psi)$ при движении вдоль траектории. Отметим еще, что приведенные формулы можно использовать для нахождения начального возвышения V по измерениям высот волн, сделанных в разных точках наблюдения.

Асимптотика волнового поля в окрестности фокальной точки

Особенности волнового фронта и фокальные точки. Чтобы дать полное описание асимптотического решения задачи (1), (2), нужно еще описать асимптотику функции η в окрестности фокальных точек. Эти точки являются сингулярными точками на фронте; их можно увидеть в верхней части рис. 3 и в верхнем правом углу рис. 4. Они расположены над подводным хребтом и на самом деле связаны с хорошо известными волнами захвата. Амплитуда волнового поля возрастает в окрестности этих точек и зависит от степени их вырождения. По-видимому, в реальных ситуациях могут реализоваться лишь простейшие ситуации, тем не менее, мы даем общие формулы.

Фокальные точки и система координат. Рассмотрим ситуацию, когда для некоторого t точка $(\mathbf{P}^F, \mathbf{X}^F) = (\mathbf{P}(\psi^F(t), t), \mathbf{X}(\psi^F(t), t))$, соответствующая углу $\psi^F(t)$, является *фокальной*. В этой точке $\mathbf{X}_\psi = 0$ и необходимо использовать другое асимптотическое представление для решения. Вообще говоря, окрестность точки $\mathbf{X}(\psi^F(t), t)$ на плоскости $\mathbb{R}_x^2$ может включать дуги γ_t с углами ψ , отличными от $\psi^F(t)$. Это означает, что нужно учитывать вклад всех этих дуг в конечную формулу для η в окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\psi^F(t), t)$. Влияние неособых точек определяется формулой (16), а влияние точек из

окрестности фокальных точек описывается формулой (17), которая будет приведена ниже, в **Утверждении 3**. Таким образом, нужно пронумеровать фокальные точки со смежными проекциями и записать $\mathbf{P}(\psi_j^F(t), t)$, $\mathbf{X}(\psi_j^F(t), t)$. Эти точки имеют то же положение $\mathbf{X}^F = \mathbf{X}(\psi_j^F(t), t)$, но отличный момент $\mathbf{P}^F = \mathbf{P}(\psi_j^F(t), t)$. Для упрощения обозначений мы обобщаем здесь влияние на η лишь одной фокальной точки, опустив индекс j , но сохранив $\mathbf{P}^F$.

Соответствующая формула представлена в предположении, что некоторая производная

$$\mathbf{X}_{\psi}^{(n)F} = \frac{\partial_n \mathbf{X}}{\partial \psi_n}(\psi^F(t), t) \neq 0,$$

а производные $\mathbf{X}_{\psi}^{(k)F} = 0$, для $1 \leq k < n$. Это означает, что эта фокальная точка не полностью вырождена. Введем “стандартный” и “смешанный” якобианы:

$$J = \det(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}_{\psi})(\psi, t), \quad \tilde{J} = \det(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{P}_{\psi})(\psi, t) = \frac{C^2(\mathbf{X}) \det(\mathbf{P}^F, \mathbf{P}_{\psi}^F)}{C_0}(\psi, t)$$

и некоторые характеристические величины фокальной точки $(\mathbf{P}^F, \mathbf{X}^F)$:

$$C_F = C(\mathbf{X}^F), \quad \dot{\mathbf{X}}_F = \dot{\mathbf{X}}(\psi^F(t), t) = \frac{\mathbf{P}^F C_F^2}{C_0}, \quad \mathbf{P}_{\psi}^F = \mathbf{P}_{\psi}(\psi^F(t), t),$$

$$\tilde{J}_F = \det(\dot{\mathbf{X}}^F, \mathbf{P}_{\psi}^F) = \frac{C_F^2 \det(\mathbf{P}, \mathbf{P}_{\psi})}{C_0}, \quad J_F^{(n)} = \det(\dot{\mathbf{X}}^F, \mathbf{X}_{\psi}^{(n)F}).$$

Теперь опять появляется топологическая характеристика, т.е. индекс Маслова этой фокальной точки или ее окрестности (что тоже самое), но теперь он зависит от выбора координат в окрестности $(\mathbf{P}^F, \mathbf{X}^F)$. Естественно выбрать новые координаты (x'_1, x'_2) , связанные с ненулевым вектором $\dot{\mathbf{X}}^F = \dot{\mathbf{X}}(\psi^F(t), t)$. Предположим, что направление новой вертикальной оси x'_2 совпадает с вектором $\dot{\mathbf{X}}^F$. Положим $\mathbf{k}_2 = (k_{21}, k_{22})^T = \dot{\mathbf{X}}^F / |\dot{\mathbf{X}}^F| = \dot{\mathbf{X}}^F / C_F = \mathbf{P}^F C_F / C_0$, $\mathbf{k}_1 = (k_{11}, k_{12})^T = (k_{22}, -k_{21})^T$ и введем новые координаты, $\mathbf{p}'$, $\mathbf{x}'$ в окрестности $(\mathbf{P}^F, \mathbf{X}^F)$ в фазовом пространстве $\mathbb{R}_{xp}^4$ с помощью формул:

$$x'_1 = \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{x} - \mathbf{X}^F \rangle = -\frac{\det(\dot{\mathbf{X}}^F, \mathbf{x} - \mathbf{X}^F)}{C_F} = -\frac{C_F}{C_0} \det(\mathbf{P}^F, \mathbf{x} - \mathbf{X}^F),$$

$$x'_2 = \langle \mathbf{k}_2, \mathbf{x} - \mathbf{X}^F \rangle = \frac{\langle \dot{\mathbf{X}}^F, \mathbf{x} - \mathbf{X}^F \rangle}{C_F} = \frac{C_F}{C_0} \langle \mathbf{P}^F, \mathbf{x} - \mathbf{X}^F \rangle,$$

$$p'_1 = \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{p} \rangle, \quad p'_2 = \langle \mathbf{k}_2, \mathbf{p} \rangle.$$

Легко видеть, что

$$\det \begin{pmatrix} \dot{P}'_1 & P'_{1\psi} \\ \dot{X}'_2 & X'_{2\psi} \end{pmatrix} = \tilde{J}_F.$$

Индекс Маслова фокальной точки. Детерминант $\tilde{J}_F \neq 0$ в фокальной точке $(\mathbf{P}^F, \mathbf{X}^F)$; следовательно, то же неравенство имеет место в некоторой окрестности этой точки, и $\tilde{J}$ имеет постоянный знак. Напротив, детерминант (якобиан) J меняет знак в этой окрестности.

Определим индекс Маслова $m(\mathbf{P}^F, \mathbf{X}^F)$ не (полностью) вырожденной фокальной точки $(\mathbf{P}^F, \mathbf{X}^F) = (\mathbf{P}, \mathbf{X})(\psi^F(t), t)$ как индекс $m(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{X}})(\psi, t)$ такой регулярной точки $(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{X}}) = (\mathbf{P}, \mathbf{X})(\tilde{\psi}, \tilde{t})$ из окрестности $(\mathbf{P}^F, \mathbf{X}^F)$, что знаки детерминантов $J(\tilde{\psi}, \tilde{t})$ и $\tilde{J}(\tilde{\psi}, \tilde{t})$ совпадают. Например, можно выбрать $\tilde{\psi} = \psi^F(t)$, $\tilde{t} = t \pm \delta$, где δ достаточно

мало. Это означает, что мы сравниваем знаки J и $\tilde{J}$ на траектории $(\mathbf{P}, \mathbf{X})$, пересекающей кривую Γ_i в фокальной точке $(\mathbf{P}^F, \mathbf{X}^F)$ до и после их пересечения.

Модельные функции и волновой профиль в окрестности фокальной точки. Представим формулы для волнового поля в окрестности фокальной точки $\mathbf{x} = \mathbf{X}^F$. Положим $\sigma = \text{sign}(\tilde{J}_F J_F^{(n)})$ и введем функцию (или более точно, линейный оператор, действующий на функцию $V(y_1, y_2)$):

$$\begin{aligned} g_n^\sigma(z_1, z_2, \psi) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \rho d\rho \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\psi)) \exp\{i\rho(z_2 - \xi z_1 - \sigma \xi^{n+1})\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \sqrt{\rho} d\rho \tilde{f}(\rho \mathbf{n}(\psi)) \exp\{i\rho(z_2 - \xi z_1 - \sigma \xi^{n+1})\}. \end{aligned}$$

Положим:

$$z_1^F = -\frac{\det(\mathbf{P}^F, \mathbf{x} - \mathbf{X}^F)}{l} \sqrt[n+1]{\frac{l(n+1)!}{|\mathbf{P}_\psi^F| |\mathbf{X}_\psi^{(n)F}|}}, \quad z_2^F = \frac{x_2'}{l} \frac{C_0}{C_F} \equiv \frac{\langle \mathbf{P}^F, \mathbf{x} - \mathbf{X}^F \rangle}{l}.$$

Утверждение 3. В окрестности фронта γ каждая фокальная точка $(\mathbf{P}^F, \mathbf{X}^F)$ дает следующий вклад в асимптотическое значение решения η :

$$\eta^F = \frac{\sqrt{|\mathbf{P}_\psi^F|}}{2\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{C_0}{C_F}} \sqrt[n+1]{\frac{l(n+1)!}{|\mathbf{P}_\psi^F| |\mathbf{X}_\psi^{(n)F}|}} \left\{ \text{Re} \left[e^{-i\pi m(\mathbf{P}^F, \mathbf{X}^F)/2} g_n^\sigma(z_1^F, z_2^F, \psi^F) \right] + O(\mu^{2/(n+1)}) \right\}. \quad (17)$$

Если несколько дуг γ_i принадлежат окрестности точки $\mathbf{x}$, необходимо суммировать все соответствующие функции (16) и (17).

Интегралы в этих общих формулах в случае начального возмущения вида (9) могут быть вычислены, и ответ может быть выражен в элементарных функциях. Здесь, однако, требуются дополнительные исследования, и мы откладываем их до последующих публикаций.

* * *

В статье приведены достаточно явные формулы для полного асимптотического описания решения задачи Коши с локализованным начальным возмущением (источником) общего вида для волнового уравнения с медленно меняющейся скоростью волны. Предлагаемое описание основывается: на специальных траекториях простой гамильтоновой системы; их первых производных и функциях, определяемых начальным возмущением (источником); и в случае, когда на фронте появляется фокальная точка, – целых числах (индексах Маслова или Морса). Все эти объекты хорошо известны в геометрической оптике и квазиклассическом приближении и наш главный прагматический результат состоит в том, что окончательные формулы для решения задачи (1), (2), представленные в Утверждениях 1–3, оказываются весьма эффективными: достаточно простыми и явными. Еще раз подчеркнем, что их вывод не является тривиальным и опирается на результаты фундаментальных математических исследований.

Рассмотрены возмущения “гауссового” и “степенного” вида. В первом случае ответ выражается в гипергеометрических функциях, а во-втором – в элементарных функциях. Одно из основных заключений, получаемых из исследований этих двух конкретных ситуаций, состоит в следующем. Как качественное, так и количественное различие между профилями волн в этих случаях оказывается не слишком существенным при условии, что оно не велико для форм начальных возмущений. При этом волновой профиль может сильно зависеть от структуры начального возмущения – количества осцилляций и т.д. С другой, стороны из анализа общих формул понятно, что запас начальных возмущений,

приводящих к явным выражениям для формы профиля волны, весьма ограничен. Поскольку в реальных условиях весьма проблематично получить любую детальную информацию о начальном возмущении не только в момент его действия, но и позже, то кажется разумным более активно развивать системы предупреждения цунами, основанные на использовании упрощенных начальных возмущений (сейсмических источников). Учитывая, что визуализация на персональных компьютерах асимптотических формул для рассмотренных в данной статье возмущений (источников) не сложна и занимает немного времени, нам представляется, что они могут служить для указанной цели.

Авторы благодарят Т.Я.Тудоровского за обсуждения и помощь в подготовке иллюстраций.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 08-01-00726 и научного соглашения между Департаментом физики Римского университета "La Sapienza" и Институтом проблем механики Российской академии наук им.А.И.Ишлинского.

Литература

1. Maslov V.P., Fedorjuk M.V. Logarithmic asymptotics of fast decaying solutions to Petrovskii type hyperbolic systems // *Math. Notes*. 1989. V.45. No.5. P.50–62.
2. Dobrokhoto S.Yu., Maslov V.P., Zhevandrov P.N., Shafarevich A.I. Asymptotic fast-decreasing solution of linear, strictly hyperbolic systems with variable coefficients // *Math.Notes*. 1991. V.49. No.4. P.355–365.
3. Бабич В.М. Распространение нестационарных волн и каустики // *Ученые записки ЛГУ. Сер. матем.* 1958. Т.246. Вып.32. С.228–260.
4. Бабич В.М. Поведение нестационарной волны в окрестности каустики // *Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Сер. матем.* 1961. № 5.
5. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во Моск. Универ., 1965.
6. Maslov V.P. Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1972.
7. Dobrokhoto S.Yu., Zhevandrov P.N. Asymptotic expansions and the Maslov canonical operator in the linear theory of water waves. I. Main constructions and equations for surface gravity waves // *Russ. J. Math. Phys.* 2003. V.10. P.1–31.
8. Maslov V.P. Fedoriuk M.V. Semi-Classical Approximation in Quantum Mechanics / In: *Mathematical Physics and Applied Mathematics 7, Contemporary Mathematics 5*. Dordrecht etc.: D. Reidel Publishing Co. 1981. ix, 301 p.
9. Доброхотов С.Ю., Секерж-Зенькович С.Я., Тироцци Б., Тудоровский Т.Я. Описание распространения волн цунами на основе канонического оператора Маслова. ДАН. 2006. Т.409. № 2. С.171–175.
10. Dobrokhoto S., Sekerzh-Zenkovich S., Tirozzi B., Volkov B. Explicit asymptotics for tsunami waves in framework of the piston model, *Russ. Journ. Earth Sciences*. 2006. V.8. ES403. P.1–12.
11. Dobrokhoto S., Shafarevich A., Tirozzi B. Localized wave and vortical solutions to linear hyperbolic systems and their application to the linear Shallow Water Equations // *Russ. J. Math. Phys.* 2008. V.15. No.2. P.192–221.
12. Dobrokhoto S., Sekerzh-Zenkovich S., Tirozzi B., Tudorovski T. Asymptotic theory of tsunami waves: geometrical aspects and the generalized Maslov representation // *Publications of the Kyoto Research Mathematical Institute*. 2006. P.118–152.
13. Доброхотов С.Ю., Тироцци Б., Шафаревич А.И. Представление быстроубывающих функций каноническим оператором Маслова. Мат. заметки, 2007. Т.82. № 5. С.713–717.
14. Dobrokhoto S.Yu., Sinitsyn S.O., and Tirozzi B. Asymptotics of Localized Solutions of the One-Dimensional Wave Equation with Variable Velocity. I. The Cauchy Problem // *Russ. J. Math. Phys.* 2007. V.14. No.1. P.28–56.
15. Bianchi D., Dobrokhoto S. Yu., and Tirozzi B. Asymptotics of Localized Solutions of the One-Dimensional Wave Equation with Variable Velocity. II. Taking into account a source on the right hand side and a weak dispersion // *Russ. J. Math. Phys.* 2008. V.15. No.4. P.427–446.
16. Whitmore P.M., Sokolowski T.J. Predicting tsunami amplitudes along the North American coast from tsunamis generated in the Northwest Pacific ocean during tsunami warnings // *Science of Tsunami Hazards*. 1996. V.4. No.3. P.147–166.
17. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами Н.Новгород: ИПФ РАН, 1996.
18. Kowalik Z., Murty T. Numerical modelling of ocean dynamics. World Scientific, Singapore. 1993. P.5–19.
19. Lewis C.L., Adams W.M. Development of a tsunami-flooding model having versatile formulation of moving boundary conditions // *The Tsunami Society Monograph Series*. 1983. No.1.

20. Шокин Ю.И., Чубаров Л.Б., Марчук А.Г., Симонов К.В. Численные эксперименты в задаче цунами. Новосибирск: Наука, Сибирское отд., 1989.
21. Tinti S. Tsunami in the world. Kluwer Acad. Press. 1993.
22. Боровиков В.А., Келберт М.Я. Поле вблизи фронта волны в задаче Коши-Пуассона // Изв. АН СССР. Сер. Мех. жид. и газа. 1984. № 2. С.173–174.
23. Доброхотов С.Ю., Жевандров П.Н., Кузьмина В.М. Асимптотика решения задачи Коши-Пуассона в слое непостоянной толщины // Математические заметки 1993. Т.53. № 6. С.141–145.
24. Berry M.V. Tsunami asymptotics // New Journal of Physics. 2005. V.7, 129. P.1–18.
25. Sekerzh-Zenkovich S.Ya., Volkov.B.I. Application of Asymptotic Solution for the Computation of the Piston Model of Zunami // Russ. J. Math. Phys. 2007. V.14. No.3. P.319–331.
26. Sekerzh-Zenkovich S.Ya., Volkov.B.I. Unusual Direction of Waves in the Piston Model for Zunami // Russ. J. Math. Phys. 2008. V.15. No.3. P.401–410.
27. Berry M.V.. Focused tsunami waves, Proc. R. Soc. A. 2007. V.463, P.3055–3071.
28. Доценко С.Ф., Сергеевский Б.Ю., Черкасов Л.В. Пространственные волны цунами, вызванные знакопеременным смещением поверхности океана / В Сб. "Исследования цунами". 1986. № 1. С.7–14.
29. Arnold V.I. Singularities of caustics and wavefronts. Kluwer Academic Publishers. 1990.
30. Babich, V.M., Buldyrev V.S. Short-Wavelength Diffraction Theory. Springer-Verlag. 1991.
31. Babich V.M., Buldyrev V.S., Molotkov I.A. Пространственно-временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны. Ленинград: Изд-во Ленинградского ун-та, 1985.
32. Вишик М.Т., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи матем. наук. 1957. Т.12. № 5. С.3–122.
33. Маслов В.П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
34. Brekhovskikh L.M., Godin O.A. Acoustics of layered media II. Point source and bounded beams. Springer-Verlag. 1992
35. Киселев А.П. Генерация модулированных колебаний в неоднородной среде. Математические вопросы теории распространения волн // Записки научных семинаров ЛОМИ. Т.104. С.111–122.

Статья поступила в редакцию 22.12.2008 г.