

УДК 532.591+539.3

В.А.Комаров¹, А.А.Коробкин^{2,3}, И.В.Стурова², З.И.Федотова⁴, Л.Б.Чубаров⁴

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЕДИНЕННОЙ ВОЛНЫ С ПЛАВАЮЩЕЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНОЙ

В связи с созданием искусственных плавающих платформ больших размеров возникла необходимость исследования их нестационарного поведения при набегании волн большой амплитуды. Предложены численные методы для анализа гидроупругого поведения плавающих структур больших размеров при набегании на них уединенной волны. Исследованы три нелинейные модели: система мелкой воды (бездисперсионная), слабо нелинейная слабо дисперсионная модель Перегринна и сильно нелинейная слабо дисперсионная модель Грина-Нагди. Точность и эффективность предложенных методов проверена с помощью сопоставления с известными экспериментальными результатами. Выполнено сравнение нелинейных и линейных результатов. Показано, что набегание уединенной волны с относительно малой амплитудой можно рассматривать как слабо нелинейный случай.

Взаимодействие гравитационных волн с деформируемой пластиной, плавающей на поверхности жидкости, представляет интерес в связи с интенсивным изучением динамики ледовых полей и искусственных платформ под действием морского волнения. Плавающие структуры используются для различных целей: в качестве мостов, аэродромов, эвакуационных баз, электростанций, волноломов, контейнерных терминалов и т.п. Эти объекты имеют очень большие горизонтальные размеры, достигающие нескольких километров, и относительно малую изгибную жесткость. Именно поэтому изучение их гидроупругого поведения более важно, чем изучение их движения как твердого тела. При математическом моделировании такие объекты часто рассматриваются как тонкие упругие пластины.

В силу больших размеров плавающих структур возникают трудности при воспроизведении природных явлений в лабораторных условиях, поэтому основные усилия исследователей направлены на создание эффективных численных алгоритмов для решения этих задач.

Большое число работ посвящено исследованию влияния регулярного внешнего волнения на поведение плавающей упругой пластины [1-3]. В этих исследованиях амплитуды поверхностных волн, а также изгибные колебания пластины предполагаются малыми, и задача решается в линейной постановке. При этом течение жидкости и деформации упругой пластины считаются периодическими функциями времени. Эти предположения значительно упрощают задачу.

В штормовых условиях амплитуды поверхностных волн могут быть достаточно велики, что приводит к необходимости решать рассматриваемую задачу в нелинейной постановке. Как отмечается в обзоре [1], исследование влияния нелинейных волн на плавающие структуры еще не является полным. Далее приведем краткий анализ выполненных работ по этой теме.

Набегание монохроматической волны большой амплитуды на ледяную полосу рассмотрено в [4]. Решение получено с помощью разложения потенциала скоростей и перемещения пластины по малому амплитудному параметру нелинейности. Показано, что гидродинамическая нелинейность доминирует над нелинейностью изгибных колебаний

¹ Новосибирский государственный университет

² Институт гидродинамики им.М.А.Лаврентьева СО РАН (Новосибирск)

³ Университет Восточной Англии (Норидж)

⁴ Институт вычислительных технологий СО РАН (Новосибирск)

пластины, так как изгибно-гравитационные волны в пластине являются более длинными, чем поверхностные волны. В связи с этим, как правило, уравнения движения жидкости рассматриваются в нелинейной постановке, а изгибные колебания пластины предполагаются линейными.

Наиболее общим подходом является решение нелинейной нестационарной задачи в полной потенциальной постановке. Поведение прямоугольной пластины, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины h , под действием внешней ударной нагрузки или набегающей уединенной волны с амплитудой $0,5 h$ рассмотрено в [5, 6]. Возникающие при набегании уединенной волны горизонтальные движения пластины, закрепленной на упругой связи, изучены в [7].

Однако решение трехмерной задачи является достаточно сложным и требует больших вычислительных затрат. Упрощением является рассмотрение упругой пластины в виде бесконечной полосы постоянной ширины в предположении, что все характеристики течения не зависят от координаты вдоль полосы, – т.е. исследование двумерной задачи. Такая пластина далее будет называться балочной. Поведение балочной пластины при набегающей на нее волн различных типов (монокроматических, случайных и уединенных) рассмотрено в [8-11]. Численные результаты сопоставлены с экспериментальными данными и получено хорошее согласование между ними. Показано, что в случае набегающей уединенной волны на упругую пластину малой жесткости происходит трансформация волны в волновой цуг, что может приводить к появлению больших значений изгибающих моментов в пластине.

Представляет значительный интерес исследование поведения плавающей платформы вблизи берега, где глубина жидкости достаточно мала по сравнению с длиной набегающих поверхностных волн и горизонтальными размерами платформы. При этом воздействие на платформу уединенной волны является более опасным, чем штормового волнения, так как защитные сооружения в виде волноломов не являются эффективными для таких волн.

Известно, что существует несколько моделей нелинейной мелкой воды. Наиболее популярными являются три из них: I - система мелкой воды (бездисперсионная), II - слабо нелинейная слабо дисперсионная модель Перегринна и III - сильно нелинейная слабо дисперсионная модель Грина-Нагди. В русскоязычной литературе модель III часто называется моделью Железняк-Пелиновского [15]. Модель II использована в [12-14] для исследования поведения плавающей упругой пластины в одномерной и двухмерной постановках. Результаты лабораторных экспериментов по набегающей уединенных волн на упругую пластину представлены в [12]. Получено хорошее согласование экспериментальных и теоретических результатов для характеристик поведения свободной поверхности и упругой пластины. Сравнение результатов линейной и нелинейной теорий мелкой воды дано в [14]. Показано, что фазовая скорость нелинейной волны после прохождения ее под пластиной больше, чем соответствующая скорость линейной волны. Уменьшение изгибной жесткости пластины приводит к уменьшению изгибающих моментов. Совместное движение уединенной волны в жидкости и под прямоугольной упругой пластиной изучено в [13]. Так как уединенная волна под пластиной движется быстрее, чем по свободной поверхности жидкости, то на пластине образуются волны, распространяющиеся в направлении перпендикулярном краю пластины.

Работы [16-18] посвящены применению для исследования нестационарного поведения упругой полосы модели III, которая является наиболее точной в рамках нелинейной теории мелкой воды. Выведены условия согласования течений под пластиной и в области чистой воды, основанные на законах сохранения массы, импульса и механической энергии. Основное внимание уделено одномерной задаче о набегающей уединенной волны на упругую балочную пластину. Показано хорошее согласование с экспериментальными и теоретическими результатами [8-14]. В [17] исследовано также набегающие кноидальных

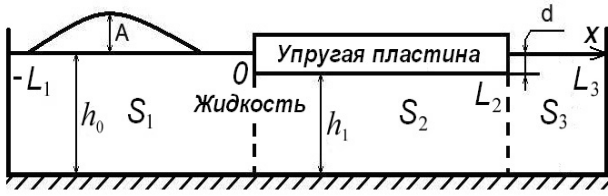


Рис. 1. Схема течения

вопросов нуждается в дополнительном изучении; так, например, отсутствует сопоставление результатов различных моделей и не определены области применимости каждой из них.

В данной работе на примере одномерной задачи о набегании уединенной волны на плавающую балочную пластину выполнено сравнение результатов для трех указанных выше нелинейных моделей мелкой воды. Для модели I, наряду с общепринятым конечно-разностным решением, представлено и решение, полученное спектральным методом, где прогиб пластины ищется в виде разложения по собственным функциям колебания балки в пустоте, а гидродинамическая часть задачи – в виде усеченных рядов Фурье. В итоге задача сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Постановка задачи. Пусть на поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости плавает тонкая упругая балочная пластина. Поверхность жидкости, не закрытая пластиной, является свободной. Область S , занятая жидкостью, делится на три части (рис. 1): $S_1 (-L_1 \leq x < 0)$, $S_2 (0 < x < L_2)$, $S_3 (L_2 < x \leq L_3)$. Жидкость ограничена снизу ровным горизонтальным дном. Рассматривается нестационарная задача о поведении жидкости и пластины, вызванном набеганием на пластину слева уединенной волны.

Изгибные колебания балочной пластины описываются уравнением балки Эйлера. Предполагается, что пластина может совершать движения только в вертикальном направлении, и ее нижняя часть полностью смачивается жидкостью. Течение жидкости над ровным дном описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial [(h + \eta)u]}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{du}{dt} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = F, \quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2)$$

Здесь $\eta(x, t)$ - уровень жидкости по отношению к состоянию покоя; $u(x, t)$ - горизонтальная скорость течения; g - ускорение свободного падения; ρ - плотность жидкости; h - глубина жидкости в состоянии покоя, равная h_0 в областях S_1 и S_3 и $h_1 = h_0 - d$ в области S_2 , где d - осадка пластины; $P(x, t)$ - давление на поверхности жидкости, равное нулю в областях S_1 и S_3 , а в области S_2 :

$$P = m \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + D \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + mg, \quad (3)$$

где $D = \frac{Eh_p^3}{12(1 - \nu^2)}$ - изгибная жесткость пластины, $m = \rho_p h_p$, E, h_p, ρ_p, ν - масса, модуль Юнга, толщина, плотность и коэффициент Пуассона пластины, соответственно.

Все три модели нелинейной мелкой воды, используемые в данной работе, отличаются только правой частью F в уравнении (2):

$$F = 0 \text{ для модели I, } F = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \text{ для модели II,}$$

$$F = -\frac{1}{3} \left[2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{d^2 \eta}{dt^2} + (h + \eta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d^2 \eta}{dt^2} \right) \right] \text{ для модели III.}$$

Граничные условия на вертикальных стенках $x = -L_1$ и $x = L_3$ могут быть двух типов:

1) условия твердой стенки:

$$u = 0 \quad (x = -L_1, L_3); \quad (4)$$

2) открытые граничные условия:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - c \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0 \quad (x = -L_1), \quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} + c \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0 \quad (x = L_3), \quad c = \sqrt{g(h_0 + \eta)}, \quad (5)$$

где Ω соответствует $\eta(x, t)$ или $u(x, t)$. На краях пластины ставятся условия свободного края – равенство нулю изгибающего момента и перерезывающей (поперечной) силы (см., например, [19], разд.53):

$$\partial^2 \eta / \partial x^2 = \partial^3 \eta / \partial x^3 = 0 \quad (x = 0, L_2). \quad (6)$$

Условия на скачки гидродинамических характеристик при $x = 0$ и $x = L_2$ выводятся из законов сохранения массы, импульса и механической энергии (см., подробнее, [16-18]). Для модели III они имеют следующий вид (для простоты рассматривается только левый край пластины $x = x_l$ и x_l^+, x_l^- - пределы справа и слева соответственно):

$$\begin{aligned} & [(h + \eta)u] \Big|_{x_l} = 0, [(h + \eta)u] \Big|_{x_r} = 0, \\ & \left[-\left[\frac{1}{3} \rho (h + \eta)^2 + m(h + \eta) \right] u_{xt} - m \eta_x u_t + \frac{1}{3} \rho (h + \eta)^2 (u_x^2 - u u_{xx}) + \rho g (h + \eta) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \rho \left(u^2 + \frac{1}{3} (h + \eta)^2 u_x^2 \right) + m \left[u^2 \eta_{xx} + 3 u u_x \eta_x + (h + \eta) (u_x^2 + u u_{xx}) \right] + D \eta_{xxxx} + m g \right] \Big|_{x_l^+} = \\ & \left[-\frac{1}{3} \rho (h + \eta)^2 u_{xt} + \frac{1}{3} \rho (h + \eta)^2 (u_x^2 - u u_{xx}) + \rho g (h + \eta) + \frac{1}{2} \rho \left(u^2 + \frac{1}{3} (h + \eta)^2 u_x^2 \right) \right] \Big|_{x_l^-} + \\ & + \frac{\rho}{3} \left((h + \eta) u_x \Big|_{x_l^+} - (h + \eta) u_x \Big|_{x_l^-} \right) [u \eta_x + u_x (h + \eta)] \Big|_{x_l^+} \end{aligned} \quad (8)$$

Запись $[f]$ означает разницу значений f справа и слева от рассматриваемой точки. Также необходимо выполнить следующие условия при $x = 0$ и $x = L_2$ для течения жидкости под пластиной (см., подробнее, [16-18]):

$$3 u_{xx} \eta_x + (h + \eta) u_{xxx} = 0, \quad 4 u_{xxx} \eta_x + (h + \eta) u_{xxxx} + \eta_{xxxx} u = 0.$$

В начальный момент $t = 0$ пластина не деформирована и ее вес компенсируется силой плавучести, т.е. $m = \rho d$. Жидкость в областях S_2 и S_3 покоится, а в области S_1 задается возмущение в форме уединенной волны, являющейся точным решением уравнений Грина-Нагди:

$$\eta(x, t) = \frac{A}{ch^2(a)}, \quad u(x, t) = \frac{U^0 \eta}{h_0 + \eta}, \quad a = \sqrt{\frac{3A}{4(h_0 + A)}} \frac{x - x^0 - U^0 t}{h_0}, \quad (9)$$

где A – амплитуда волны, $U^0 = \sqrt{g(h_0 + A)}$, x^0 – положение вершины волны в момент времени $t = 0$. Отметим, что функции вида (9) не являются точными решениями определяющих уравнений моделей I и II, что при использовании этих уравнений для описания движения соответствующей волны по ровному участку покажет ее деформацию. Степень деформации будет зависеть от амплитуды волны и расстояния, на которое она продвинется.

Удобно понизить порядок производных функции $\eta(x, t)$ по времени, используя уравнение (1). Так, например:

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) [-(h + \eta) u_x] = - \left[\frac{d\eta}{dt} u_x + (h + \eta) (u_{xt} + u u_{xx}) \right] = (h + \eta) (u_x^2 - u_{xt} - u u_{xx}). \quad (10)$$

Конечно-разностный метод. Для построения конечно-разностного алгоритма область решения задачи покрывается однородной сеткой с узлами x_j , $j = 1, \dots, N$. Для учета условий на краях пластины между областями S_1, S_2, S_3 помещаются по три фиктивных точки. Каждый фиктивный слой содержит три неизвестных для скорости и два – для уровня жидкости. Таким образом, множество узлов сетки может быть разбито на подмножества:

$$\{x_j, j = 1, \dots, l^-\}, \{x_j, j = l^+, \dots, r^-\}, \{x_j, j = r^+, \dots, N\},$$

$$\{x_j, j = l^- + 1, \dots, l^+ - 1\}, \{x_j, j = r^- + 1, \dots, r^+ - 1\},$$

соответствующие областям S_1, S_2, S_3 и двум фиктивным слоям на границах областей. Для численного интегрирования определяющих уравнений по времени используется модифицированный метод Эйлера. Конкретные формулы вычисления неизвестных η, u в фиктивных точках и точках области представлены ниже. Отметим, что вычисление уровня жидкости η будет проходить по явным формулам, в то время как для вычисления скорости u необходимо обращение матрицы. Все нижеприведенные формулы получены для модели III.

Для вычисления уровня жидкости используется уравнение неразрывности (1), которое аппроксимируется следующим образом:

$$\eta_j^{n+1} = \eta_j^n - \Delta t [u \eta_x + (h + \eta) u_x]_j^n,$$

$$\eta_j^{n+1} = \eta_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left([u \eta_x + (h + \eta) u_x]_j^n + [u \eta_x + (h + \eta) u_x]_j^{n+1} \right).$$

Здесь j принимает значения из множества $\{2..l^-\} \cup \{l^+..r^-\} \cup \{r^+..N-1\}$. Для дискретизации условий (6) используем формулы центральных разностей, из которых легко выводятся формулы для нахождения неизвестных значений η в точках фиктивного слоя. Дискретизация открытых граничных условий (5) на первом шаге рассматривается в виде:

$$\eta_1^{n+1} = \eta_1^n + \Delta t c [\eta_x]_1^n, \quad \eta_N^{n+1} = \eta_N^n + \Delta t c [\eta_x]_N^n,$$

на $(n+1)$ -ом слое по времени значения вычисляются аналогичным образом. Таким образом, мы имеем $N-2$ неизвестных для уровня жидкости η и $(N-8) + 4 + 2 = N-2$ уравнений, соответствующих дискретному уравнению неразрывности, условиям на концах пластины и граничным условиям.

Для нахождения неизвестных значений скорости необходимо решать уравнение движения (2), которое в правой части в случае модели II или III содержит смешанные производные по x и t . Это приводит к необходимости обращать матрицу. Уравнение для нахождения скорости методом Эйлера можно записать в следующем виде:

$$A u_j^{n+1} = b_j^n; \quad A u_j^{n+1} = b_j^{n+1}.$$

Эти уравнения запишем в следующей форме:

Шаг 1: $[a u - \beta u_x - \gamma u_{xx}]_j^{n+1} = [a u - \beta u_x - \gamma u_{xx}]_j^n - \Delta t [Y_p + Y_f]_j^n,$

Шаг 2: $[a u - \beta u_x - \gamma u_{xx}]_j^{n+1} = [a u - \beta u_x - \gamma u_{xx}]_j^n - \frac{\Delta t}{2} \left([Y_p + Y_f]_j^n + [Y_p + Y_f]_j^{n+1} \right).$

Здесь: $\alpha = 1 - \frac{m}{\rho} \eta_{xx}$; $\beta = \eta_x (h + \eta) + \frac{2m}{\rho} \eta_x$; $\gamma = \frac{1}{3} (h + \eta)^2 + \frac{m}{\rho} (h + \eta)$;

$$Y_p = \frac{D}{\rho} \eta_{xxxx} + \frac{m}{\rho} \left[(h + \eta) (3 u_x u_{xx} + u u_{xxx}) + u^2 \eta_{xxx} + 5 \eta_{xx} u u_x + 4 \eta_x (u_x^2 + u u_{xx}) \right];$$

$$Y_f = u u_x + g \eta_x + \eta_x (h + \eta) (u_x^2 - u u_{xx}) + \frac{1}{3} (h + \eta)^2 (u_x u_{xx} - u u_{xxx}).$$

Для узлов j из множества $\{2..l^-\} \cup \{l^+ + 1..r^- - 1\} \cup \{r^+..N - 1\}$ коэффициенты матрицы A имеют вид:

$$\begin{aligned} A_{j,j-1} &= \frac{[\eta_x(h+\eta) + 2m\eta_x]_j^n}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{[(h+\eta)^2 + m(h+\eta)]_j^n}{\Delta x^2}; \\ A_{j,j} &= (1 - m\eta_{xx})_j^n + \frac{2}{3} \frac{[(h+\eta)^2 + m(h+\eta)]_j^n}{\Delta x^2}; \\ A_{j,j+1} &= -\frac{[\eta_x(h+\eta) + 2m\eta_x]_j^n}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{[(h+\eta)^2 + m(h+\eta)]_j^n}{\Delta x^2}. \end{aligned}$$

Правые части b_j^n , $b_j^{\overline{n+1}}$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} b_j^n &= A_{j,j-1}u_{j-1}^n + A_{j,j}u_j^n + A_{j,j+1}u_{j+1}^n - \Delta t[Y_f + Y_p]_j^n; \\ b_j^{\overline{n+1}} &= A_{j,j-1}u_{j-1}^n + A_{j,j}u_j^n + A_{j,j+1}u_{j+1}^n - \frac{\Delta t}{2}([Y_f + Y_p]_j^n + [Y_f + Y_p]_j^{\overline{n+1}}). \end{aligned}$$

Значения m , D и h нужно выбирать в зависимости от того, какой из областей S_i ($i=1,2,3$) принадлежит узел j .

Привлекая аппроксимацию граничных условий свободного прохода волны за пределы области, получим соотношения:

$$u_1^{\overline{n+1}} = u_1^n + \Delta tc[u_x]_1^n, \quad u_N^{\overline{n+1}} = u_N^n + \Delta tc[u_x]_N^n,$$

а также аналогичные условия для $(n+1)$ -ого слоя. Таким образом, для N неизвестных значений скорости имеем $(N-10) + 8 + 2 = N$ соотношений, соответствующих разностному уравнению движения, условиям на скачке и условиям на границе области.

Вычисление пространственных производных различного порядка от u и η выполняется во всех точках расчетной области, кроме точек фиктивных слоев. Для нахождения значений производных используются центральные разности и направленные разности второго порядка. Последние используются в том случае, если размер шаблона центральной разности не позволяет их применить. Так, например, во всех точках, кроме l^- и r^+ , для вычисления первой производной от η по пространству используются центральные разности, в точках l^- и r^+ - разность влево и разность вправо, соответственно.

Заметим, что трехдиагональная структура матрицы A , имеющая место в случае отсутствия пластины, нарушается за счет постановки условий на скачке, поэтому применение трехдиагональной прогонки для обращения матрицы невозможно. В настоящей работе для обращения матрицы A используется метод Гаусса.

Спектральный метод. Для применения спектрального метода в модели I удобно представить уравнение (1) в виде:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q = (h + \eta)u. \quad (11)$$

Для простоты ограничимся случаем непроницаемых вертикальных стенок (4). Введем следующие функции: в областях S_j ($j=1,3$)

$$H_j(x,t) = h_0 + \eta(x,t), \quad q_j(x,t) = H_j(x,t)u_j(x,t); \quad (12)$$

в области S_2 : $w(x,t) = \eta(x,t)$, $u_2(x,t) = u(x,t)$.

Уравнение (2) при $F = 0$ удобно записать в виде:

$$\frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(q_j u_j + \frac{g}{2} H_j^2 \right) = 0. \quad (13)$$

Решение для функции $w(x,t)$, описывающей прогиб пластины, ищем в виде разложения по собственным функциям колебания балки со свободными концами в пустоте:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^N a_n(t) W_n(x), \quad (14)$$

где функции $a_n(t)$ подлежат определению, а функции $W_n(x)$ являются решениями следующей спектральной задачи: $W_n^{(IV)} = \lambda_n^4 W_n$ ($0 \leq x \leq L_2$), $W_n'' = W_n''' = 0$ ($x = 0, L_2$).

Эти решения хорошо известны (см., например, [19, 20]). Функции $W_n(x)$ образуют полную ортогональную систему. Толщина слоя жидкости под пластиной равна $H_2(x,t) = h_1 + w(x,t)$.

Остальные неизвестные функции удобно искать в виде конечных рядов Фурье:

$$H_1(t) = \frac{1}{2} b_0(t) + \sum_{m=1}^M b_m(t) \cos \frac{m\pi x}{L_1}, \quad q_1(x,t) = Q_1(t) \left(1 + \frac{x}{L_1}\right) + \sum_{m=1}^M c_m(t) \sin \frac{m\pi x}{L_1}, \quad (15)$$

$$u_2(x,t) = \frac{Q_1(t)}{H_2(0,t)} \left(1 - \frac{x}{L_2}\right) + \frac{Q_2(t)}{H_2(L_2,t)} \frac{x}{L_2} + \sum_{k=1}^K f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{L_2}, \quad (16)$$

$$H_3(t) = \frac{1}{2} s_0(t) + \sum_{j=1}^J s_j(t) \cos \frac{j\pi(L_3-x)}{L_4}, \quad q_3(x,t) = Q_2(t) \left(\frac{L_3-x}{L_4}\right) + \sum_{j=1}^J r_j(t) \sin \frac{j\pi(L_3-x)}{L_4}, \quad (17)$$

где $L_4 = L_3 - L_2$. Функции $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$ описывают расходы жидкости в сечениях $x = 0$ и $x = L_2$ соответственно. Общее число неизвестных функций, зависящих только от времени, равно $N_s = N + K + 2(M + J + 2)$.

Условия согласования (7) в сечениях $x = 0$ и $x = L_2$ при введенных соотношениях (15)-(17) выполняются автоматически. Второе условие имеет более простой вид, чем (8):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_2^2(0,t) + gH_2(0,t) + \frac{1}{\rho} P(0,t) &= \frac{1}{2} u_1^2(0,t) + gH_1(0,t), \\ \frac{1}{2} u_2^2(L_2,t) + gH_2(L_2,t) + \frac{1}{\rho} P(L_2,t) &= \frac{1}{2} u_3^2(L_2,t) + gH_3(L_2,t). \end{aligned} \quad (18)$$

Используя процедуру понижения порядка производных функции $w(x,t)$ по времени (10), соотношение (3) для давления удобно представить в виде:

$$P(x,t) = D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + mg - m \left[\frac{\partial u_2}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial x} + H_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial x} - u_2 \left(3 \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + u_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + H_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) - H_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (19)$$

а уравнение (2) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} \left(1 - \frac{m}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left(g - \frac{2m}{\rho} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial t} \right) \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{mH_2}{\rho} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_2^2}{\partial x} + \frac{D}{\rho} \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + \\ + \frac{m}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(u_2^2 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} H_2 \frac{\partial u_2^2}{\partial x} \right) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя соотношения (15) в (11), получим дифференциальную связь между коэффициентами $b_m(t)$ и $c_m(t)$. Затем подставим соотношения (15) в уравнение (13), умножим полученное выражение на $\sin \frac{l\pi x}{L_1}$ ($l = 1, \dots, M$) и проинтегрируем его по x от $-L_1$ до 0.

В результате получим вторую систему дифференциальных соотношений для коэффициентов $b_m(t)$ и $c_m(t)$. Аналогичная процедура выполняется и для соотношений (17), описывающих поведение жидкости в области S_3 , с той лишь разницей, что умножение теперь

производится на $\sin \frac{l\pi(L_3 - x)}{L_4}$ ($l = 1, \dots, J$) и интегрирование по x выполняется от L_2 до L_3 . Для области S_2 соотношения (14) и (16) сначала подставляются в уравнение (1), полученное выражение умножается на $W_l(x)$ ($l = 1, \dots, N$) и интегрируется по x от 0 до L_2 . Затем соотношения (14), (16) подставляются в уравнение (20), полученное выражение умножается на $\sin \frac{l\pi x}{L_2}$ ($l = 1, \dots, K$) и интегрируется по x от 0 до L_2 . В результате получается система $N_s - 2$ обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которую следует дополнить двумя дифференциальными уравнениями, вытекающими из граничных условий (18) с учетом (19). Записанная в матричной форме, эта система имеет вид:

$$C\dot{Y} = B, \quad (21)$$

где вектор $Y = \{b_0, b_1, \dots, b_M; c_1, \dots, c_M; a_1, \dots, a_N; f_1, \dots, f_K; s_0, s_1, \dots, s_J; r_1, \dots, r_J; Q_1, Q_2\}^T$, точка сверху означает дифференцирование по времени. Квадратная матрица C и вектор B являются нелинейными функциями от компонент вектора Y . Начальные условия для решения системы (21) с учетом (9) и (12) имеют вид:

$$b_m(0) = \frac{2}{L_1} \int_{-L_1}^0 H_1(x, 0) \cos \frac{m\pi x}{L_1} dx \quad (m = 0, 1, \dots, M),$$

$$c_m(0) = \frac{2}{L_1} \int_{-L_1}^0 q_1(x, 0) \sin \frac{m\pi x}{L_1} dx \quad (m = 1, \dots, M), \quad s_0(0) = 2h_0.$$

Все остальные компоненты вектора Y при $t = 0$ равны нулю. При численном решении система ОДУ (21) переписывается в виде $\dot{Y} = C^{-1}B$ и решается методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Результаты численных расчетов. Выполнено сопоставление численных результатов для модели III с экспериментальными данными [8]. Эксперименты проводились с использованием полиэтиленовой пластины длиной $L_2 = 10$ м и толщиной $h_p = 2$ см, плавающей в бассейне глубиной $h_0 = 0,4$ м. Плотность пластины, модуль Юнга и коэффициент Пуассона равны соответственно $\rho_p = 0,914$ кг/м³, $E = 950$ МПа, $\nu = 0,3$. Амплитуда уединенной волны равнялась $A/h_0 = 0,1$. На рис. 2 представлены показания мареографов, расположенных как в области чистой воды (рис. 2, а, д), так и на пластине (рис. 2, б-г). Сплошной линией показаны результаты расчетов, кружками – экспериментальные данные. Для совмещения фазы уединенной волны в эксперименте и при расчетах последние были сдвинуты по времени таким образом, чтобы оба пика при $x = -2,5$ м совпадали. Видно, что эксперименты и результаты расчетов совпадают достаточно хорошо как в области чистой воды, так и на пластине.

Сопоставление численных результатов, полученных с использованием всех трех рассматриваемых моделей нелинейной мелкой воды, представлено на рис. 3 для показаний мареографов на пластине. Исходные данные соответствуют данным на рис. 2. Штрихпунктирная, штриховая и тонкая сплошная линии показывают результаты для моделей I, II, III соответственно. Во всех трех моделях использовались условия на границах областей в виде (7), (8). Данное сравнение показывает, что при заданной амплитуде уединенной волны модели II и III, имеющие дисперсионные члены, практически совпадают, а классическая модель мелкой воды дает некоторое отличие. Следовательно, набегание уединенной волны с относительно малой амплитудой можно рассматривать как слабо нелинейный случай. Различие между моделью I и моделями II и III объясняется в первую очередь тем, что уединенная волна не является решением модели I даже без учета пластины, и начальное возмущение (9) в этой модели начинает нелинейно деформироваться еще на подходе к пластине.

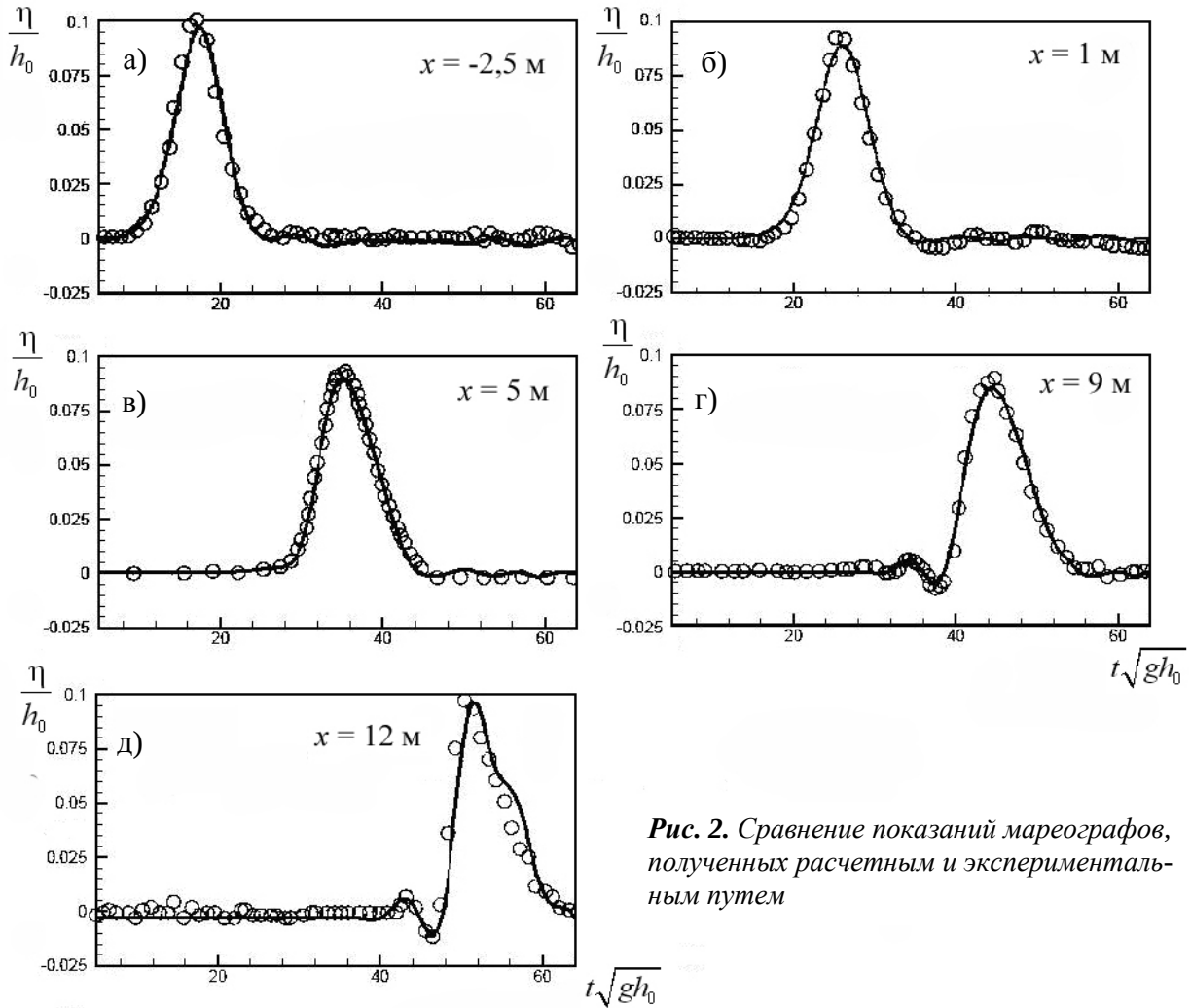


Рис. 2. Сравнение показаний мареографов, полученных расчетным и экспериментальным путем

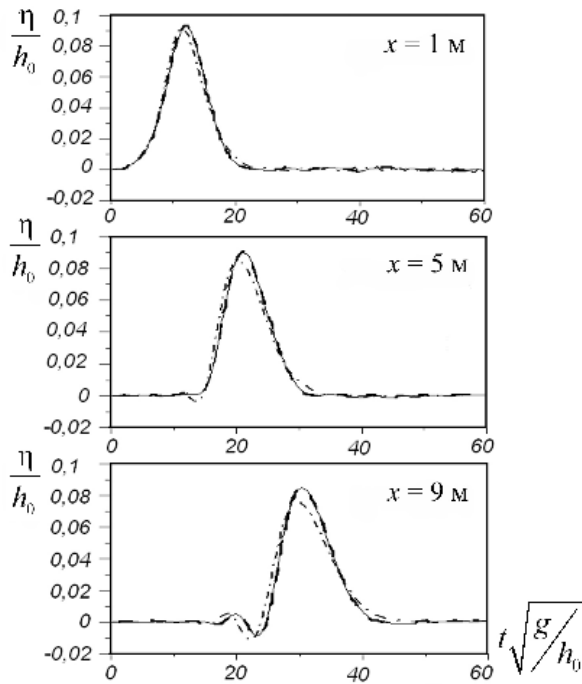


Рис. 3. Сравнение показаний мареографов для численных результатов, полученных по моделям I, II и III

Сравнение результатов спектрального метода и линейной теории мелкой воды [20] представлено на рис. 4 при следующих параметрах: $D/(ρgh_0^4) = 3,33$; $d/h_0 = 0,2$; $L_1/h_0 = 15$; $L_2/h_0 = 7,3$; $L_3/h_0 = 30$; $A/h_0 = 0,1$; $x^0/h_0 = -8$. Показано поведение верхней границы жидкости в различные моменты времени. При $x < 0$ представлено поведение H_1/L_2 , при $0 < x/L_2 < 1$ - поведение H_2/L_2 , при $1 < x/L_2 < 3$ - поведение H_3/L_2 . Сплошные линии соответствуют нелинейному решению, пунктирные – линейному решению. Видно, что результаты обоих решений достаточно близки при заданной амплитуде уединенной волны. Скорость распространения линейной волны несколько меньше, чем нелинейной волны (подробнее см. [14]).

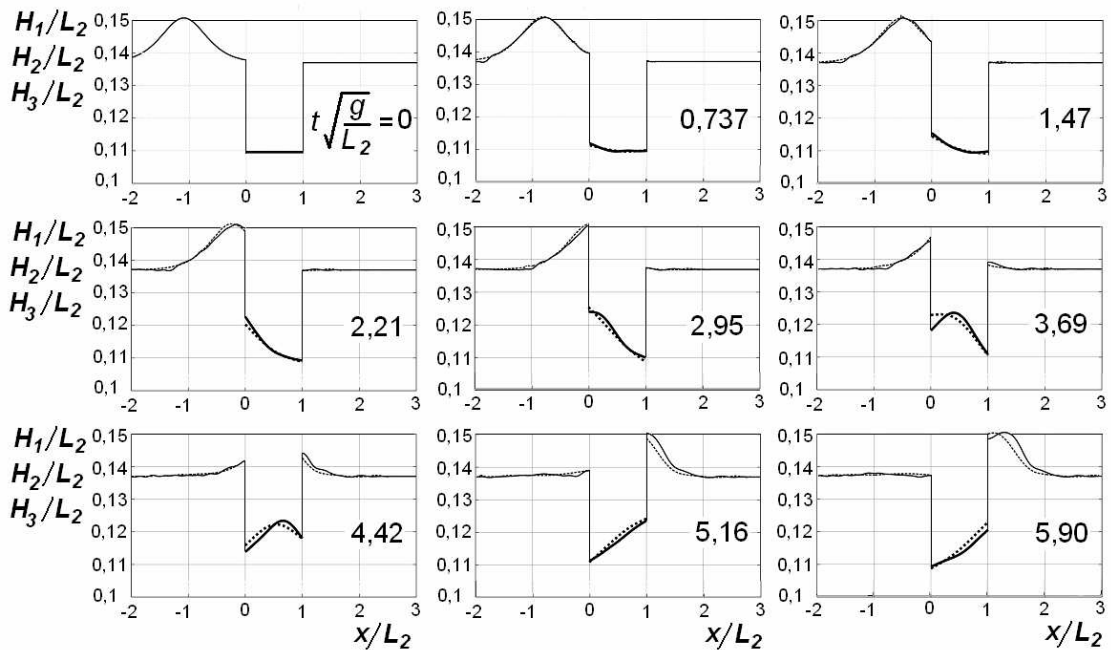


Рис. 4. Сравнение поведения свободной поверхности и пластины, полученного в численных расчетах по нелинейной модели I и линейной теории мелкой воды

* * *

Представлены результаты исследований нестационарного поведения плавающих упругих пластин в нелинейной постановке. Для задачи о набегании уединенной волны на плавающую балочную пластину выполнено сопоставление трех моделей: системы мелкой воды (бездисперсионной), слабо нелинейной слабо дисперсионной модели Перегринна и сильно нелинейной слабо дисперсионной модели Грина-Нагди. Для бездисперсионной нелинейной модели мелкой воды, наряду с общепринятым конечно-разностным решением, представлено и решение, полученное спектральным методом. Выполненные численные расчеты показали, что при относительно малой амплитуде набегающей волны модели Перегринна и Грина-Нагди, имеющие дисперсионные члены, практически совпадают, а бездисперсионная модель мелкой воды дает вполне объяснимое отличие. Представлено также сопоставление результатов, полученных по линейной и нелинейной теориям, выявляющее при рассмотренных параметрах задачи отставание линейной волны от нелинейной. Предложенные методы могут быть использованы для исследования влияния различных нестационарных воздействий на плавающую пластину, как, например, ее начального возмущения или действия нестационарной внешней нагрузки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта СО РАН № 2.12.

Литература

1. Watanabe E., Utsunomiya T., Wang C.M. Hydroelastic analysis of pontoon-type VLFS: a literature survey // Eng. Struc. 2004. V.26. P.245-256.
2. Ohmatsu S. Overview: Research on wave loading and responses of VLFS // Mar.Struct. 2005. V.18. P.149-168.
3. Chen X.-j., Wu Y.-s., Cui W.-c., Jensen J.J. Review of hydroelasticity theories for global response of marine structures // Ocean Eng. 2006. V.33. P.439-457.
4. Hegarty, G.M., Squire, V.A. On modelling the interaction of large amplitude waves with a solitary floe // Proc. 14th Int. Offshore and Polar Engineering Conf., Toulon, May 23-28, 2004: ISOPE-2004. – Cupertino (Calif.): Int. Soc. Offshore and Polar Eng., 2004. V.1. P.845-850.
5. Kyoung J.H., Hong S.Y., Kim B.W. FEM for time domain analysis of hydroelastic response of VLFS with fully nonlinear free-surface conditions// Intern. J. Offshore and Polar Eng. 2006. V.16. No.3. P.168-174.

6. *Kyoung J.H., Hong S.Y., Kim B.W.* Time domain analysis on hydroelastic response of VLFS using finite element method// Proc. 4th Intern. Conf. on Hydroelasticity in Marine Technology, Wuxi, China, September 10-14, 2006. P.273-282.
7. *Kyoung J.H., Hong S.Y.* Time domain analysis of hydroelastic response of VLFS considering horizontal motion // Intern. J. Offshore and Polar Eng. 2008. V.18. No.1. P.21-26.
8. *Liu X., Sakai S., Sasamoto, M.* A numerical simulation for the interaction of mega float with solitary wave// Proc. 17th Int. Conf. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE'98), 1998. 8 pp.
9. *Liu X., Sakai S.* Nonlinear analysis on the interaction of waves and flexible floating structure // Proc. 10th Int. Offshore and Polar Engineering Conf., Seattle, USA, 2000. P.101-108.
10. *Liu X., Sakai S.* Time domain analysis on the dynamic response of a flexible floating structure to waves // J. Engrg. Mech. 2002. V.128. No.1. P.48-56.
11. *Sakai S., Liu X., Sasamoto M., Kagesa T.* Experimental and numerical study on the hydroelastic behavior of VLFS under Tsunami // Proc. 2nd Int. Conf. on Hydroelasticity in Marine Technology, Fukuoka, Japan, 1998. P.385-391.
12. *Takagi K.* Elastic deformation and mooring force of a very large floating body on tsunami waves // Proc. of Int. Workshop on VLFS, Ship Research Institute, Japan, 1996. P.119-126.
13. *Takagi K.* Interaction between tsunami and artificial floating island // Intern. J. of Offshore and Polar Engrg, 1996. V.6. No.3. P.171-176.
14. *Takagi K.* Interaction between solitary wave and floating elastic plate // J. Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engrg. 1997. V.123. No.2. P.57-62.
15. *Железняк М.И., Пелиновский Е.Н.* Физико-математические модели наката цунами на берег // Накат цунами на берег. Горький, ИПФ АН СССР, 1985. С.8-33.
16. *Xia D., Ertekin R.C., Kim J.W.* Nonlinear hydroelastic response of a two-dimensional mat-type VLFS by the Green-Naghdi theory // Proc. 23rd Int. Conf. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE'04), 2004. 10 pp.
17. *Xia D.* Linear and nonlinear hydroelasticity of mat-type very large floating structures: the Green-Naghdi theory. Dissertation for the degree of Dr. Phil. in Ocean Engineering. 2006. 145 pp.
18. *Xia D., Ertekin R.C., Kim J.W.* Fluid-structure interaction between a two-dimensional mat-type VLFS and solitary waves by the Green-Naghdi theory // J. Fluids and Struct. 2008. V.24. No.4. P.527-540.
19. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967.
20. *Стурова И.В.* Нестационарное поведение плавающей на мелководье упругой балки под действием внешней нагрузки // ПМТФ. 2002. Т.43. № 3. С.88-98.

Статья поступила в редакцию 07.11.2008 г.