

УДК 551.465

© В. С. Мадерич, Е. В. Терлецкая, И. А. Бровченко

Институт проблем математических машин и систем Национальной академии наук Украины
vladmad@gmail.com

Фронтальное столкновение внутренних волн большой амплитуды

Численно исследуются динамика и энергетика фронтального столкновения уединенных внутренних волн большой амплитуды, распространяющихся в жидкости с двухслойной стратификацией. Расчеты проводятся в рамках уравнений Навье—Стокса в приближении Буссинеска. Показано, что в результате столкновения уединенных внутренних волн умеренных амплитуд возникает малый фазовый сдвиг и за прошедшими волнами генерируются дисперсионные цуги волн. Фазовый сдвиг растет с увеличением амплитуд взаимодействующих волн и при больших амплитудах приближается к предельному значению. При фронтальном столкновении волн больших амплитуд отклонение максимальной высоты от удвоенной амплитуды набегающих волн не увеличивается с их ростом, в отличие от волн умеренной амплитуды. Показано, что взаимодействие волн большой амплитуды приводит к сдвиговой неустойчивости и формированию вихрей Кельвина—Гельмгольца в слое раздела, однако затем волны снова становятся устойчивыми.

Ключевые слова: внутренние волны большой амплитуды, численное моделирование, неустойчивость Кельвина—Гельмгольца.

V. S. Maderich, K. V. Terletska, I. A. Brovchenko

The Institute of Mathematical Machines and Systems Problems of the Ukraine National Academy of Science (IMMSP NASU)
vladmad@gmail.com

Head-on Collision of Internal Waves of Large Amplitudes

The dynamics and energetics of a frontal collision of internal solitary waves of high amplitude propagating in a two-layer stratified fluid are studied numerically. The computations are carried out within the framework of the Navier—Stokes equations in the Boussinesq approximation. It was shown that the frontal collision of internal solitary waves of moderate amplitude leads to a small phase shift and to the generation of dispersive wavetrain trailing behind transmitted solitary wave. The phase shift grows with increasing amplitudes of the interacting waves and approaches the limiting value at large amplitudes of the waves. The deviation of the maximum wave height during collision from the twice the amplitude does not grow with increasing amplitude in the case of interaction of wave of large amplitude in contrast to the moderate amplitude waves. It was shown that the interaction of waves of large amplitude leads to the shear instability and the formation of Kelvin—Helmholtz vortices in the interface layer, however, subsequently waves again become stable.

Key words: internal waves of large amplitude, numerical modelling, Kelvin—Helmholtz instability.

Распространение внутренних гравитационных волн в океане сопровождается их взаимодействием с рельефом дна, течениями, неоднородностями стратификации, и также взаимодействием с поверхностными и внутренними волнами [1, 2]. Наблюдения в океане и теоретические исследования показывают, что процессы взаимодействия между внутренними волнами, распространяющимися под различными относительными углами, достаточно многообразны и сложны [3, 4].

Фронтальное столкновение уединенных внутренних волн малой амплитуды, распространяющихся в жидкости с двухслойной стратификацией и описывающихся решениями уравнений Кортевега—де Вриза (КДВ) и Гарднера изучалось в работах [5, 6], где решения были найдены методом возмущений, основанном на разложении до третьего порядка по малому параметру пропорциональному

амплитуде волны. В этих работах были получены оценки максимальной амплитуды и фазового сдвига при взаимодействии волн. Численное решение задачи в рамках уравнений Буссинеска для взаимодействующих волн малой амплитуды дано в [7]. Однако процессы взаимодействия волн большой амплитуды, часто наблюдаемых в прибрежных областях океана, могут существенно отличаться от описанных ранее [8], сопровождаясь, например, неустойчивостью взаимодействующих волн и последующим перемешиванием, что делает необходимым для их исследования использование полной системы уравнений гидродинамики стратифицированной жидкости. В настоящей работе в рамках уравнений Навье—Стокса рассматривается фронтальное столкновение уединенных внутренних волн большой амплитуды, распространяющихся в жидкости с двумя однородными слоями, разделенными тонкой прослойкой.

Постановка задачи. Схема численных экспериментов приведена на рис. 1. Две внутренних уединенных волны движутся по направлению друг к другу в численном лотке лабораторного масштаба, заполненного стратифицированной по солености водой. Используется приближение Буссинеска, когда разница в плотности между верхним и нижним слоями $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ предполагается малой по сравнению с невозмущенной плотностью ρ_0 . Расчеты проводились в рамках уравнений Навье—Стокса для стратифицированной среды. Система уравнений неразрывности, движения и переноса соли имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= 0, \\ \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{g_i \rho}{\rho_0}, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + U_j \frac{\partial S}{\partial x_j} &= \chi \frac{\partial^2 S}{\partial x_j^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $U_i = (U, V, W)$ — составляющие поля скорости; P — давление; ρ — плотность воды; S — соленость; $g_i = (0, 0, g)$ — ускорение силы тяжести; $\nu = 10^{-6}$ м²/с — кинематическая вязкость; $\chi = 10^{-9}$ м²/с — молекулярная диффузия. Система уравнений (1) дополнена эмпирическим уравнением состояния $\rho = \rho(S, T)$, где T — температура, полагаемая постоянной [9]. Граничные условия на поверхности $z = \eta(x, y, t)$ включают кинематическое условие для поверхности:

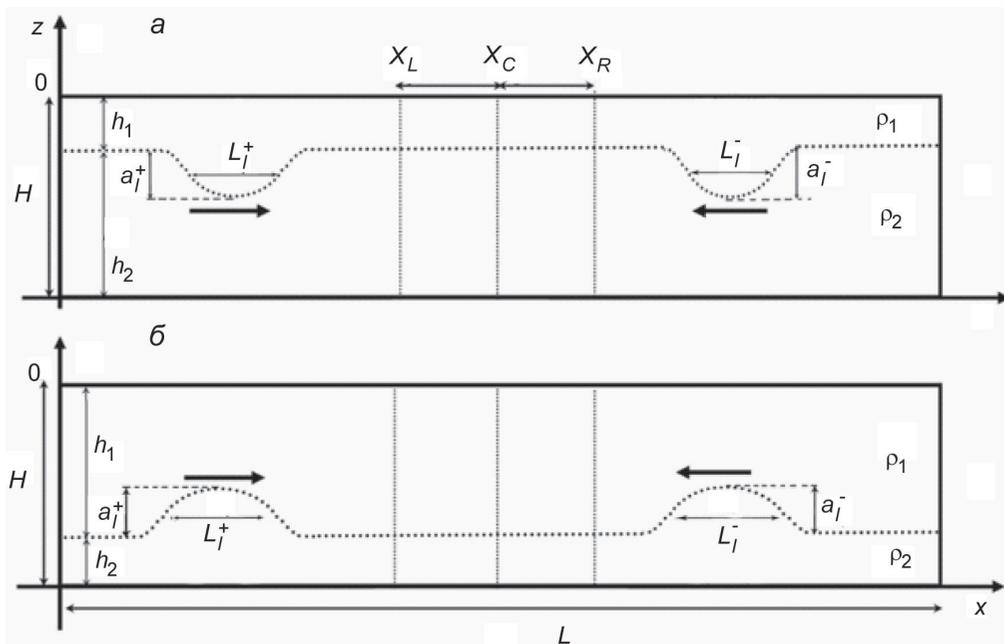


Рис. 1. Схема модельной области для волн понижения (а) и для волн повышения (б).

$$W = \frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} + V \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad (2)$$

а также условия отсутствия касательных напряжений трения и потоков соли на всех границах численного лотка. Граничное условие (2) совместно с условием непротекания на дне используются для интегрирования по глубине уравнения неразрывности, которое служит для вычисления возвышений уровня η .

Система уравнений модели дискретизировалась с использованием метода конечных разностей на смещенной сетке. Решение задачи расщеплялось на две подзадачи: а) — решение двумерной системы уравнений для возвышений уровня и осредненных по глубине скоростей и б) — решение трехмерной задачи для скорости и давления. Поле скорости и давления в трехмерной подзадаче расщеплялось на гидростатическую и негидростатическую составляющие. Алгоритм решения детально описан в [10].

Вычислительный лоток имел длину L и глубину H . Задача решалась в квазидвухмерной постановке, когда уравнения дискретизировались в нескольких узлах поперек бассейна при условии скольжения на боковых стенках бассейна. Разрешение сетки по длине и высоте представлено в таблице. Невозмущенная стратификация в лотке моделировалась в виде поверхностного и придонного слоев с толщинами h_1 и h_2 , где глубина $H = h_1 + h_2$ с соленостью $S_{up} = 0$ и $S_{bot} = 30$ при постоянной температуре 20° , что соответствует плотностям слоев $\rho_{up} = 998.204 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$ и $\rho_{bot} = 1020.95 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$. Эти однородные слои разделены тонким переходным слоем толщины dh . Профиль солености аппроксимировался формулой

$$S(z) = \frac{S_{up} + S_{bot}}{2} - \frac{S_{bot} - S_{up}}{2} th\left(\frac{z - h_1}{dh}\right), \quad (3)$$

где толщина халоклина $dh = 0.5$ см для всех экспериментов. В качестве поверхности раздела в расчетах визуализировалась изохалина равная 15, которая соответствует изопикне $\rho = 1009.57 \text{ кг}\cdot\text{м}^{-3}$.

Для генерации уединенных волн большой амплитуды при численном моделировании по аналогии с лабораторными экспериментами [11] используется механизм коллапса, когда в вычислительном бассейне выделяется часть объема, заполненная водой солености S_{up} в случае, когда $h_1 < h_2$, и S_{bot} , когда $h_1 > h_2$. Для того чтобы сформировать уединенную волну понижения, начальная толщина верхнего слоя в выделенном объеме должна быть больше, чем в остальном бассейне. В противоположном случае генерируются волны повышения. После того как головная волна трансформировалась в уединенную волну, осциллирующий мелкомасштабный хвост отрезался. Характеристики волн оценивались в сечениях $X_L = X_R = 2.5$ м от центра лотка X_C . Амплитуды волн, распространяющихся слева направо в сечениях X_L и X_R , определяются как a_l^+ , a_r^+ , а справа налево — как a_l^- , a_r^- , соответственно.

Результаты моделирования представлены в безразмерном виде. Горизонтальные и вертикальные координаты x и z нормированы на глубину верхнего слоя h_1 , тогда как скорость нормирована на фазовую скорость линейных волн $c_0 = (gh_1 h_2 \Delta \rho \rho_0^{-1} H^{-1})^{1/2}$, а время $\tau = t / \sqrt{\rho_0 h_1 / \Delta \rho g}$. Важными характерными безразмерными параметрами волны являются безразмерная амплитуда $\alpha = |\alpha^\pm|/h_1$ и отношение вертикального к горизонтальному масштабу волн $\varepsilon = h_1/\lambda$, где λ — характерная длина волны. Баланс между нелинейностью и дисперсией во внутренних волнах зависит от отношения слоев стратифицированной жидкости $\gamma = h_2/h_1$. Для заданного γ параметры α и ε в уединенных волнах не являются независимыми.

Были проведены четыре серии численных экспериментов для различных отношений параметра γ : для волн понижения $\gamma = 0.25; 0.125$ и для волн повышения $\gamma = 4; 8$. Значения длины L и глубины H численного лотка, разрешения сетки для всех четырех серий численных экспериментов, характеристики набегающих волн α и ε даны в таблице. В численных экспериментах серий 1 и 3 воспроизводятся лабораторные эксперименты [12] для случаев одинаковых и разных амплитуд сталкивающихся волн для значений $\gamma = 0.25$ и 4. Серии 2 и 4 представлены для отношений $\gamma = 0.125$ и 8. Численный эксперимент 2а был проведен как повторение эксперимента серии 2 с амплитудой $\alpha = 2.2$ при более детальной численной сетке.

Параметры расчетов

Номер серии	$L, \text{ м}$	$H, \text{ м}$	$\gamma = h_1/h_2$	α	ε	Разрешение
1	12	0.5	0.25	0.12—1.2	0.05—1.1	3000 × 300
2	12	0.5	0.125	0.2—2.8	0.1—1.5	3000 × 300
2a	12	0.5	0.125	2.2	1	5000 × 500
3	12	0.5	4	0.12—1.2	0.05—1.1	3000 × 300
4	12	0.5	8	0.2—2.7	0.08—1	3000 × 300

Взаимодействие волн умеренной амплитуды. Как показано в [5, 6] внутренние волны малых амплитуд взаимодействуют неэластично. В результате столкновения солитонов Кортевега—де Вриза (КдВ) [5] и Гарднера [6] возникает некоторый фазовый сдвиг, а за разбегающимися волнами возникают осциллирующие хвосты. Рассмотрим случай из серии 1, когда две волны умеренных равных амплитуд $\alpha = 0.5$ и $\gamma = 0.25$, движутся навстречу друг другу. Этот расчет соответствует лабораторному эксперименту, описанному в статье [12]. Профиль набегающей волны с амплитудой a_r^- в сечении X_R , соответствующий экспериментальный профиль и аналитический профиль солитона КдВ представлены на рис. 2, а, а соответствующий профиль прошедшей волны с амплитудой a_r^+ в сечении X_R показан на рис. 2, б.

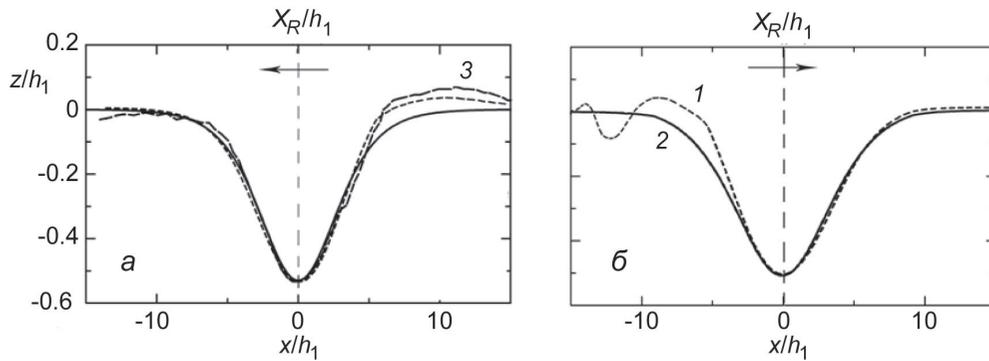


Рис. 2. Профили набегающей и прошедшей волн в сечениях X_R для случая $\alpha = 0.5$ и $\gamma = 0.25$. 1 – моделирование; 2 – решение КдВ; 3 – (Hsu, Chaeng 2013).

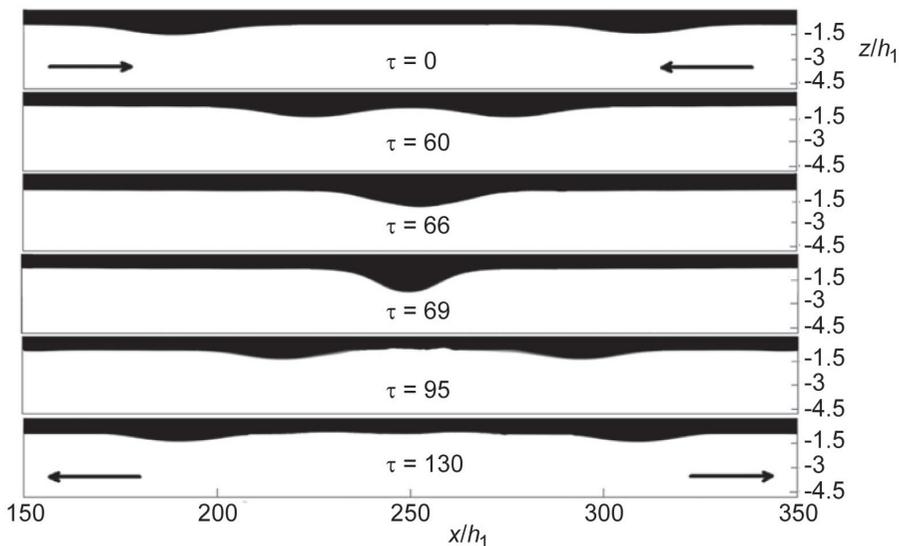


Рис. 3. Трансформация уединенных волн в результате столкновения при $\alpha = 0.5$ и $\gamma = 0.25$.

Трансформация этих уединенных волн при их столкновении приведена на рис. 3, где показано поле солености вдоль бассейна. В момент столкновения взаимодействующие волны образуют единый пик, высота которого на 8 % выше, чем сумма двух высот волн. После столкновения расходящиеся волны почти восстанавливают свою первоначальную форму, однако наблюдаются как небольшой фазовый сдвиг, так и формирование дисперсионного хвоста.

Расчеты показали, что минимальное значение числа Ричардсона

$$Ri_{\min} = \frac{\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 \right]} \quad (4)$$

для волны с амплитудой a_r^- в сечении X_R равно 0.3, а после столкновении волн оно падает, также для волны с амплитудой a_l^- в сечении X_L $Ri_{\min} = 0.23$. Значения минимального числа Ричардсона (4) в волнах несколько меньше, чем критическое значение 0.25 для параллельных стратифицированных потоков [13], но волны в процессе взаимодействия остаются устойчивыми.

Взаимодействие волн большой амплитуды. Взаимодействие сильно нелинейных уединенных волн моделировалось в серии 2 и 2a при $\gamma = 0.125$ и $\alpha = 2.2$. В этом случае абсолютная величина амплитуды волн в начальный момент времени больше, чем предельная амплитуда солитона Гарднера [1], но меньше, чем предельная амплитуда солитона Мияты—Чоя—Камассы (МЧК) [14, 15] в приближении Буссинеска $a_{\text{lim}} = (h_1 - h_2)/2$. Как видно на рис. 4, уединенная волна большой амплитуды до и после столкновения хорошо аппроксимируется решением МЧК [14, 15]. В отличие от профиля волны с параметрами $\alpha = 0.5$ и $\gamma = 0.25$ на рис. 2, а, исчезла асимметрия фронтов, что произошло из-за укорочения характерной дистанции нелинейности и более быстрого восстановления солитонного профиля после взаимодействия. В начальном сечении X_R минимальное число Ричардсона в устойчивой уединенной волне с амплитудой a_l^- $Ri_{\min} = 0.15$ (для расчетов серии 2) и $Ri_{\min} = 0.146$ (для расчетов серии 2a), что меньше значения критического значения 0.25. Но неоднородность потока в уединенных волнах может привести к тому, что необходимое условие $Ri_{\min} < 0.25$ не будет достаточным для возникновения неустойчивости Кельвина—Гельмгольца (КГ). Так, согласно оценкам для неустойчивых внутренних волн, минимальными значениями Ri , при которых начинается неустойчивость КГ внутренних волн, являются $Ri < 0.075 \pm 0.035$ и $Ri < 0.092 \pm 0.016$ для лабораторных экспериментов [16] и [17], соответственно, тогда как условия $Ri < 0.10$ и $Ri < 0.13$ выполняются для численных экспериментов с нелинейными волнами [18] и [19], соответственно.

Кроме того, из-за нелокальности процесса развития неустойчивости КГ в волнах, использование только числа Ричардсона в качестве критерия неустойчивости может быть недостаточным. Полезной характеристикой состояния потока является длина потенциально неустойчивой области L_x , в которой $Ri_{\min} < 0.25$, характеризующая горизонтальную протяженность области, в которой может развиваться неустойчивость. Эмпирическое соотношение $L_x/\lambda_{0,5} = 0.86$, полученное в [17], отделяет

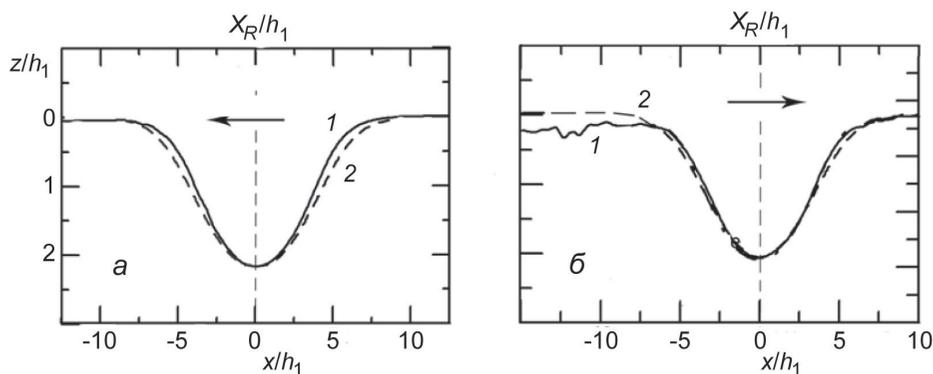


Рис. 4. Профили волн в сечении X_R до (а) и после (б) столкновения для случая $\alpha = 2.2$ и $\gamma = 0.125$. 1 – моделирование; 2 – решение МЧК.

устойчивые волны $L_x/\lambda_{0,5} < 0.86$ от потенциально неустойчивых. Здесь $\lambda_{0,5}$ — длина волны на половине модуля амплитуды волны. Для данного эксперимента в сечении X_L отношение $L_x/\lambda_{0,5} = 0.82$ (серия 2) и $L_x/\lambda_{0,5} = 0.85$ (серия 2a), и волны до столкновения также характеризуются как устойчивые. На рис. 5 приведено распределение солености вдоль вычислительного бассейна в процессе взаимодействия волн. Как следует из рисунка, при взаимодействии волн большой амплитуды возникает сдвиговая неустойчивость при расхождении волн $\tau = 70$, в результате которой формируются вихри Кельвина—Гельмгольца и происходит перемешивание. Детально этот процесс показан на рис. 6, где представлены поля скорости и контуры потенциально неустойчивых областей, в которых $Ri < 0.25$. При схождении волн $\tau = 35$ потенциально неустойчивые области расположены вблизи максимального отклонения поверхности раздела, затем, при схождении волн, области максимального сдвига сдвигаются в тыльные части волн $\tau = 50$. В отличие от поверхностных волн, заплеска с формированием струи [20, 21] не происходит, так как из-за малой разности плотности оба слоя динамически активны при наличии стабилизирующего действия трения. Расчеты показали, что неустойчивость начинается при расхождении взаимодействующих волн, когда длина потенциально неустойчивых областей L_x нарастает от 0 при $\tau = 54$ до $L_x/\lambda_{0,5} = 0.86$, что соответствует условию неустойчивости нелинейных внутренних волн. Число Ричардсона при этом уменьшается до значения 0.07. В дальнейшем L_x падает, и волна вновь становится устойчивой. В сечении X_R волна, движущаяся направо, устойчива и характеризуется минимальным числом Ричардсона $Ri_{\min} = 0.121$ ($Ri_{\min} = 0.117$ серия 2a). При этом $L_x/\lambda_{0,5} = 0.81$.

Сравнивая результаты расчетов с разным разрешением (серии 2 и 2a), можно сделать вывод, что количественные характеристики в зависимости от разрешения изменяются слабо: Ri_{\min} — в пределах

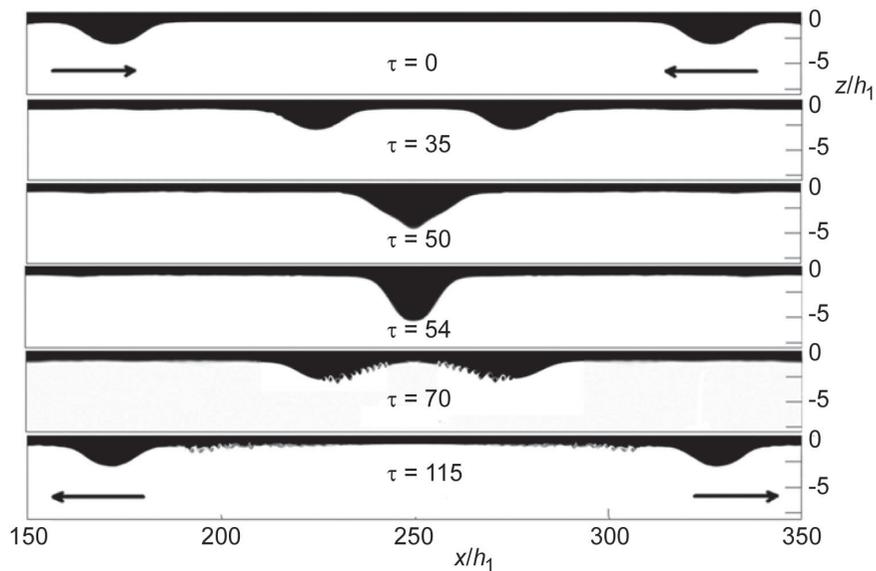


Рис. 5. Трансформация уединенных волн для случая $\alpha = 2.2$ и $\gamma = 0.125$ (серия 2a).

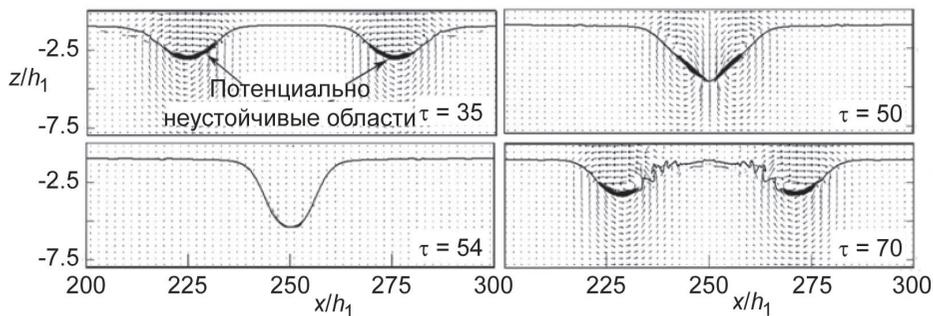


Рис. 6. Поле скорости и положение неустойчивых областей ($Ri < 0.25$) при взаимодействии уединенных волн при $\alpha = 2.2$ и $\gamma = 0.125$.

3 %, а длина, характеризующая горизонтальную протяженность области, в которой может развиваться неустойчивость, — в пределах 4 %. Разрешение численной области, принятое для расчетов в сериях 1—4, достаточно для воспроизведения таких мелкомасштабных деталей, как вихри Кельвина—Гельмгольца.

Сравнение результатов моделирования с результатами лабораторных экспериментов и теоретическими зависимостями. Были проведены оценки потери амплитуд при столкновении и проведено сравнение результатов численных и лабораторных экспериментов [12]. Как и в работе [12], мы рассматриваем безразмерную характеристику амплитуды A_S , которая равна отношению амплитуды в одном из сечений X_L и X_R волны к сумме амплитуд сталкивающихся волн, следовательно, если волны одинаковых амплитуд, то $A_S=0.5$:

$$A^+_S = \frac{a^+_l}{a^+_l + a^-_r}, \quad A^-_S = \frac{a^-_r}{a^+_l + a^-_r}. \quad (5)$$

Зависимости от параметра A_S (5) амплитуд волны в момент столкновения волн A_{\max} и после взаимодействия A_T , нормированных на амплитуду волны до столкновения, и соответствующие зависимости для длин волн L_{\max} и L_T представлены на рис. 7.

Как видно из рис. 7, после столкновения двух уединенных внутренних волн, амплитуда A_T принимает значения, близкие к 1. В момент столкновения максимальная амплитуда немного больше (на 2—9 %), чем сумма набегающих волн. В численных экспериментах характерная длина волны также полностью восстанавливается после столкновения, как для волн повышения, так и волн понижения. В лабораторном эксперименте, однако, наблюдается увеличение длин волн повышения после взаимодействия, что связано с донным трением. В целом, результаты расчетов согласуются с результатами лабораторных экспериментов [12].

Рассчитанные в рамках полных уравнений Навье—Стокса высоты максимального пика волны и фазового сдвига после столкновения для случая одинаковых амплитуд были сравнены с аналитическими оценками [5]. Для одинаковых уединенных волн малой амплитуды в приближении слабонелинейной теории безразмерная максимальная амплитуда при их взаимодействии равна [5]:

$$A_C = 2\alpha + \lambda_1 \alpha^2 + 4\lambda_1^2 \alpha^3 \left(\frac{3}{4} + \Omega_1 \left(U + \frac{5}{4} R_2 D_2 \right) \right), \quad (6)$$

где $\lambda_1 = 0.5D_2 / D_1$, $D_1 = 1 + \sigma / \gamma$, $D_2 = 1 - \sigma / \gamma^2$, $R_2 = \gamma(\gamma + 1)$, $\sigma = \rho_1 / \rho_2$, $\gamma = -h_1 / h_2$, $U = 1 - \sigma\gamma$, $\Omega_1 = \sigma R_1 / (\gamma U^2 D_2^2)$ где $R_1 = 1 - 1/\gamma$.

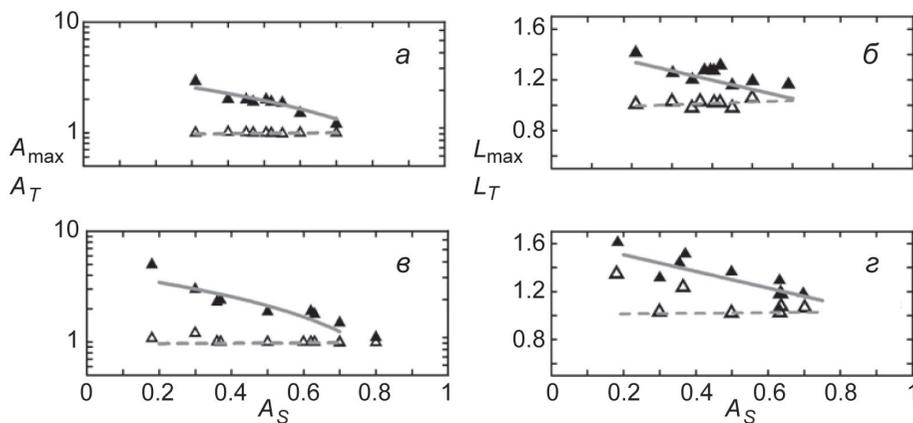


Рис. 7. Сравнение характерных амплитуд A_T , A_{\max} и длин L_T , L_{\max} , полученных путем численного моделирования, с результатами лабораторных экспериментов [12] для волн понижения (а, б) и для волн повышения (в, з).
Линия - A_{\max} , L_{\max} ; пунктир - A_T , L_T ; треугольники - [12].

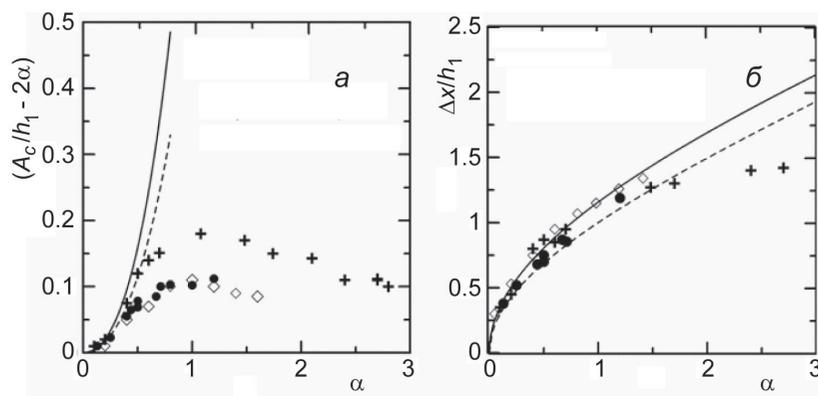


Рис. 8. Зависимость отклонения нормированной максимальной амплитуды при взаимодействии волн от удвоенной амплитуды взаимодействующих волн от нормированной амплитуды волн (а).

Зависимость фазового сдвига от нормированной амплитуды (б).

Линия – $\gamma = 0.125$ [5]; пунктир – $\gamma = 0.25$ [5]; кружки – $\gamma = 0.25$ моделирование; крестики – $\gamma = 0.125$ моделирование; ромбы – $\gamma = 0.21$, моделирование [8].

Соответствующий фазовый сдвиг при взаимодействии находится в виде:

$$\tilde{x} = 2|\lambda_1| h_1 \left(\frac{U\alpha}{3D_2} \right)^{1/2} \left(1 + 2\lambda_1 \alpha \left(\frac{7}{8} + \Omega_1 \left(\frac{1}{8} R_2^2 D_2^2 + \frac{2}{3} R_2 D_2 U + \frac{1}{2} U^2 \right) \right) \right). \quad (7)$$

Сравнение теоретических оценок (6)—(7) и результатов численных экспериментов для случаев $\gamma = 0.125$, $\gamma = 0.25$, а также результатов численных экспериментов [8] при $\gamma = 0.21$ показано на рис. 8. Фазовый сдвиг и отклонение нормированной максимальной амплитуды при взаимодействии волн от удвоенной амплитуды взаимодействующих волн согласуются при $\alpha < 0.3$ с оценками полученными в рамках слабонелинейной теории [5]. Однако для волн умеренной и большой амплитуды фазовый сдвиг и максимальная амплитуда при взаимодействии существенно отличаются от предсказаний слабонелинейной теории. В частности, отклонение нормированной максимальной амплитуды при взаимодействии волн от удвоенной амплитуды взаимодействующих волн не увеличивается с амплитудой, а фазовый сдвиг приближается к некоторому предельному значению $\Delta x/h_1 = 1.42$.

В рамках уравнений Навье—Стокса численно исследована динамика фронтального взаимодействия уединенных внутренних волн как понижения, так и повышения, распространяющихся в жидкости с двухслойной стратификацией. Взаимодействие внутренних уединенных волн умеренных амплитуд приводит к возникновению малого фазового сдвига и появлению осциллирующих хвостов, при этом максимальная амплитуда при взаимодействии таких волн больше, чем их сумма. Фазовый сдвиг и отклонение нормированной максимальной амплитуды при взаимодействии волн от удвоенной амплитуды взаимодействующих волн согласуются при $\alpha < 0.3$ с оценками, полученными в рамках слабонелинейной теории [5]. Однако для волн умеренной и большой амплитуды фазовый сдвиг и максимальная амплитуда при взаимодействии существенно отличаются от предсказаний слабонелинейной теории. При больших амплитудах волн отклонение нормированной максимальной амплитуды при их взаимодействии от удвоенной амплитуды взаимодействующих волн не увеличивается с амплитудой, а фазовый сдвиг приближается к некоторому предельному значению. Взаимодействие устойчивых внутренних волн достаточно большой амплитуды приводит к возникновению сдвиговой неустойчивости и формированию вихрей Кельвина—Гельмгольца в слое раздела, однако, затем волны снова становятся устойчивыми.

Литература

1. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T. Modeling internal solitary waves in the coastal ocean // Survey in Geophysics. 2007. № 28. P. 273—298.
2. Helfrich K. R., Melville W. K. Long nonlinear internal waves // Ann. Review Fluid Mech. 2006. № 38. P. 395—425.

3. *Grimshaw R., Zhu Y.* Oblique interactions between internal solitary waves // *Stud. Appl. Math.* 1994. № 92. P. 249—270.
4. *Wang C., Pawlowicz R.* Oblique wave-wave interactions of nonlinear near-surface internal waves in the Strait of Georgia // *J. Geophys. Res.* 2012. № 117. C06031.
5. *Mirie R., Su C. H.* Internal solitary waves and their head-on collision. Part 1 // *J. Fluid Mech.* 1984. Vol. 147. P. 213—231.
6. *Mirie R. M., Su C. H.* Internal solitary waves and their head-on collision. II // *Phys. Fluids.* 1986. № 29. P. 31—37.
7. *Nguyen H. Y., Dias F.* A Boussinesq system for two-way propagation of interfacial waves // *Physica D.* 2008. № 237. P. 2365 — 2389.
8. *Jo T.-C., Choi W.* On stabilizing the strongly nonlinear internal wave model // *Stud. Appl. Math.* 2008. № 120. P. 65—85.
9. *Mellor G. L.* An equation of state for numerical models of ocean and estuaries // *J Atmos. Ocean. Tech.* 1991. № 8. P. 609—611.
10. *Kanarska Y., Maderich V.* A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows // *Ocean Dynamics.* 2003. № 53. P. 176—185.
11. *Kao T. W., Pan F. S., Renouard D.* Internal solitons on the pycnocline: generation, propagation, shoaling and breaking over a slope // *J. Fluid Mech.* 1985. № 159. C. 19—53.
12. *Hsu R.-C., M. H. Cheng, Chen C.-Y.* Potential hazards and dynamical analysis of interfacial solitary wave interactions // *Nat Hazards.* 2013. 65:255–278 DOI 0.1007/s11069-012-0360-9.
13. *Miles J. W., Howard L. N.* Note on a heterogeneous shear flow // *J. Fluid Mech.* 1964. № 20. P. 331—336.
14. *Miyata M.* An internal solitary wave of large amplitude // *La Mer.* 1985. № 23. P. 43—48.
15. *Choi W., Camassa R.* Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.* 1999. № 396. P. 1—36.
16. *Troy C. D., Koseff J. R.* The instability and breaking of long internal waves // *J. Fluid Mech.* 2005. №. 543. P. 107—336.
17. *Fructus D., Carr M., Grue J., Jensen A., Davies P. A.* Shear-induced breaking of large internal solitary waves // *J. Fluid Mech.* 2006. № 620. P. 1—29.
18. *Maderich V., Talipova T., Grimshaw R., Terletska K., Brovchenko I., Pelinovsky E., Choi B. H.* Interaction of a large amplitude interfacial solitary wave of depression with a bottom step // *Physics of Fluids.* 2010. № 22. doi:10.1063/1.3455984.
19. *Barad M. F., Fringer O. B.* Simulations of shear instabilities in interfacial gravity waves // *J. Fluid Mech.* 2010. № 644. P. 61—95.
20. *Maxworthy T.* Experiments on collisions between solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1976. № 76. P. 177—185.
21. *Chambarel J., Kharif C., Touboul J.* Head-on collision of two solitary waves and residual falling jet formation // *Nonlinear Proc. Geoph.* 2009. № 16. P. 111—122.

Статья поступила 24.04.2015 г.