

УДК 532.59

© Н. В. Гаврилов¹, В. Ю. Ляпидевский^{1,2}, З. А. Ляпидевская³

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

²Новосибирский государственный университет

³Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

gavrilov@hydro.nsc.ru

Трансформация внутренних волн большой амплитуды над шельфом

Рассматривается распространение внутренних волн большой амплитуды над неровным дном. Одной из характерных черт волн большой амплитуды является наличие «захваченного ядра» в волне, то есть области, в которой скорость движения частиц близка и даже превосходит скорость волны. Эти волны широко распространены в океане и наблюдаются в виде приповерхностных волн понижения, придонных волн повышения и прослоечных волн. В работе представлен обзор лабораторных экспериментов по генерации, взаимодействию и затуханию уединенных волн в двухслойной жидкости и иллюстрируются новые возможности применения аналитических и численных решений для интерпретации натуральных экспериментов. На основе математической модели трехслойной мелкой воды построены решения, описывающие эволюцию уединенных волн в шельфовой зоне. Проведенные лабораторные исследования уединенных волн большой амплитуды, распространяющихся в прослойке (симметричные волны второй моды), а также в приповерхностных и придонных слоях (волны понижения и повышения первой моды) показали возможность применения модели для расчета нестационарных волновых процессов, а также полученных из нее точных решений для определения формы и основных параметров этих волн. Анализ полученных решений дает возможность установить основные закономерности трансформации уединенных волн и нелинейных волновых пакетов большой амплитуды в шельфовой зоне моря.

Ключевые слова: стратифицированные течения, лабораторный эксперимент, уединенные волны, трехслойная мелкая вода, шельфовая зона.

N. V. Gavrilov¹, V. Yu. Liapidevskii^{1,2}, Z. A. Liapidevskaya³

¹Lavrentyev Institute of Hydrodynamics Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russia

²Novosibirsk State University, Russia

³Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics Siberian Branch of RAS, Novosibirsk, Russia

Transformation of Large Amplitude Internal Waves Over a Shelf

The propagation of finite amplitude internal waves over an uneven bottom is considered. One of the specific features of the large amplitude internal waves is the ability of the waves to carry fluid in the «trapped core» for a long distance. The velocity of particles in the «trapped core» is very close and, even, exceeds the wave speed. Such waves are detected in different parts of seas and oceans as internal waves of depression and elevation as well as short intrusions at interfaces. Laboratory experiments on the generation, interaction and decay of solitary waves in a two-layer fluid are discussed. Analytical and numerical solutions describing the evolution of internal waves in a shelf zone are constructed by the three-layer shallow water model. Laboratory investigations of the different types of internal waves (bottom, subsurface and interlayer waves) are demonstrated, that the model can be effectively applied to the numerical solution of unsteady wave motions, and the travelling waves, which can be found from the model in rather simple form, give the realistic form and governing parameters of internal waves in laboratory and field observations. The basic features of the large amplitude solitary waves and nonlinear wave trains evolution over a shelf can be represented by the model.

Key words: stratified flows, laboratory experiment, solitary waves, three-layer shallow water, shelf zone.

Нелинейные внутренние волны, генерируемые внутренним приливом и при взаимодействии течений с топографией, играют важную роль в процессах массообмена в шельфовой зоне моря. Основным отличием внутренних волн от поверхностных является возможность генерации и распространения внутренних волн большой амплитуды на большие расстояния без их обрушения. Здесь и далее под внутренними волнами большой амплитуды понимаются вертикальные возмущения линий уровня плотности, намного превосходящие начальную толщину характерного (чаще всего однородного) слоя, ограниченного резким пикноклином, по которому и распространяется внутренняя волна. Эти волны широко распространены в океане и наблюдаются в виде приповерхностных волн понижения, придонных волн повышения и прослоечных волн [1—3]. Конечно, в природных условиях прослоечные внутренние волны второй моды наблюдать сложно, но в лабораторных условиях они генерируются достаточно просто и являются объектом интенсивных исследований экспериментальными и теоретическими методами [4—8]. Интерес к симметричным внутренним волнам второй моды вызван еще и тем, что в лабораторных условиях для этого типа волн удастся избежать доминирующего влияния эффектов трения, характерных для течений малых масштабов. Информация о структуре и особенностях распространения симметричных волн может быть использована для моделирования волн большой амплитуды в натуральных условиях.

Одной из характерных черт волн большой амплитуды является наличие «захваченного ядра» в волне, то есть области, в которой скорость движения частиц близка и даже превосходит скорость волны [9—10]. Так как уединенные волны движутся со скоростью, близкой к постоянной на масштабах длины, сравнимой с глубиной жидкости, то эффективной гипотезой оказывается предположение о гидростатичности распределения давления в «захваченном ядре». В то же время, негидростатичность распределения давления во внешней области течения определяет форму волны и ее способность распространяться на большие расстояния без существенной потери энергии.

Перечисленные выше свойства позволили построить достаточно простую модель, передающую основные особенности генерации, распространения и взаимодействия волн большой амплитуды [11]. В данной работе приводится обзор лабораторных экспериментов по верификации модели, выполненных в ИГиЛ СО РАН [12—15], и иллюстрируются новые возможности применения построенных аналитических и численных решений для интерпретации натуральных экспериментов [16—19].

Лабораторные эксперименты. Серия лабораторных экспериментов, выполненная в ИГиЛ СО РАН и представленная в работах [11—15], направлена на изучение внутренних волн большой амплитуды. Особенностью проведения этих экспериментов является использование специальных методик, позволяющих визуализировать неоднородность поля плотности и связанную с ней тонкую структуру течения в уединенных волнах различного типа (придонных, приповерхностных, на внутренних границах раздела жидкостей с различной плотностью). Визуализация картины течения, позволяющая определить точные границы невозмущенного поля плотности при прохождении волны и, следовательно, восстановить ее профиль, осуществлялась следующим образом: сквозь толщу жидкости фотографировался равномерно освещенный экран с нанесенными на него наклонными линиями. На участках с высокими градиентами плотности наблюдается сильное искажение этих линий, а в областях интенсивного мелкомасштабного движения, связанного с обрушением внутренних волн и перемешиванием, нарушается оптическая прозрачность жидкости. Для экспериментов по генерации уединенных волн в прослойке между жидкостями различной плотности, схематично изображенных на рис. 1, соответствующие данной методике фотографии экспериментов приведены на рис. 2, 3. Следует отметить, что зоны увеличения градиента плотности соответствуют сгущению линий на фотографиях, а зоны уменьшения градиента — расхождению этих линий. Внешняя граница волнового возмущения может быть четко определена по фотографиям как граница, на которой происходит искажение параллельных линий, соответствующих однородной плотности. Поэтому такая методика удобна для определения профиля волны при сопоставлении с результатами теоретических и численных расчетов.

Для визуализации картины течения применялась также новая методика LIF (Laser Induced Fluorescence). Метод основан на линейной зависимости светимости слабого раствора флуоресцина

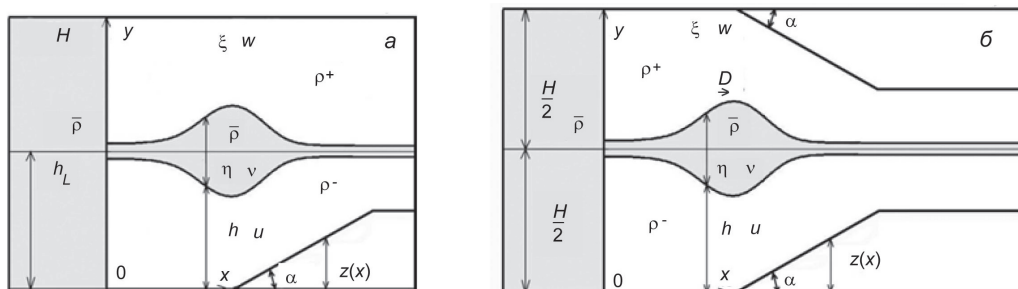


Рис. 1. Схема лабораторного эксперимента.

а — генерация и распространение симметричных уединенных волн второй моды над шельфом; *б* — уединенные волны в симметричном канале, имитирующие распространение приповерхностных волн над склоном. Для генерации волн перегородка, отделяющая подкрашенную жидкость в левом отсеке, поднимается на короткое время. Через некоторое время выпускаемая жидкость трансформируется в уединенную волну.

Здесь H — полная глубина канала; ρ^+ — плотности верхнего и нижнего слоя; $\bar{\rho}$ — плотность промежуточного слоя; h, η, ζ — толщина нижнего, промежуточного и верхнего слоев; u, v, w — средние скорости в этих слоях; $z = z(x)$ — форма дна.

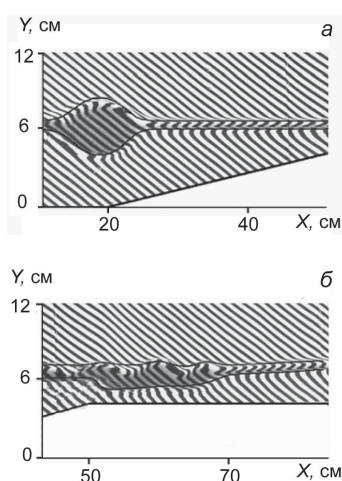


Рис. 2. Трансформация симметричной уединенной волны второй моды над шельфом.

а — уединенная волна над горизонтальным участком дна; *б* — потеря симметрии течения и генерация внутренних волн первой моды в шельфовой зоне. Подкрашенная жидкость из левого отсека (рис. 1, *а*) визуализирует «захваченное ядро». Сплошные линии — нестационарный расчет по модели (1) [15].

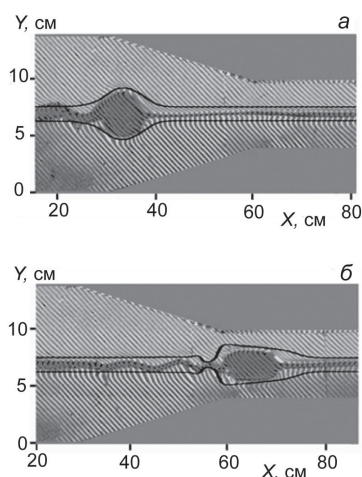


Рис. 3. Уединенная волна второй моды в симметричном канале.

а — уединенная волна над горизонтальным участком дна; *б* — уплощение волны над шельфом. Сплошные линии — нестационарный расчет по модели (1) [13]. Генерация волн осуществлялась так же, как для рис. 2.

от его концентрации при облучении лазером. Данный подход позволяет не только получить качественную информацию о структуре течения (границах волны, областях перемешивания и т. д.), но и найти распределение плотности в нестационарных волновых процессах в стратифицированной жидкости. Для получения плоской картины течения методом «светового ножа» использовался твердотельный лазер с диодной накачкой «Моцарт», обеспечивающий мощное непрерывное излучение на длинах волны 532 нм. Изменением температуры термостата можно регулировать мощность излучения от нескольких мВт до 5 Вт. Система управления позволяет менять ширину и направление светового ножа, а также частоту колебаний зеркала в широком диапазоне. В совокупности с регулировкой мощности лазера это позволяет получить равномерное освещение исследуемой области. Схема экспериментальной установки с использованием лазера приведена на рис. 4. Цифровая видеокамера, предназначенная для регистрации волновых процессов в освещенной области, устанавливалась на расстоянии 2.5 м от лотка.

Для сравнения результатов эксперимента, использующего оцифрованное изображение уединенной волны, полученное с использованием видеокамеры, с данными лабораторных и натурных наблюдений, в которых применяются неподвижные регистраторы, была разработана специальная

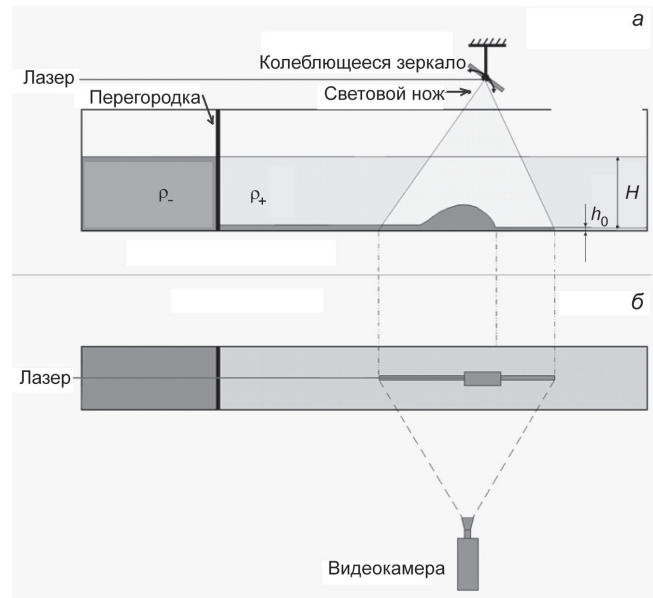


Рис. 4. Схема экспериментальной установки с использованием лазера.

а — вид сбоку; *б* — вид сверху.

Для генерации волн перегородка, отделяющая подкрашенную жидкость в левом отсеке, поднимается на короткое время. Через некоторое время выпускаемая жидкость трансформируется в уединенную волну.

ρ_+ — вода с флуоресцином; ρ_- — раствор соли.

методика обработки видеоизображений. Эта методика позволяет перейти от пространственной картины течения (рис. 5, *а*), полученной на одном кадре в фиксированный момент времени, к временной развертке процесса, которую и фиксируют неподвижные регистраторы, установленные в определенной точке рассматриваемой области. Суть метода состоит в том, что из последовательности фотографий процесса при помощи специальной компьютерной программы вырезаются узкие полоски шириной в несколько пикселей, соответствующие фиксированной пространственной точке, которые затем последовательно пристыковываются друг к другу в новом файле, иллюстрируя развитие процесса во времени (рис. 5, *б*). Для уединенных волн, распространяющихся с постоянной скоростью с сохранением формы, пространственные и временные развертки процесса воспроизводят друг друга (меняется масштаб и направление волны на рис. 5, *а* и *б*). В существенно нестационарных процессах указанные методики приводят к различным результатам и дополняют друг друга.

В лабораторных экспериментах, изображенных на рис. 1, изучались симметричные уединенные волны второй моды (поверхностная мода не учитывается в силу малого перепада плотностей). Прослоечные волны являются уже классическим объектом исследований [4—8]. Это связано не только с тем, что симметричные внутренние волны достаточно просто получить различными способами (интрузии, перемешивание, волновые генераторы) и удобно использовать для сравнения с точными и численными решениями нелинейных дисперсионных уравнений, но и важностью этого класса течений для лабораторного моделирования приповерхностных и придонных волн первой моды. Дело в том, что при небольших масштабах течений, характерных для лабораторных условий, эффекты донного трения и поверхностного натяжения существенно влияют на распространение уединенных волн и приводят к формированию структуры гравитационного течения. В то же время эти эффекты

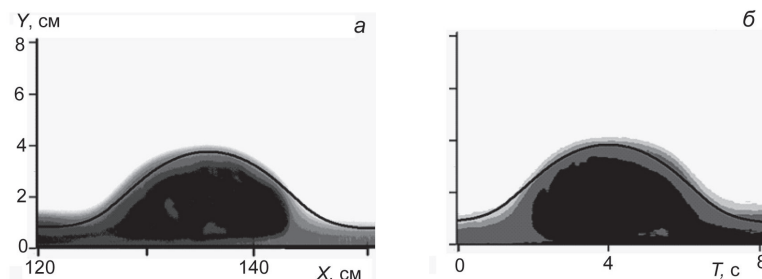


Рис. 5. Уединенная волна в придонном слое.

а — фотография волны; *б* — развертка по времени. Сплошная линия — нестационарный расчет по модели (1). Оттенкам соответствуют разные плотности. Генерировалась уединенная волна, поэтому полученные картинки очень похожи.

отсутствуют в симметричных уединенных волнах второй моды, и соответствующие лабораторные эксперименты могут быть использованы для моделирования уединенных волн повышения и понижения в течениях большого масштаба, как над неровным дном, так и над склоном [13—15].

Эксперименты, изображенные на рис. 1 и 4, проводились в лабораторном лотке длиной 330 см, шириной 20 см и глубиной 35 см. Стенки лотка изготовлены из плексигласа. Лоток разделялся на две части вертикальной герметичной перегородкой, которая могла подниматься и опускаться для формирования уединенной волны. Геометрическая конфигурация эксперимента по генерации симметричных уединенных волн, распространяющихся в виде коротких интрузий, представлена схемой, изображенной на рис. 1. Для создания плотностной стратификации использовался разбавленный раствор сахара. Относительная разность плотностей в слоях $\varepsilon = (\rho^- - \rho^+)/\rho^-$ составляла 0.5 % во всех экспериментах. При этом вязкость раствора сахара сравнима с вязкостью воды.

Для формирования симметричной уединенной волны в левый отсек заливался раствор промежуточной плотности $\bar{\rho} = 0.5(\rho^+ + \rho^-)$, а глубина нижнего слоя в правом отсеке равнялась половине глубины канала ($h_L = 0.5H$). Выбор длины левого отсека обеспечивал формирование одной уединенной волны над горизонтальным участком дна. В экспериментах над неровным дном в лотке устанавливалось препятствие, имитирующее шельф (рис. 1, а), или канал симметрично сужался сверху и снизу за счет препятствия на дне и специальной формы крышки канала (рис. 1, б). При одинаковой начальной толщине слоев и малых перепадах плотности возмущение, возникающее после удаления перегородки, распространяется вправо в виде симметричной уединенной волны второй моды. Подкрашенная жидкость, находящаяся первоначально в левом отсеке, визуализирует на фотографиях «захваченное ядро» (рис. 2, 3). Для определения границ волны использована описанная выше методика, позволяющая определить зоны больших градиентов плотности при помощи наклонных полос на задней стенке лотка.

В эксперименте по распространению уединенной волны над шельфом (рис. 1, а) первоначально симметричная внутренняя волна (рис. 2, а) деформируется над склоном. При этом потеря симметрии течения и генерация внутренних волн первой моды в шельфовой зоне могут быть отчетливо визуализированы в ходе эксперимента (рис. 2, б).

Эксперимент с симметричным поджатием канала сверху и снизу (рис. 1, б) обеспечивает сохранение симметричности уединенной волны над неровным дном. На рис. 3 продемонстрировано «уплощение» уединенной волны над шельфом. Кроме того, при распространении над склоном, в отличие от ровного дна, волна генерирует за собой цуг коротких волн первой моды. Как отмечалось выше, данный эксперимент может быть использован для моделирования трансформации поверхностной волны понижения в шельфовой зоне.

Математическая модель. Математические модели распространения внутренних волн большой амплитуды, применяемые в [11—16] для описания эволюции уединенных волн, существенно используют длинноволновое приближение. Предполагается, что длина волны существенно превышает глубину канала, при этом учитывается негидростатичность распределения на фронте волны. Длинноволновое приближение позволяет снизить размерность задачи и перейти к модели многослойной мелкой воды. Уравнения многослойной мелкой воды с учетом негидростатичности распределения давления в окрестности фронта волны (второе приближение) выведены в [20]. Однако для течений многослойной мелкой воды проблема построения и классификации уединенных волн остается весьма сложной. Даже для двухслойной мелкой воды со свободной границей в рамках второго приближения классические солитонобразные решения существуют только для дискретного набора определяющих параметров [21]. В то же время, особенностью внутренних приповерхностных волн большой амплитуды является их распространение с «захваченным ядром», т. е. характерным является перенос частиц жидкости в волне со скоростью, близкой к скорости волны в одном из слоев. Последнее обстоятельство обеспечивает гидростатичность распределения давления в этом слое для волн, распространяющихся со скоростью, близкой к постоянной, и может быть эффективно использовано для построения простых моделей распространения интенсивных внутренних волн. Для стратифицированных течений с малым изменением плотности указанный подход был применен для исследования уединенных волн большой амплитуды в [11—15]. Для произвольного перепада плотностей области существования уединенных волн в двухслойном течении проанализированы в [16].

Различные типы уединенных волн (поверхностные, придонные, прослоечные) удобно описать в рамках общей модели трехслойного течения. В приближении Буссинеска уравнения трехслойного течения с учетом гидростатичности давления в промежуточном слое принимают вид [15]:

$$\begin{aligned}
 h_t + (hu)_x &= 0, \quad \zeta_t + (\zeta w)_x = 0, \quad \eta_t + (\eta v)_x = 0, \\
 u_t + \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{\beta}{3} h \frac{d^2 h}{dt^2} + \frac{\beta}{6} \left(\frac{d_- h}{dt} \right)^2 + p + bh + \bar{b} \eta + bz + \frac{\beta}{2} h \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\beta}{2} \frac{d_- h}{dt} \frac{d_- z}{dt} + \frac{\beta}{2} \left(\frac{d_- z}{dt} \right)^2 \right)_x &= 0, \\
 w_t + \left(\frac{1}{2} w^2 + \frac{\beta}{3} \zeta \frac{d^2 \zeta}{dt^2} + \frac{\beta}{6} \left(\frac{d_+ \zeta}{dt} \right)^2 + p \right)_x &= 0, \\
 v_t + \left(\frac{1}{2} v^2 + \bar{b} (h + \eta + z) + p \right)_x &= 0, \\
 \frac{d_-}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d_+}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x}, \\
 b &= (\rho^- - \rho^+) g / \rho^+, \quad \bar{b} = (\bar{\rho} - \rho^+) g / \rho^+.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь h, η, ζ — толщина нижнего, промежуточного и верхнего слоев; u, v, w — средние скорости в этих слоях; p — модифицированное давление на верхней границе течения; g — ускорение свободного падения; $z = z(x)$ — форма дна. В приближении Буссинеска

$$h + \eta + \zeta + z = H \equiv \text{const}, \tag{2}$$

причем соотношение (2) выполнено в течениях под крышкой и со свободной поверхностью. В последнем случае появление в уравнениях (1) давления p связано с тем, что в этом приближении свободная поверхность заменяется линией $y = H$. Параметр $\beta = H^2/L^2$ (L — характерная длина волны) при выводе уравнений считается малым. Затем соответствующим растяжением переменных его можно исключить из уравнений, фиксируя при этом отношение вертикального и горизонтального масштабов. Вариация значения β в небольшом интервале ($0.5 \leq \beta \leq 1$) позволяет слегка корректировать ширину уединенной волны [13—15]. Далее положим $\beta = 1$ в (1). Система (1), (2) пригодна для расчета генерации и эволюции внутренних волн первой и второй моды.

На рис. 2 показана трансформация симметричной уединенной волны над склоном в эксперименте, приведенном на рис.1, а. Глубина канала $H = 12$ см. Сплошные линии — результаты нестационарного расчета по модели (1), (2) [15]. Эксперимент и вычисления иллюстрируют влияние топографии на перераспределение энергии возмущения между первой и второй модой.

Однако особое значение имеет класс решений, описывающий распространение возмущений, симметричных относительно центральной линии канала $y = H/2$. При этом

$$h + \eta/2 \equiv H/2, \quad \zeta + \eta/2 \equiv H/2, \quad \bar{b} = b/2, \quad z \equiv 0. \tag{3}$$

Как отмечалось выше, эти решения пригодны не только для расчета симметричных уединенных волн второй моды, распространяющихся в прослойке между однородными слоями различной плотности, но и для описания придонных и приповерхностных волн большой амплитуды. При этом в силу симметрии решения достаточно рассмотреть только верхнюю или нижнюю половину решения (относительно линии $y = H/2$).

В дальнейшем изложении остановимся только на перечисленных выше типах уединенных волн. Заметим, что в [15] полная система уравнений (1) использована как для построения точного решения, так и нестационарного численного расчета эволюции несимметричной уединенной волны второй моды. Найдены значения определяющих параметров, при которых возможно распространение такой несимметричной волны с сохранением формы на достаточно большое расстояние.

Симметричные уединенные волны. Следует отметить, что уравнения (1) не являются обобщением уравнений Грина—Нагди на течения многослойной жидкости, т. е. отличаются от выведенных в [20] даже с условием гидростатичности распределения давления в промежуточном слое.

Но поведение решений этих систем согласуется не только качественно, но и количественно. Дело в том, что основные классы решений, а именно, бегущие волны над ровным дном и стационарные течения над неровным дном для этих систем совпадают. Преимуществом (1) является ее запись в дивергентной форме, позволяющая найти численные решения стандартными методами. Для симметричных решений со свойством (3) порядок рассматриваемых систем уравнений может быть понижен. Кроме того, в случае плавно изменяющегося дна (и, соответственно, крышки, см. рис. 1, б), задаваемого функцией вида $z = z_0(\beta x)$, производные этой функции имеют порядок $O(\beta)$, поэтому все члены, содержащие материальные производные d_z/dt имеют порядок $O(\beta^2)$ и могут быть отброшены. В этом случае аналог уравнений Грина—Нагди для описания волн большой амплитуды в двухслойных течениях в безразмерных переменных ($h_L = H/2 = 1$, $\bar{b} = 1$) принимает вид [13]:

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, \\ u_t + uu_x + (h+z)_x + p_x + \frac{\beta}{3h} \left(h^2 \frac{d^2 h}{dt^2} \right)_x &= f^-, \\ v_t + vv_x + p_x &= f^+, \\ hu + (1-h)v &= Q. \end{aligned} \quad (4)$$

В представленных выше экспериментах $Q = 0$. Правые части $f^\pm$ уравнений (4) отражают влияние трения на дне и границе раздела на распространение возмущений. Они могут быть выбраны в виде:

$$\begin{aligned} f^- &= -c_w \frac{u|u|}{h} - c_i \frac{(u-w)|u-w|}{h}, \\ f^+ &= c_i \frac{(u-w)|u-w|}{\eta}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь учтено отсутствие трения на границе $y = 1$ в силу симметрии течения. Заметим, что при распространении возмущений вдоль границы раздела в виде симметричных интрузий основной вклад в диссипацию энергии вносят процессы на границе раздела между однородными слоями. Поэтому коэффициент донного трения c_w можно положить равным нулю, а коэффициент межфазного трения c_i отражает развитие мелкомасштабных возмущений и перемешивание в высокоградиентных прослойках между однородными слоями. Поэтому его численное значение существенно превосходит значение c_w . Для численной реализации систему (4) удобно представить в виде [13]:

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, \\ K_t + \left(Ku - \frac{1}{2}(u-v)^2 + h + z - \frac{\beta}{2} h^2 u_x^2 \right)_x &= f^+ - f^-. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $v = (Q - hu)/(1-h)$, $K = u - v - \frac{\beta}{3h} (h^3 u_x)_x$, а функции $f^\pm$ заданы в (5).

Уравнения (6) могут быть использованы для расчета симметричных уединенных волн в канале переменного сечения (рис. 1, б), а также приповерхностных волн понижения над склоном [14]. Численная реализация решений (6) основана на методе, развитом в [22]. Переменные h , K рассматриваются в (6) в качестве эволюционных и определяются на следующем слое по времени из соответствующей разностной схемы, являющейся аналогом схемы С. К. Годунова. Затем распределение скорости $u = u(t, x)$ восстанавливается по заданным значениям h , h_x , K из линейного дифференциального уравнения

$$\frac{\beta}{3} h^2 u_{xx} + \beta h h_x u_x - \frac{1-z}{1-h-z} u = -\frac{Q}{1-h-z} - K.$$

На рис. 3 сплошными линиями изображена граница возмущения, распространяющегося в симметричном канале переменного сечения. Начальная форма возмущения определяется точным решением однородной системы (6) над ровным дном, рассмотренным ниже. Расчеты показывают,

что внешние границы волны передаются при ее трансформации над склоном достаточно хорошо. Однако использование модели (6) вместо (1) позволяет описать только развитие возмущений второй моды без учета генерации цуга коротких волн первой моды в следе за основным возмущением (рис. 3, б). Исследование механизма нелинейного обмена энергией между различными модами в рамках модели (1) является темой дальнейших исследований.

Бегущие волны. Однородная система уравнений (6), описывающая эволюцию нелинейных возмущений в двухслойной жидкости над ровным дном ($f^{\pm} \equiv 0, z \equiv 0$), имеет широкий набор решений типа бегущих волн. Возмущения такого типа распространяются с постоянной скоростью с сохранением формы и могут быть применены для анализа структуры придонных и приповерхностных волн большой амплитуды как в лабораторных, так и натуральных условиях. Решение (6), представляющее собой уединенную волну, распространяющуюся по невозмущенной двухслойной жидкости, находится в явном виде и эффективно воспроизводит деформацию внутренней границы раздела в реальных стратифицированных течениях.

Рассмотрим решение (6), зависящее от переменной $\xi = x - Dt$ ($D \equiv \text{const}$) и удовлетворяющее следующим условиям:

$$h \rightarrow h_0, u \rightarrow 0, h' \rightarrow 0, h'' \rightarrow 0 \text{ при } |\xi| \rightarrow \infty. \quad (7)$$

(Здесь и далее штрих означает дифференцирование по переменной ξ).

В работах [11—12] показано, что солитонобразные решения задачи (6), (7) могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} h(D-u) &= h_0 D, \quad (1-h)(D-v) = (1-h_0)D, \\ (h')^2 &= G_0(h) = \frac{3(h-h_0)^2(\text{Fr}^2 - h + h^2)}{\beta \text{Fr}^2 h_0^2 (1-h)}, \\ \text{Fr} &= D/\sqrt{bH} = D. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (8) следует, что уединенная волна существует при $h^2 - h + \text{Fr}^2 = (h - h^+)(h - h^-) \geq 0$, где $h^{\pm} = (1 \pm \sqrt{1 - 4\text{Fr}^2})/2$. Поэтому допустимыми интервалами для глубины h являются

$$0 < h_0 \leq h \leq h^-, \quad (9)$$

$$h^+ \leq h \leq h_0 < 1. \quad (10)$$

Случай (9) соответствует придонной волне повышения (если рассматривается течение в канале $0 \leq y \leq h_L = 1$, (рис. 1, а). Случай (10) представляет приповерхностную волну в таком же канале или нижнюю половину симметричной уединенной волны в канале $0 \leq y \leq H = 2$. В любом случае необходимым условием существования решения является условие $\text{Fr} \leq 1/2$.

Важно отметить, что из соотношений (8) нетрудно получить предел $h_0 \rightarrow 1$, соответствующий приповерхностной волне бесконечно большой амплитуды (по отношению к начальной глубине прослойки) или интрузии, распространяющейся по промежуточной прослойке нулевой толщины. В [11—12] экспериментально показано, что это решение для волн большой амплитуды эффективно представляет форму «захваченного ядра», состоящего из частиц жидкости, переносимых вместе с волной. Из (8) при $h_0 \rightarrow 1$ получаем

$$(h')^2 = G_1(h) = 3\beta^{-1} \text{Fr}^{-2} (1-h)(\text{Fr}^2 - h + h^2). \quad (11)$$

Решение, задающее профиль волны для (8) и (11) представляется в квадратурах

$$\xi = \xi_i(h) = \pm \int_{h_m}^h \frac{ds}{\sqrt{G_i(s)}}, \quad i=0,1. \quad (12)$$

Здесь $h_m = h^+$ для волны понижения и $h_m = h^-$ для волны повышения. Заметим, что значение h_m не зависит от начальной толщины прослойки, а определяется только числом Фруда Fr . На рис. 2, а и рис. 3, а в качестве начального возмущения в прослойке между однородными слоями взяты решения (6), представляющие симметричную бегущую волну с заданной начальной толщиной прослойки.

При этом форма волны и начальное распределение скорости находится из (8), (12) заданием только одного параметра Fr ($0 \leq Fr \leq 0.5$). Отметим также, что профиль уединенной волны зависит только от геометрии канала и не зависит от стратификации. Однако для развертки волнового процесса по времени в фиксированной точке в размерных переменных появляется зависимость ширины волны от перепада плавучести, так как размерная скорость волны $\tilde{D} = Fr \sqrt{bH}$.

На рис. 5 приведен экспериментальный профиль уединенной волны повышения, полученный в эксперименте с использованием светового ножа (рис. 4). И на фотографии уединенной волны (рис. 5, а), и на ее временной развертке при прохождении виртуальной фиксированной точки (рис. 5, б) отчетливо видны внешние границы волны и «захваченное ядро» (темная область). Кроме того, цифровой обработкой изображения можно выделить промежуточные линии уровня, представленные на рис. 5. На этих рисунках показано также решение (8), изображающее внешнюю границу волны (сплошная темная линия). При этом глубина канала составляет $H = 8$ см, начальная глубина 0.9 см, $Fr = 0.494$. Следует отметить, что в придонном слое возмущение распространяется в виде уединенной волны повышения только при наличии перед волной слоя жидкости плотности ρ^- (рис. 4), глубина которого h_0 превосходит некоторую критическую глубину. В противном случае, например, по «сухому руслу» возмущение распространяется в виде гравитационного течения. Зависимость структуры волны в придонных и приповерхностных двухслойных течениях от начальной толщины слоя, по которому эта волна распространяется, изучена в [14].

Затухание уединенных волн. Во многих работах при анализе волновых пакетов конечной амплитуды в лабораторных и натурных условиях для отдельных волн используется термин «солитон». Как было проиллюстрировано выше на рис. 2, а, 3, а и 5, действительно, точное решение (8), задающее солитонообразное решение при отсутствии трения в модели (6), хорошо передает мгновенный профиль волны. Но лабораторные эксперименты по распространению уединенных волн в стратифицированной жидкости показывают существенное влияние диссипативных эффектов на скорость и амплитуду волн. Даже в экспериментах по эволюции симметричных уединенных волн второй моды, в которых устранено влияние трения о дно и влияние поверхностных эффектов, наличие высокоградиентных прослоек между однородными слоями и сдвига скорости в этих слоях приводит к существенному изменению амплитуды и скорости волны на характерных масштабах эксперимента [12]. Поэтому возникает вопрос о возможности моделирования диссипативных эффектов в (6) при помощи правой части $f^\pm$ указанного вида. С целью верификации (6) в [12] была проведена серия экспериментов по затуханию симметричных уединенных волн второй моды над ровным дном (рис. 1, а, $z(x) \equiv 0$). Видеосъемка процесса распространения уединенной волны по промежуточному слою заданной толщины 2δ производилась со скоростью 25 кадров в секунду. В результате обработки изображений найдена зависимость амплитуды волны и ее скорости от пройденного расстояния и от времени. На рис. 6, а точками изображено положение гребня волны через равные промежутки

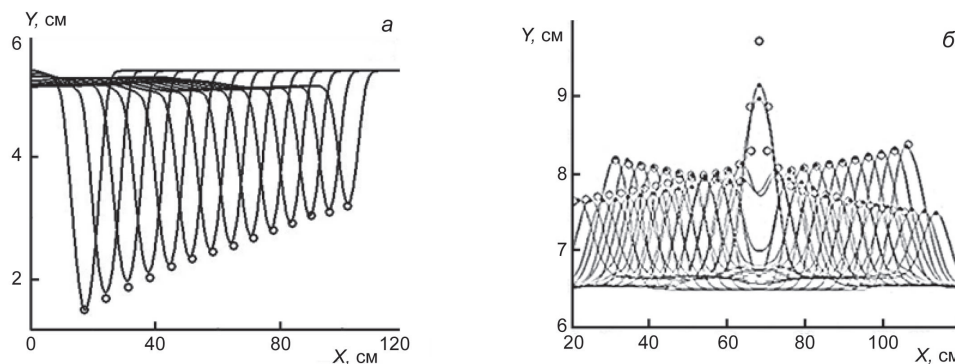


Рис. 6. Затухание уединенных волн.

а — одна волна, распространяющаяся слева направо, интервал времени 4 с [12]; б — взаимодействие двух уединенных волн, движущихся навстречу друг другу, интервал времени 2 с [11]. Точки — положение гребней волн в эксперименте. Сплошные линии — нестационарный расчет по модели (1).

времени $\Delta t = 4$ с ($\delta = 0.6$ см), а тонкими сплошными линиями — соответствующий профиль нижней половины волны, рассчитанной по модели (6). Аналогично, на рис. 6, б с интервалом $\Delta t = 2$ с представлены профили уединенных волн, движущихся навстречу друг другу. Как отмечалось выше, трение о дно не влияет существенно на распространение уединенной волны, поэтому $c_w = 0$. В представленном эксперименте и в экспериментах с другими значениями δ величина $c_i = 0.01$ дает хорошее совпадение с экспериментальными данными как по скорости, так и по амплитуде волны по мере ее распространения и затухания. Здесь важно отметить еще одну особенность эволюции уединенных волн, отчетливо наблюдаемую в численном эксперименте (рис. 6). Влияние трения приводит не только к потере энергии уединенной волны. Профиль волны становится все более несимметричным относительно ее гребня, и волна теряет не только скорость, но и массу. Заметим, что скорость потери массы уединенной волной (*shedding rate*) является важной характеристикой течений многофазных сред в трубах и каналах и, как правило, определяется только экспериментально.

Начальная толщина прослойки эффективно влияет на структуру прослоечных волн. В [12] проведен специальный эксперимент, демонстрирующий этот феномен. На пути симметричной уединенной волны в плоскости ее симметрии ставилась тонкая пластина (рис. 1, 2 в [12]). При прохождении возмущения через пластину течение приобретало форму гравитационного течения, в котором трение о дно играет определяющую роль. За пластиной опять восстанавливалась структура симметричной уединенной волны. При увеличении начальной толщины прослойки δ течение в окрестности пластины становилось все более симметричным относительно гребня волны и внешние границы волны уже соответствовали ее форме при распространении по прослойке. Эти эксперименты показывают, что структура прослоечных волн и придонных волн может существенно различаться в зависимости от того, имеется или нет перед волной тонкий слой более плотной жидкости. Как правило, современные модели распространения внутренних волн не учитывают это явление, что ограничивает их область применимости в зоне «заплеска» внутренних волн [19]. Заметим, что существенная перестройка уединенных волн, распространяющихся по тонкому слою более плотной жидкости, и переход к структуре гравитационного течения связаны с развитием сдвиговой неустойчивости (неустойчивости Кельвина—Гельмгольца) на фронте волны. Математическое описание такого перехода возможно только в рамках моделей, учитывающих совместные эффекты нелинейности, дисперсии и турбулентного перемешивания в стратифицированных течениях [23].

Уединенные волны в шельфовой зоне моря. Для стратифицированных течений больших масштабов, встречающихся в открытых водоемах, соотношение (6) позволяет представить структуру поверхностных и придонных волн, амплитуда которых может на порядок превосходить начальную толщину слоя, по которому эта волна распространяется. Конечно, в естественных условиях стратификация водоема может быть далека от двухслойной. Тем не менее, динамика уединенных волн определяется средним перепадом плотности в слоях. Поэтому двухслойная модель течения хорошо передает форму деформации основного пикноклина при прохождении уединенной волны. При этом, при заданной начальной толщине однородного слоя семейство уединенных волн, задаваемых (8), образует однопараметрическое семейство, определяемое числом Фруда $Fr = D / \sqrt{bH}$, где D — скорость волны, b — средняя плавучесть, H — полная глубина, так что скорость волны и ее профиль зависит только от выбора значения Fr ($0 \leq Fr \leq 0.5$).

Приповерхностные волны понижения генерируются в шельфовой зоне моря различными физическими механизмами (внутренний прилив, влияние топографии, распад вихрей и т. п.) [1]. Их амплитуда в южных морях может на порядок превосходить начальное заглубление верхнего однородного слоя и достигать 200—300 м. На рис. 7, а показана временная развертка поля температуры при прохождении одиночной волны через термисторную цепь (белые квадратики), установленную в шельфовой зоне Южно-Китайского моря [24, рис. 3, з]. Общая глубина в районе станции $H = 525$ м. Черной сплошной линией на рисунке показано положение основного пикноклина, соответствующего максимальному вертикальному отклонению изотерм при прохождении волны. Выше этого пикноклина температура меняется в пределах 25—30 °С, ниже — 5—25 °С. Рассматривая эту систему как двухслойную, определим среднюю плавучесть $b = 4 \cdot 10^{-2}$ м/с². На рисунке белой

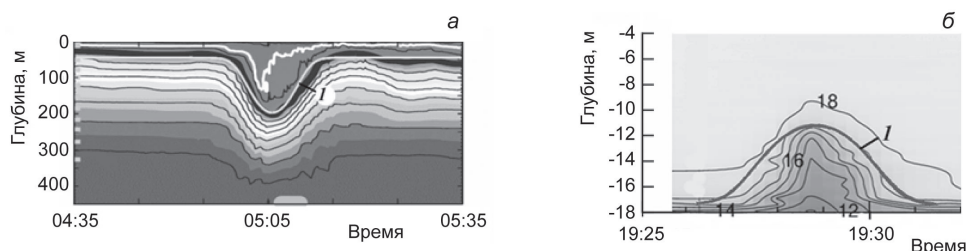


Рис. 7. Натурные наблюдения распределения температуры в уединенной волне.

а — приповерхностная волна [24] (черная сплошная линия — положение основного пикноклина), 04 июня 2011 г.;
б — придонная уединенная волна [19], 09 сентября 2011 г. Цифры — температура в градусах Цельсия. *I* — решение (6).

сплошной линией (кривая *I*) обозначено решение (6) для значения числа Фруда $Fr = 0.48$, что соответствует скорости волны $D = Fr \sqrt{bH} = 2.2$ м/с, наблюдаемой в натурном эксперименте.

В прибрежной зоне волны понижения меняют полярность [25] и в зону «заплеска», т. е. выше линии контакта основного пикноклина со дном, выходят в виде серии придонных короткопериодных уединенных волн, захватывая в ядре более холодную воду и транспортируя ее к берегу вплоть до полного разрушения волны. Систематическое исследование волн в зоне «заплеска» приведено в [19]. При подходе к берегу возмущения поля плотности принимают вид уединенных волн повышения, амплитуда которых достигает половину полной глубины моря в данном районе, или, разрушаясь, принимают форму *N*-волны с передним крутым склоном и медленным спадом плотности за фронтом волны. Структура первого типа волн описывается решением (6), соответствующим волне повышения ($h_0 < h < h_m$). На рис. 7, *б* приведен фрагмент записи распределения температуры в придонном слое, полученный в [19, рис. 8, *а*] при помощи вертикальной термисторной цепи. Общая глубина в месте измерения $H = 18$ м, перед волной температура всего слоя за исключением тонкого придонного слоя равна 18°C . В «ядре» волны средняя температура составляла 12°C . На рис. 7, *б* сплошной линией (линия *I*) обозначено решение (6) для $h_0 = 0.9$ м, $b = 1.2 \cdot 10^{-2}$ м/с², $Fr = 0.49$.

Проведенные лабораторные исследования уединенных волн большой амплитуды, распространяющихся в прослойке (симметричные волны второй моды), а также в приповерхностных и придонных слоях (волн понижения и повышения первой моды) показали возможность применения модели (6) для расчета нестационарных волновых процессов, а также полученных из нее точных решений (8) и (11) для определения формы и основных параметров этих волн. Анализ решений (6) дает возможность установить основные закономерности трансформации уединенных волн и нелинейных волновых пакетов большой амплитуды в шельфовой зоне моря.

Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН (проект 18.6), а также поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проекты 13-01-00249, 15-01-03942).

Литература

1. Helfrich K. R., Melville W. K. Long nonlinear internal waves // Ann. Rev. Fluid Mech. 2006. V. 38. P. 395—425.
2. Scotti A., Pineda J. Observation of very large and steep internal waves of elevation near the Massachusetts coast // Geophys. Res. Lett. 2004. V. 31. L22307. P. 1—5.
3. Stevens C. L., Fisher T. S. R., Lawrence G. A. Turbulent layering beneath the pycnocline in a strongly stratified pit lake // Limnol. Oceanogr. 2005. V. 50, N. 1. P. 197—206.
4. Davis R. E., Acrivos A. Solitary internal waves in deep water // J. Fluid Mech. 1967. V. 29. P. 593—608.
5. Maxworthy T. On the formation of nonlinear internal waves from the gravitational collapse of mixing regions in two and three dimensions // J. Fluid Mech. 1980. V. 96. P. 47—64.
6. Tung K.-K., Chan T. F., Kubota T. Large amplitude internal waves of permanent form // Studies Appl. Math. 1982. V. 66. P. 1—44.
7. Kao T. W., Pao K. H.-P. Wake collapse in the thermocline and internal solitary waves // J. Fluid Mech. 1980. V. 97. P. 115—127.
8. Stamp A. P., Jacka M. Deep-water internal solitary waves // J. Fluid Mech. 1995. V. 305. P. 347—371.
9. Derzho O. G., Grimshaw R. Asymmetric internal solitary waves with a trapped core in deep fluids // Phys. Fluids. 2007. V. 19. 096601.
10. Lamb K. G. Shoaling solitary internal waves: on a criterion for the formation of waves with trapped cores // J. Fluid Mech. 2003. V. 478. P. 81—100.

11. Гаврилов Н. В., Ляпидевский В. Ю. Симметричные уединенные волны на границе раздела жидкостей // ДАН. 2009. Т. 429, № 2. С. 187—190.
12. Гаврилов Н. В., Ляпидевский В. Ю. Уединенные волны конечной амплитуды в двухслойной жидкости // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 26—38.
13. Gavrilov N. V., Liapidevskii V., Gavrilova K. Large amplitude internal solitary waves over a shelf // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. 2011. V. 11. P. 17—25.
14. Gavrilov N. V., Liapidevskii V., Gavrilova K. Mass and momentum transfer by solitary internal waves in a shelf zone // Nonlinear Processes Geoph. 2012. V. 19. P. 265—272.
15. Гаврилов Н. В., Ляпидевский В. Ю., Ляпидевская З. А. Влияние дисперсии на распространение внутренних волн в шельфовой зоне // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. Т. 6, № 2. С. 25—34.
16. Данилова К. Н., Ляпидевский В. Ю. Уединенные волны в двухслойной, мелкой воде // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. 2014. Т. 14, вып. 4. С. 22—31.
17. Навроцкий В. В., Ляпидевский В. Ю., Павлова Е. П., Храпченков Ф. Ф. Внутренние волны и перемешивание в шельфовой зоне моря // Известия ТИНРО. 2010. Т. 162, № 3. С. 324—337.
18. Навроцкий В. В., Ляпидевский В. Ю., Павлова Е. П. Внутренние волны и их биологические эффекты в шельфовой зоне моря // Вестник ДВО РАН. 2012. № 6. С. 22—31.
19. Кукарин В. Ф., Ляпидевский В. Ю., Навроцкий В. В., Храпченков Ф. Ф. Эволюция внутренних волн большой амплитуды в шельфовой зоне моря // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. Т. 6, № 2. С. 35—45.
20. Choi W. Modeling of strongly nonlinear internal gravity waves // Proceedings of the Fourth International Conference on Hydrodynamics / Eds: Y. Goda, M. Ikehata, K. Suzuki. 2000. P. 453—458.
21. Barros R., Gavriluk S. Dispersive nonlinear waves in two-layer flows with free surface. Part II. Large Amplitude Solitary Waves Embedded into the Continuous Spectrum // Studies in Appl. Math. 2007. V. 119, Issue 3. P. 213—251.
22. Le Metayer O., Gavriluk S., Hank S. A numerical scheme for the Green-Naghdi model // J. Comput. Phys. 2010. V. 229. P. 2034—2045.
23. Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: ИСО РАН, 2000. 420 с.
24. Lien R.-Ch., Henevey F., Ma B., Yang Y. J. Large-amplitude internal solitary waves observed in the northern South China sea: properties and energetic // J. Phys. Oceanography. 2014. V. 44, N. 4. P. 1095—1115.
25. Серебряный А. Н., Пао К. П. Прохождение нелинейной внутренней волны через точку переворота на шельфе // ДАН. 2008. Т. 420, № 4. С. 543—547.

Статья поступила в редакцию 15.04.2015 г.