

УДК 532.59:534.1

© В. В. Булатов, Ю. В. Владимиров

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

internalwave@mail.ru

Динамика внутренних гравитационных волн в стратифицированных средах переменной глубины

Рассматриваются поля внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды переменной глубины. В предположении линейного наклона дна, с использованием преобразования Канторовича—Лебедева получены точные решения, описывающие отдельную моду и полное волновое поле внутренних гравитационных волн. Отдельная волновая мода выражается через гипергеометрическую функцию, полное волновое поле описывается полулогарифмической функцией. Построены ВКБ-асимптотики как отдельной волновой моды, так и полного волнового поля. Для параметров среды, характерной для реального океана (Бискайский залив), приведены результаты численных расчетов волновых полей по асимптотическим формулам. Было проведено сравнение с результатами численного моделирования полной системы уравнений гидродинамики, описывающей эволюцию нелинейных волновых возмущений над неровным океаническим дном, и показано, что амплитудно-фазовая структура волновых полей хорошо описывается полученными в работе асимптотическими формулами. Имеющиеся натурные данные также показывают, что волновые картины с ярко выраженной лучевой структурой могут наблюдаться в условиях реального океана, особенно при исследовании эволюции пакетов внутренних гравитационных волн над неровным дном. В частности аналитические, численные и натурные данные показывают, что ширина волновых пучков уменьшается при приближении к берегу. Характерные лучевые картины волновых полей внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды переменной глубины были получены в работе без использования математического аппарата геометрической оптики.

Ключевые слова: внутренние гравитационные волны, стратифицированная среда, лучевой метод, ВКБ-приближение, преобразование Канторовича—Лебедева.

V. V. Bulatov, Yu. V. Vladimirov

Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia

internalwave@mail.ru

Internal Gravity Waves Dynamics in Stratified Medium of Non-Uniform Depth

The internal gravity waves fields in a stratified fluid layer of variable depth are considered. Assuming a linear slope bottom, the exact solutions are obtained using the Kantorovich—Lebedev transform which describe an individual wave mode and a full wave field of internal gravity waves. Individual wave mode is expressed in terms of the hypergeometric function, the full wave field is described by semi-logarithmic function. WKBJ-asymptotics are constructed both for individual wave mode and for a full wave field. For the parameters of the stratified medium, which is characteristic for a real ocean (Bay of Biscay), the results of numerical calculations of the wave fields of asymptotic formulas are presented. A comparison with the results of numerical simulation of the complete system of hydrodynamic equations describing the evolution of nonlinear wave disturbances over a non-uniform ocean bottom, and it is shown that the amplitude-phase structure of the wave field is described by obtained in the paper asymptotic formulas. Available measurements data also show that the wave pattern with a strong beam structure can be observed in a real ocean, especially in the study of the evolution of a package of internal gravity waves over a non-uniform ocean bottom. In particular, analytical, numerical and measurements data show that the width of the wave ray decreases when approaching the shore. Typical ray pattern of the internal gravity waves in a stratified fluid layer of variable depth have been obtained without using of WKBJ-technics.

Key words: internal gravity waves, stratified medium, ray method, WKBJ-approximation, Kantorovich—Lebedev transform.

В настоящее время в связи с проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы наблюдается рост интереса к изучению динамики волновых движений стратифицированных сред [1—10]. В основе анализа, как правило, лежат асимптотические методы, так как на базе изучения невозмущенных уравнений гидродинамики формируются асимптотические разложения (анзацы, *Ansatz* (нем.) — виды решения), позволяющие в дальнейшем решать задачи для возмущенных уравнений, которые могут учитывать эффекты нелинейности, неоднородности и нестационарности природных стратифицированных сред [11—15]. Для детального описания широкого круга физических явлений, связанных с динамикой стратифицированных неоднородных по горизонтали и нестационарных сред, необходимо исходить из достаточно развитых математических моделей, которые, как правило, оказываются весьма сложными, нелинейными, многопараметрическими, и для их полного исследования эффективны лишь численные методы [11—13]. Однако в ряде случаев первоначальное качественное представление об изучаемом круге явлений можно получить и на основе более простых асимптотических моделей и аналитических методов их исследования. Эти модели в дальнейшем входят в тот набор «блоков», из которых складывается общая картина динамики волн, позволяющая проследить соотношение различных волновых явлений и установить их взаимосвязь. Однако иногда, даже несмотря на простоту используемых модельных предположений, удачный выбор формы решения позволяет получить физически интересные результаты [6—8, 14].

В этой связи можно отметить задачи об эволюции внутренних гравитационных волн в плавно-неоднородной по горизонтали и нестационарной стратифицированной среде [6—8, 14, 15]. Построенные модельные решения, описывающие структуру полей отдельных волновых мод в вертикально стратифицированной среде, позволили в дальнейшем получить асимптотические представления полей внутренних волн с учетом изменчивости среды не только по вертикали и горизонтали, но и по времени. Кроме того, оказалось, что построенные решения вполне согласуются с результатами натурных наблюдений волновых полей [9, 16—21]. Необходимо подчеркнуть, что в силу значительных математических трудностей, как правило, удается построить или асимптотические представления волновых полей, или точные решения для монохроматических волн [6—8, 15].

Постановка задачи и интегральные представления решения. В рамках линейной теории исследуется невязкая, несжимаемая неоднородная среда с невозмущенной плотностью $\rho_0(z)$, ограниченной поверхностью $z = 0$ и дном $z = \gamma y$ (ось z направлена вверх, γ — наклон дна). В точке $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, находящейся внутри клина, имеется точечный источник массы мощностью Q и временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$. Система уравнений гидродинамики для малых возмущений плотности ρ^* , давления p^* и компонент скорости (u_1, u_2, w) имеет вид [1, 3, 5]:

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x}, \quad \rho_0 \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial y}, \quad \rho_0 \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial p^*}{\partial z} + g\rho^*, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= Q \exp(-i\omega t) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0), \\ \frac{\partial \rho^*}{\partial t} + w \frac{\partial \rho_0}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где g — ускорение силы тяжести. В качестве граничных условий возьмем условие «твердой крышки» на поверхности и условие непротекания на дне

$$w = 0 \text{ при } z = 0, \quad w + u_2 \gamma = 0 \text{ при } z = \gamma. \quad (2)$$

Далее, предполагая у всех решений гармоническую зависимость от времени: $(p^*, \rho^*, u_1, u_2, w) = \exp(-i\omega t)(p^*, \rho^*, U_1, U_2, W)$, из (1) можно получить следующую систему уравнений с граничными условиями (2)

$$i\omega \rho_0 U_1 = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad i\omega \rho_0 U_2 = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad i\omega \rho_0 W = -\frac{c^2 \partial p}{\partial z},$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = Q\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0), \quad i\omega\rho = \frac{W\partial\rho_0}{\partial z}, \quad (3)$$

где $c^2 = \omega^2 / (N^2 - \omega^2)$, $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial\rho_0}{\partial z}$ — частота Брента—Вайсяля, которая в дальнейшем предполагается постоянной: $N(z) = N = \text{const}$. В приближении Буссинеска система (3) сводится к одному уравнению, например для возмущенного давления с соответствующими граничными условиями [6—8]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = -i\omega Q\rho_0\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)/c^2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \text{ при } z = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \text{ при } z = -\gamma y. \quad (5)$$

Под значением ρ_0 в правой части (4) в силу относительно малого изменения $\rho_0(z)$ в океане понимается, например, значение плотности морской воды на поверхности, то есть далее $\rho_0 = \rho_0(0) = \text{const}$ [1, 3, 5]. Решение $p(x, y, z)$ должно стремиться к нулю при $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$. После нахождения функции $p(x, y, z)$, компоненты скорости (U_1, U_2, W) можно найти из первых трех уравнений системы (3), а плотность ρ — из пятого уравнения этой системы.

Сделаем далее замену переменных:

$$y = r \cosh \varphi, \quad z = -cr \sinh \varphi, \quad r = \sqrt{y^2 - z^2 / c^2}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{cy - z}{cy + z}. \quad (6)$$

Осуществим преобразование Фурье по переменной x (не умаляя общности можно положить далее $x_0 = 0$). Учитывая, что модуль якобиана перехода от координат (y, x) к (r, φ) равен cr , из (4)—(5) получим для Фурье образа $P(r, \varphi, l)$ функции $p(r, \varphi, x)$ следующую плоскую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{\partial P}{r \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} - l^2 P = \frac{q}{r} \delta(r-r_0) \delta(\varphi-\varphi_0), \quad (7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0 \text{ при } \varphi = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0 \text{ при } \varphi = \varphi_r, \quad (8)$$

$$r_0 = \sqrt{y_0^2 - z_0^2 / c^2}, \quad \varphi_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{cy_0 - z_0}{cy_0 + z_0}, \quad \varphi_r = \frac{1}{2} \ln \frac{c + \gamma}{c - \gamma}, \quad q = i\omega Q\rho_0 / c. \quad (9)$$

Решение трехмерной краевой задачи (4), (5) в переменных (r, φ, x) получается из решения плоской задачи (7), (8) с помощью обратного преобразования Фурье

$$p(r, \varphi, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(r, \varphi, l) \exp(ikx) dl. \quad (10)$$

Далее будем предполагать, что наклон дна γ меньше c , или, используя терминологию [15], считать наклон дна докритическим (критический наклон $\gamma = c$). Однородное уравнение (7) с нулевой правой частью имеет убывающие на бесконечности действительные решения: $P(r, \varphi, l) = K_{i\mu}(lr) \cos(\mu\varphi)$, где μ — любое действительное число, $K_{i\mu}(lr)$ — функция МакДональда мнимого индекса, удовлетворяющая параметрическому модифицированному уравнению Бесселя: $K_{i\mu}(lr) = 0$, $L = r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + (\mu^2 - r^2 l^2)$. Отметим, что функция $K_{i\mu}(lr)$ — вещественна, если значения μ вещественны и аргумент lr положительный. Исходя из этого, для представления дельта функции $\delta(r-r_0)$ воспользуемся парой прямого и обратного преобразования Канторовича—Лебедева:

$$F(\mu) = \int_0^{+\infty} K_{i\mu}(x) \frac{f(x)}{x} dx, \quad f(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \text{sh}(\pi\mu) K_{i\mu}(x) F(\mu) \mu d\mu.$$

Отсюда можно получить разложение для дельта-функции (условие полноты) в виде

$$\delta(r - r_0) = \frac{2}{r\pi^2} \int_0^{+\infty} \text{sh}(\pi\mu) K_{i\mu}(lr) K_{i\mu}(lr_0) \mu d\mu. \quad (11)$$

Решение задачи (7) будем искать в виде

$$P(r, \varphi, l) = \frac{2q}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \text{sh}(\pi\mu) K_{i\mu}(lr) K_{i\mu}(lr_0) \Phi_\mu(\varphi) \mu d\mu. \quad (12)$$

с неизвестной пока функцией угловой переменной $\Phi_\mu(\varphi)$. Подстановка (11) и (12) в (7) приводит к следующей краевой задаче для определения этой функции

$$\frac{d^2 \Phi_\mu(\varphi)}{d\varphi^2} + \mu^2 \Phi_\mu(\varphi) = -\delta(r - r_0), \quad (13)$$

$$\frac{d\Phi_\mu(0)}{d\varphi} = \frac{d\Phi_\mu(\varphi_r)}{d\varphi} = 0.$$

Из (13) видно, что функция $\Phi_\mu(\varphi)$ является угловой функцией Грина и имеет следующий вид:

$$\Phi_\mu(\varphi) = -\frac{1}{\mu^2 \varphi_r} - \frac{2}{\varphi_r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\mu^2 - \mu_n^2}, \quad \mu_n = 2\pi n / \ln \left(\frac{c + \gamma}{c - \gamma} \right), \quad n \geq 1.$$

Точное решение и асимптотика отдельной волновой моды. Рассмотрим в выражении для $P(r, \varphi, l)$ из (12) отдельную волновую моду ($n \geq 1$)

$$P_n(r, \varphi, l) = -\frac{4q \cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\varphi_r \pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\text{sh}(\pi\mu) K_{i\mu}(lr) K_{i\mu}(lr_0) \mu d\mu}{\mu^2 - \mu_n^2}. \quad (14)$$

Здесь интеграл понимается в смысле главного значения. Формула (14) также пригодна и для случая $n = 0$, если в ней положить $\mu_0 = 0$, а коэффициент перед интегралом уменьшить в два раза. Рассмотрим сначала случай $r > r_0$. С целью деформирования контура интегрирования по μ в выражении (14) воспользуемся формулой: $K_\nu(t) = \pi(I_{-\nu}(t) - I_\nu(t)) / (2 \sin(\pi\mu))$, которая в данном случае при $\nu = i\mu$ для функции $K_{i\mu}(lr_0)$ приобретает вид:

$$K_{i\mu}(lr_0) = -\pi \text{Im} (I_{i\mu}(lr_0)) / \text{sh}(\pi\mu), \quad (15)$$

так как функции $I_{i\mu}(x)$ и $I_{i\mu}(-x)$ являются комплексно-сопряженными. Подынтегральная функция в (15) является четной по μ , поэтому с помощью соотношения (15) можно получить

$$P_n(r, \varphi, l) = \frac{2q \cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\pi \varphi_r} \text{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K_{i\mu}(lr) I_{i\mu}(lr_0) \mu d\mu}{\mu^2 - \mu_n^2}. \quad (16)$$

Теперь контур интегрирования в (16) можно замкнуть в нижнюю полуплоскость. Чтобы убедиться в этом, воспользуемся асимптотиками $K_{i\mu}(x)$ и $I_{i\mu}(x)$ при $\mu = -iv$, $v \rightarrow \infty$: $K_\nu(lr) \approx \sqrt{\pi / 2\nu} (2\nu / elr)^\nu$, $I_\nu(lr_0) \approx \sqrt{\pi / 2\nu} (2\nu / er_0 l)^\nu / 2\sqrt{2}$. Тогда можно получить: $K_\nu(lr) I_\nu(lr_0) \approx \pi \exp(-v(\ln r - \ln r_0)) / 4v\sqrt{2}$. Отсюда видно, что подынтегральное выражение экспоненциально мало в нижней полуплоскости при $r > r_0$. Тогда, учитывая вычеты в точках $\mu = \pm \mu_n$, имеем:

$$P_n(r, \varphi, l) = -\frac{2q \cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\varphi_r} \text{Re} (K_{i\mu_n}(lr) I_{i\mu_n}(lr_0)). \quad (17)$$

В случае $r < r_0$ представим в виде (15) уже функцию $K_{i\mu}(lr)$ и, замыкая контур интегрирования в нижнюю полуплоскость, получим выражение (17), в котором надо поменять местами r и r_0 . Полученные выражения можно объединить в одно, если обозначить $r_- = \min(r, r_0)$, $r_+ = \max(r, r_0)$

$$P_n(r, \varphi, l) = -\frac{2q \cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\varphi_r} \operatorname{Re} (K_{i\mu_n}(lr_+) I_{i\mu_n}(lr_-)).$$

Для случая $n = 0$ аналогично будем иметь

$$P_0(r, \varphi, l) = -\frac{q}{\varphi_r} \operatorname{Re} (K_0(lr_+) I_0(lr_-)).$$

Проведем теперь обратное преобразование Фурье (10) для n -ой моды ($n \geq 0$) и учтем, что установившаяся стоячая волна — четная функция по переменной x , и в результате получим: $p_n(r, \varphi, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P_n(r, \varphi, l) \cos(lx) dl$. Полученный интеграл выражается через гипергеометрическую функцию

$$p_n(r, \varphi, x) = -\frac{q \varepsilon_n \cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\sqrt{\pi r r_0} \varphi_r} \operatorname{Re} Z, \quad (18)$$

$$Z = \frac{\Gamma(i\mu_n + 1/2)}{\Gamma(i\mu_n + 1)} (\tau/2)^{i\mu_n + 1/2} F\left(\frac{i\mu_n + 1/2}{2}, \frac{i\mu_n + 3/2}{2}, i\mu_n + 1, \tau^2\right),$$

где $\Gamma(z)$ — гамма функция, $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ — гипергеометрическая функция, $\tau = 2rr_0/(r^2 + r_0^2 + x^2)$, $\varepsilon_n = 1/2$ при $n = 0$ и $\varepsilon_n = 1$ при $n \geq 1$. Полное решение получается суммированием всех мод:

$p(r, \varphi, x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(r, \varphi, x)$, где r и φ определяются из (6), а r_0 , φ_0 , φ_r — из (9). Заметим, что полю вдавли от источника возмущений, то есть большим значениям r , x соответствуют малые τ , и отдельную моду $p_n(r, \varphi, x)$ можно аппроксимировать при помощи разложения гипергеометрической функции в ряд при $0 \leq z < 1$:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!} z^2 + \dots, \quad (19)$$

где $\alpha = \frac{i\mu_n + 1/2}{2}$, $\beta = \frac{i\mu_n + 3/2}{2}$, $\gamma = i\mu_n + 1$. Однако при фиксированном z с увеличением номера моды n в разложении (19) приходится брать все большее число членов ряда (количество членов $m \approx \mu_n z$), что затрудняет расчет волновых мод с большими номерами. Имея в виду дальнейшее суммирование ряда (19), воспользуемся ВКБ асимптотикой гипергеометрической функции из (18):

$$F(\tau^2) \approx \exp\left(-\frac{i\mu_n}{2} \left(\ln \frac{\tau^2}{4} + \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{1 - \sqrt{1 - \tau^2}}\right)\right) / \sqrt[4]{1 - \tau^2}. \quad (20)$$

Далее воспользуемся асимптотикой гамма функции из (18) при больших значениях μ_n : $\frac{\Gamma(i\mu_n + 1/2)}{\Gamma(i\mu_n + 1)} \approx \exp(-i\pi/4) / \sqrt{\mu_n}$. Окончательно получаем следующее выражение для ВКБ асимптотики при больших μ_n отдельной волновой моды:

$$p_n(r, \varphi, x) \approx -\frac{q\sqrt{\tau} \cos(\varphi \mu_n) \cos(\varphi_0 \mu_n)}{\sqrt{2\mu_n \pi r r_0} \varphi_r} \cos\left(\frac{\mu_n}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \tau^2}}{1 - \sqrt{1 - \tau^2}} + \pi/4\right). \quad (21)$$

Интересно отметить, что если формально положить в разложении (19) $\mu_n \rightarrow \infty$, а в ВКБ асимптотике (20) для $F(z)$ считать, что $z \rightarrow 0$ и учесть, что $z\mu_n \approx O(1)$, то в обоих случаях получаем одинаковое значение, равное $\exp(-iz\mu_n/4)$. Таким образом, разложения (19) и ВКБ асимптотика (20) внутренне согласованы, то есть имеется область значений z , μ_n , где эти выражения совпадают. Из выражения (21) видно, что амплитуда n -ой моды при больших x , y убывает как $((x^2 + y^2)n)^{-1/2}$. Раскладывая фазу в (21) при малых значениях τ получим, что длина полуволны вдоль оси y при больших y растет как $\pi y/\mu_n$, вдоль оси x — как $\pi x/2\mu_n$. Проведенные численные расчеты для реальных параметров океана

показывают хорошее совпадение точного и асимптотического решений, за исключением непосредственной окрестности источника возмущений, где аргумент гипергеометрической функции стремится к единице, что следует из построения асимптотического решения. Отметим, что выражение (21) формально пригодно при $\mu_n \rightarrow \infty$, однако уже для первой моды $n = 1$ асимптотики (21) качественно верно описывает точные решения. Асимптотику нулевой моды можно вычислить, используя (18), и полагая $\mu_n = 0$. Тогда с учетом: $F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, \tau^2\right) = \frac{2}{\pi\sqrt{1+\tau}} K\left(\frac{2\tau}{1+\tau}\right)$, где $K(x) = \int_0^{\pi/2} (1 - (x \sin \varphi)^2)^{-1/2} d\varphi$ — эллиптический интеграл первого рода, можно получить следующее выражение:

$$p_0(r, \varphi, x) \approx -\frac{q\sqrt{\tau}}{\pi\sqrt{1+\tau}\sqrt{2r}r_0\varphi_r} K\left(\frac{2\tau}{1+\tau}\right).$$

Далее, используя асимптотику $K(x)$ при $x \rightarrow 1$, главный член которой имеет вид: $K(x) \approx \ln 4 - \ln(1-x)/2$, окончательно получаем выражение для асимптотики нулевой моды:

$$p_0(r, \varphi, x) \approx -\frac{q\sqrt{\tau}}{\pi\sqrt{1+\tau}\sqrt{2r}r_0\varphi_r} \left(\ln 4 - \ln\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right) \right) / 2. \quad (22)$$

Отметим, что полное совпадение точного и асимптотического решений имеет место в окрестности источника возмущений, и существует некоторое отличие вдали от него. Это связано с тем, что асимптотика эллиптического интеграла хорошо работает при стремлении аргумента к единице. Тем не менее, в дальней зоне асимптотика качественно верно описывает точное решение, с погрешностью, не превышающей нескольких процентов.

Полное поле внутренних гравитационных волн. Полученные асимптотические представления решений для отдельных волновых мод, включая нулевую, дают возможность перейти

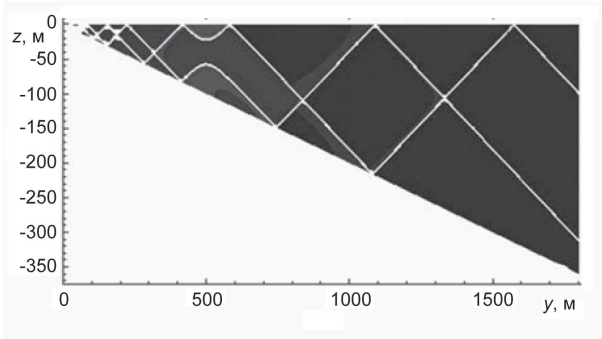


Рис. 1. Полное волновое поле в плоскости (y, z) .

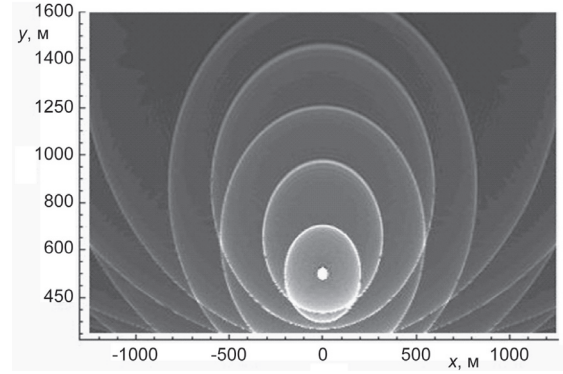


Рис. 2. Полное волновое поле в плоскости (x, y) .

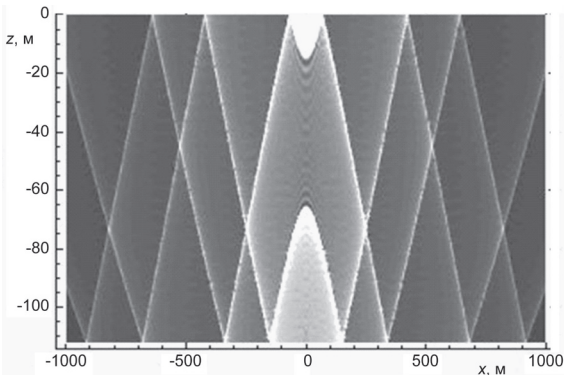


Рис. 3. Полное волновое поле в плоскости (x, z) .

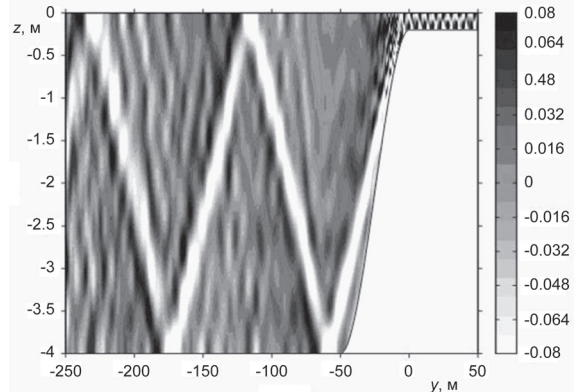


Рис. 4. Численное моделирование динамики внутренних волн в стратифицированной среде переменной глубины: амплитуда вектора скорости, м/с.

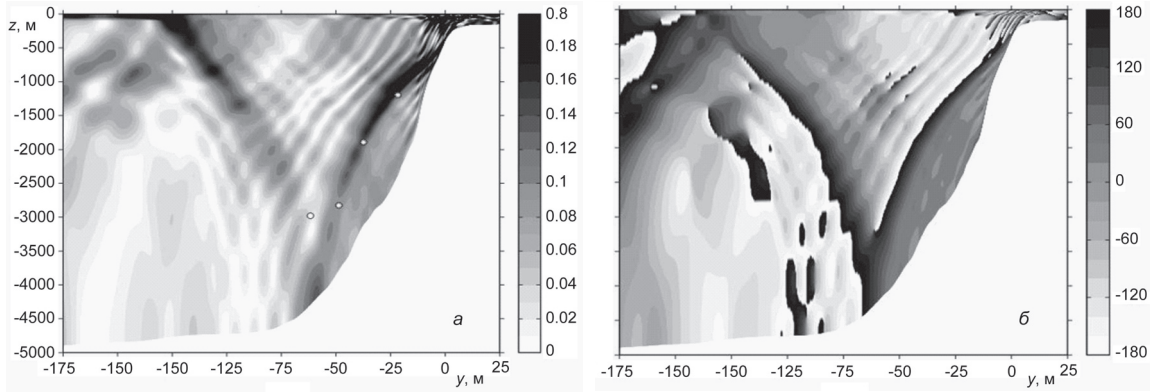


Рис. 5. Внутренние приливные волны на шельфе Бискайского залива.
а - амплитуда вектора скорости (м/с); б - фаза вектора скорости (градусы).

к вычислению полного волнового поля. Сумма асимптотик (21) бесконечного числа волновых мод ($n = 1, 2, \dots$) выражается через полулогарифмическую функцию:

$$Li_{1/2}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}, \quad B_{\pm}^{\pm} = \exp(i\pi(\pm\varphi \pm \varphi_0 + A(\tau))/\varphi_r), \quad A(\tau) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - \tau^2}}{1 + \sqrt{1 - \tau^2}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(r, \varphi, x) = -\frac{q\sqrt{\tau} \exp(-i\pi/4)}{8\pi^4 \sqrt{1 - \tau^2} \sqrt{rr_0} \varphi_r} (Li_{1/2}(B_+^+) + Li_{1/2}(B_-^+) + Li_{1/2}(B_+^-) + Li_{1/2}(B_-^-)). \quad (23)$$

Полное волновое поле есть действительная часть выражения (23) и нулевой моды (22). Полулогарифмическая функция в (23) обращается в бесконечность в точках, где выполнено условие: $\pi(\pm\varphi \pm \varphi_0 + A(\tau))/\varphi_r = 2\pi m$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Геометрическое место точек (x, y, z) , удовлетворяющих этому условию, определяет систему лучей при фиксированной одной переменной. В плоскостях (y, z) и (x, z) эти решения определяют пару восходящих от источника лучей и пару нисходящих лучей с последующим их отражением от наклонного дна.

На рис. 1 изображена теневая картина полного волнового поля (линии уровня) в плоскости (y, z) при $x = 40$ м, остальные параметры расчетов характерны для реальных океанических задач: $N = 0.001 \text{ с}^{-1}$, $\omega = 0.004 \text{ с}^{-1}$, $\gamma = 0.2$, $c = 0.44$, $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $Q = 1600 \text{ м}^3/\text{с}$, $y_0 = 500$ м, $z_0 = -4$ м. Из представленных результатов отчетливо видна лучевая структура построенных решений, в частности, совокупность падающих и отраженных лучей, и кроме того, котангенс угла наклона лучей к вертикали примерно равен 0.44 в полном соответствии с лучевой теорией. Действительно, согласно этой теории направление групповой скорости Θ и направление распространения энергии определяется из равенства: $\text{ctg}^2 \Theta = c^2 = \omega^2 / (N^2 - \omega^2)^2$ [6—8]. Сингулярность решения на лучах обусловлена использованной моделью идеальной среды. Основной вклад в сингулярность дает бесконечное число коротковолновых мод с большими номерами. В реальности для получения полного волнового поля надо учитывать конечное число мод, и это число приближенно определяется характерным масштабом Стокса $D = \sqrt{2\nu_0 / N}$, где ν_0 — кинематическая вязкость; N — частота Брента—Вейселя. Очевидно, что волновые моды с большими номерами, длина волны которых меньше D , вклада в решение не дают.

На рис. 2 изображена теневая картина суммы 50 волновых мод в плоскости при $z = -50$ м, где видна, в частности, картина отражения линий постоянной фазы $2\pi k$, $k = 1, 2, \dots$ от линии дна $z = -50$ м, $y = -z/\gamma = 250$ м. На рис. 3 изображена теневая картина суммы 50 волновых мод в плоскости (x, z) при $y = 560$ м.

Для сравнения с полученными аналитическими результатами на рис. 4 представлены результаты численного моделирования полной системы уравнений гидродинамики, описывающей эволюцию нелинейных волновых возмущений над неровным океаническим дном (Бискайский залив, суммировалось более 60 волновых мод) [11—13]. Как видно из представленных результатов, четко идентифицируется лучевая структура решения (рис. 1—3), и, как показывают оценки, амплитудно-фазовая структура волновых полей достаточно хорошо описывается асимптотическими формулами (22)—(23).

На рис. 5 представлены результаты натурных измерений амплитудной и фазовых структур приливных внутренних гравитационных волн в этом же регионе Мирового океана [11—13]. Полученные натурные данные также показывают, что, действительно, полученные волновые картины с ярко выраженной лучевой структурой могут наблюдаться в условиях реального океана, особенно при исследовании эволюции пакетов внутренних гравитационных волн над неровным дном. В частности аналитические, численные и натурные данные показывают, что ширина волновых пучков уменьшается при приближении к берегу. Формально, в линейной постановке, ширина отраженного пучка внутренних волн может стать сколь угодно малой при соответствующих соотношениях параметров среды (стратификация, угол наклона дна). То есть происходит существенная локальная интенсификация волн вблизи берега. Однако, очевидно, что в реальных природных стратифицированных средах (океан, атмосфера), энергия волнового поля остается в таких пространственных областях конечной — включаются нелинейные механизмы диссипации и турбулентного перемешивания [1—5].

В качестве основных результатов, полученных в данной работе, необходимо отметить, что, во-первых, все построенные с использованием преобразования Канторовича—Лебедева решения являются точными, и, во-вторых, характерные лучевые картины волновых полей внутренних гравитационных волн в слое стратифицированной среды переменной глубины получены без использования математического аппарата геометрической оптики.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00466).

Литература

1. Miropol'skii Yu. Z., Shishkina O. V. Dynamics of internal gravity waves in the ocean. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2001. 421 p.
2. Габов С. А. Новые задачи математической теории волн. М.: Наука, 1998. 448 с.
3. Pedlosky J. Waves in the ocean and atmosphere: introduction to wave dynamics. Berlin–Heidelberg: Springer, 2010. 260 p.
4. Коняев К. В., Сабинин К. Д. Волны внутри океана. СПб.: Гидрометеиздат, 1992. 272 с.
5. Sutherland B. R. Internal gravity waves. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 394 p.
6. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
7. Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V. Wave dynamics of stratified mediums. М.: Наука, 2012. 584 с.
8. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Волновые движения стратифицированных сред: теория и приложения. Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2012. 577 с.
9. Поверхностные и внутренние волны в арктических морях / Под ред. И. В. Лавренова, Е. Г. Морозова. СПб.: Гидрометеиздат, 2002.
10. Morozov E. G. Internal tides. Global field of internal tides and mixing caused by internal tides // Waves in geophysical fluids / Eds. by J. Grue, K. Trulsen. Springer Wein NY, 2006. P. 271—332.
11. Abdilghanie A. M., Diamessis P. J. The internal gravity wave field emitted by a stably stratified turbulent wake // Journal of Fluid Mechanics. 2013. V. 720. P. 104—139.
12. Mauge R., Gerkema T. Generation of weakly nonlinear nonhydrostatic internal tides over large topography: a multi-modal approach // Nonlinear Processes Geophysics. 2008. V. 15. P. 233—244.
13. Rees T., Lamb K. G., Poulin F. J. Asymptotic analysis of the forces internal gravity waves equation // SIAM Journal of Applied Mathematics. 2012. V. 72(4). P. 1041—1060.
14. Булатов В. В., Владимиров Ю. В. Дальние поля внутренних гравитационных волн в неоднородных и нестационарных стратифицированных средах // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2013. Т. 6, № 2. С. 55—70.
15. Bulatov V. V., Vladimirov Yu. V. Wave dynamics of stratified mediums with variable depth: exact solutions and asymptotic representations // IUTAM Procedia. 2013. V. 8. P. 229—237.
16. Grue J., Sveen J. K. A scaling law of internal run-up duration // Ocean Dynamics. 2010. V. 60. P. 993—1006.
17. Морозов Е. Г., Марченко А. В. Короткопериодные внутренние волны в Арктическом фиорде (Шпицберген) // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48, № 4. С. 453—460.
18. Писарев С. В. Низкочастотные внутренние волны у кромок шельфа Арктического бассейна // Океанология. 1996. Т. 36, № 6. С. 819—826.
19. Yang-Yih Chen, Chen G. Y., Chia-Hao Lin, Chiu-Long Chou. Progressive waves in real fluids over a rigid permeable bottom // Coastal Engineering Journal. 2010. V. 52(1). P. 17—42.
20. Hsu M. K., Liu A. K., Liu C. A study of internal waves in the China Seas and Yellow Sea using SAR // Continental Shelf Research. 2000. V. 20. P. 389—410.
21. Grue J., Jensen A. Orbital velocity and breaking in steep random gravity waves // Journal of Geophysical Research. 2012. V. 117. P. C07—C013.

Статья поступила 16.03.2015 г.