

УДК 535.361

© Д. Г. Турлаев

Институт прикладной физики РАН, г. Нижний Новгород

dimkat@hotmail.ru

НАХОЖДЕНИЕ ВЕКТОРА УКЛОНОВ ВЗВОЛНОВАННОЙ ВОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО ЕЕ ИЗОБРАЖЕНИЮ ПРИ КВАЗИНАДИРНОМ НАБЛЮДЕНИИ

Предложен новый способ восстановления уклонов взволнованной водной поверхности по ее изображению, полученному в условиях естественного освещения при ясном, безоблачном небе. Традиционный способ использует приближение, в рамках которого распределение яркости неба в пределах кадра может считаться линейным. Новый способ использует более реалистичное приближение, в рамках которого распределение яркости неба не является линейным, но обладает аксиальной симметрией относительно направления на Солнце. Для реализации любого из выше указанных способов кроме изображения водной поверхности необходимо знать распределение яркости неба на «зеркальном» участке небосвода. Важной частью нового алгоритма является операция восстановления второй компоненты вектора уклона поверхности по той его компоненте, которая непосредственно определяется путем пространственной обработки изображения. С математической точки зрения данная операция — не что иное, как задача нахождения градиента гладкой функции двух переменных по одной из его компонент. В представляемой работе эта задача решается при помощи преобразования Фурье. Приводится усовершенствованная (с точки зрения скорости вычислений) версия алгоритма и формула для вычисления погрешности.

Ключевые слова: наблюдение подводных объектов с воздуха, гидрооптика, взволнованная водная поверхность, изображение.

D. G. Turlaev

Institute of applied physics Russian Academy of sciences, Nizhniy Novgorod

dimkat@hotmail.ru

RETRIEVAL OF THE VECTOR OF WATER SURFACE SLOPES BY USE OF IT'S IMAGE UNDER QUASI-NADIR OBSERVATION

A new method for retrieving the slopes of a rough water surface from its imaging under the conditions of daylight illumination and clear cloudless sky is proposed. The traditional method uses the approximation, within the framework of which the distribution of the sky radiance can be considered linear. The new method uses more realistic approximation, in which the distribution of the sky radiance is not linear but has an axial symmetry with respect to the Sun direction. To implement any of these methods, one should not only image the water surface but also know the distribution of the sky radiance in the "mirror" area of the celestial sphere. An important part of the new algorithm is the operation of retrieving the second component of the surface slope vector by the component directly determined by spatial image processing. Mathematically, this operation is nothing but a problem of finding the gradient of a smooth function of two variables by one of its components. In this paper, this problem is solved by means of the Fourier transform. An improved (from the viewpoint of the computing speed) version of the algorithm and a formula for calculating the error are given.

Key words: observation of underwater objects from air, hydrooptics, rough sea surface, imaging.

Как было показано в работах [1—6] искажения изображения морского дна или подводного объекта, возникающие в результате преломления света на взволнованной поверхности моря (рефракционные искажения), могут быть частично или полностью устранены путем соответствующей обработки этого изображения с использованием информации о рельефе морской поверхности.

Известны два различных способа решения данной задачи. Способ, исследованный в работах [5—7], основывается на выделении неискаженных фрагментов в ансамбле случайных реализаций изображения объекта и формировании его регулярного изображения путем сложения этих фрагментов. Для нахождения неискаженных фрагментов изображения используются данные о положении бликов на водной поверхности. В работах [1, 3] были предложены алгоритмы восстановления правильного изображения объекта по одной реализации его искаженного изображения. Для коррекции изображения объекта предполагалось использовать информацию об уклонах водной поверхности, которая содержится в изображении поверхности при ее наблюдении в отраженном свете неба. В связи с этим представляется важным исследовать возможность получения информации о состоянии водной поверхности в момент наблюдения.

Распределение уклонов водной поверхности можно попытаться определить по ее фотографии, используя фотосъемку в ближнем ИК-диапазоне под углами, близкими к надиру. Сильное поглощение водным слоем в ближнем ИК-диапазоне позволит выделить изображение самой поверхности. Наблюдение под углами близкими к надиру при относительно слабом волнении позволит не учитывать зависимость коэффициента отражения света от воды ни от уклонов поверхности, ни от направления визирования. Кроме того, при наблюдении в ближнем ИК-диапазоне сигнал обратного рассеяния от толщи воды и от плавающих под поверхностью диффузно рассеивающих объектов практически отсутствует. Следовательно, отражение света от водной поверхности в указанных условиях можно считать зеркальным.

Полагаем, что в отсутствие волнения границей раздела вода–воздух служит плоскость $z = 0$. Положение точки на этой плоскости характеризуем вектором (x, y) , а «мгновенный» рельеф взволнованной поверхности воды — функцией возвышений $z = \zeta(x, y)$ или вектором уклонов $\eta(x, y) = -\nabla \zeta(x, y)$. Наблюдаемую яркость неба обозначим через I^{sky} , а видимую яркость элемента поверхности I^R . Направление на Солнце характеризует единичный вектор $\mathbf{S}$ (рис. 1).

Фотодетектор расположен на высоте H над средним уровнем водной поверхности. Единичный вектор $\mathbf{n}_0(x, y)$ характеризует направление визирования при наблюдении взволнованной поверхности с воздуха. Единичный вектор $\mathbf{n}$ характеризует направление на участок неба, яркость от которого попадает на фотодетектор с направления $(-\mathbf{n}_0)$. Это направление на «зеркальный» участок небосвода. Единичную нормаль к водной поверхности обозначим через вектор $\mathbf{N}$.

Информацию об уклонах участка водной поверхности предполагается получать с помощью фотокамеры, регистрирующей отраженный поверхностью свет неба, т. е. извлекать ее из изображения поверхностных волн вне зоны солнечных бликов. Решение этой задачи требует знания распределения яркости на «зеркальном» участке небосвода.

Если Солнце находится вблизи «зеркального» участка неба, то в поле зрения будут попадать солнечные блики. Если вблизи «зеркального» участка неба расположена солярная точка, то связь между уклонами поверхности и ее яркостью будет неоднозначной. Следовательно, при наблюдении в направлении вблизи надира оптимальные условия для восстановления профиля поверхности реализуются при умеренных угловых высотах Солнца и безоблачном «зеркальном» участке небосвода.

Видимая яркость элемента поверхности $I^R(\mathbf{n}_0(x, y), \eta(x, y))$ связана с распределением яркости неба $I^{sky}(\mathbf{n}(\mathbf{n}_0, \eta))$ при помощи соотношения:

$$I^R(-\mathbf{n}_0, \eta) = R \cdot I^{sky}(\mathbf{n}(\mathbf{n}_0, \eta)), \quad (1)$$

где R — коэффициент отражения. Векторы $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{n}$ связаны соотношением:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 - 2\mathbf{N}(\mathbf{n}_0, \mathbf{N}), \quad \mathbf{N} = \frac{(\eta_x, \eta_y, 1)}{\sqrt{1 + \eta^2}}. \quad (2)$$

В отсутствие волнения $\mathbf{n}_\perp = \mathbf{n}_{0\perp}$, $n_z = -n_{0z}$.

Традиционный подход при определении уклонов. Традиционный подход позволяет найти компоненту вектора уклонов, коллинеарную градиенту яркости неба. Ее нахождение осуществляется

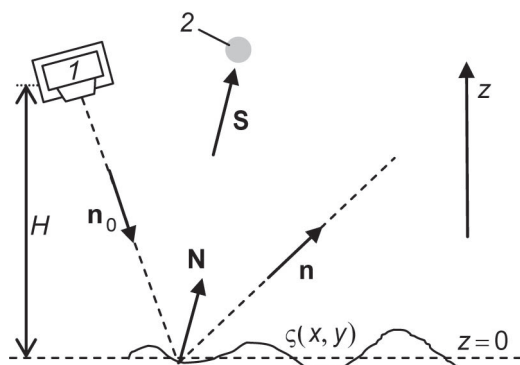


Рис. 1 Схема наблюдения.

1 — фотодетектор, 2 — положение Солнца.

в предположении, что распределение яркости неба в пределах кадра может считаться линейным. Обоснованием такого предположения является соображение, что видимая яркость элемента поверхности I^R в отсутствие волнения является медленной функцией направления визирования. Следовательно, при наличии волнения, используя приближение малых уклонов $|\eta| \ll 1$, ее можно представить в виде ряда Тейлора по уклонам волн:

$$I^R = I^R|_{\eta=0} + \left(\eta, \nabla_{\eta} I^R|_{\eta=0} \right) + \dots, \quad (3)$$

где $I^R|_{\eta=0}$ — яркость элемента поверхности в отсутствие волн. Согласно [8] в указанном ряде можно оставить постоянный и линейный по η члены, а членами более высокого порядка пренебречь. В результате, с учетом (1) получим:

$$I^R = RI^{sky}(\mathbf{n}(\mathbf{n}_0, \eta=0)) + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta_x} [RI^{sky}(\mathbf{n}(\mathbf{n}_0, \eta=0))] + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta_y} [RI^{sky}(\mathbf{n}(\mathbf{n}_0, \eta=0))] + \dots \quad (4)$$

При слабом волнении и наблюдении водной поверхности под углами вблизи надира коэффициент отражения R можно считать не зависящим от уклонов. Следовательно, его можно вынести из-под знака дифференцирования. Учитывая, что вектор $\mathbf{n}$, будучи единичным, содержит лишь две независимые компоненты — n_x и n_y , соотношение (4) после несложных вычислений преобразуется в:

$$I^R = RI^{sky}(\mathbf{n}(\mathbf{n}_0, \eta=0)) + R\eta_x \left(-2n_{0z} \frac{\partial I^{sky}}{\partial n_x} \right) + R\eta_y \left(-2n_{0z} \frac{\partial I^{sky}}{\partial n_y} \right). \quad (5)$$

С учетом того, что наблюдение ведется под углами, близкими к надиру ($|n_{0x}|, |n_{0y}| \ll |n_{0z}| \approx 1$), соотношение (5) переписывается в виде:

$$I^R = RI^{sky}(\mathbf{n}(\mathbf{n}_0, \eta=0)) - 2R\eta_x \frac{\partial I^{sky}}{\partial n_x} - 2R\eta_y \frac{\partial I^{sky}}{\partial n_y} = RI^{sky}(\mathbf{n}(\mathbf{n}_0, \eta=0)) - 2R\eta \nabla_{\mathbf{n}} I^{sky}. \quad (6)$$

В правой части формулы (6) стоит градиент яркости неба по угловым переменным n_x и n_y . До сих пор направление осей x и y предполагалось произвольным (хотя и взаимно ортогональным). Направив ось x в направлении проекции градиента яркости неба на плоскость $z=0$, получим:

$$I^R = RI^{sky}(\mathbf{n}(\mathbf{n}_0, \eta=0)) - 2R\eta_x \frac{\partial I^{sky}}{\partial n_x}. \quad (7)$$

Для практических целей удобнее использовать в качестве переменных (x, y) , а не (n_x, n_y) . Если высота наблюдателя над водной поверхностью намного больше характерного размера кадра, то $x \approx Hn_x$, $y \approx Hn_y$ и соотношение (7) переписывается в виде $I^R = RI^{sky}(\mathbf{n}(\mathbf{n}_0, \eta=0)) - 2HR\eta_x \frac{\partial I^{sky}}{\partial x}$.

Учитывая, что $RI^{sky}(\mathbf{n}(\mathbf{n}_0, \eta=0))$ — изображение водной поверхности в отсутствие волнения, а $R \frac{\partial I^{sky}}{\partial x}$ — его производная по x , получим окончательную формулу для нахождения уклонов в направлении градиента яркости неба:

$$\eta_x(x, y) = \frac{I_H^R(x, y) - I_B^R(x, y)}{2H \frac{\partial I_H^R(x, y)}{\partial x}}. \quad (8)$$

Здесь $I_H^R(x, y)$ — изображение водной поверхности в отсутствие волнения, $I_B^R(x, y)$ — изображение водной поверхности при наличии волнения. Наличие солярной точки на «зеркальном» участке небосвода приводит к обращению знаменателя в выражении (8) в ноль. Для нахождения $\eta_y(x, y)$ можно воспользоваться алгоритмом, описанным далее.

Новый подход при определении уклонов. Новый подход позволяет рассмотреть более реалистичное приближение, в рамках которого распределение яркости неба не предполагается линейным, но обладает аксиальной симметрией относительно направления на Солнце. Как и в традиционном подходе, результатом является нахождение одной из компонент вектора уклонов, осуществляемое, в общем случае, в криволинейной системе координат.

Аксиальная симметрия относительно направления на Солнце позволяет рассматривать распределение яркости неба как функцию одной переменной: $I^{sky}[\mathbf{n}] = I^{sky}[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S})]$, где $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S})$ — скалярное произведение векторов, характеризующих направление на участок неба и на Солнце. В условиях, когда вблизи «зеркального» участка неба не содержится солярной точки, функцию $I^{sky}[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S})]$, как функцию аргумента $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S})$ можно считать монотонной. Для монотонной функции одной переменной возможно однозначное нахождение обратной функции.

Итак, используя распределение яркости неба, либо изображение неба, отраженного в ровной водной поверхности, можно получить функцию $(I^{sky})^{-1}$, обратную к I^{sky} . Применив $(I^{sky})^{-1}$ к соотношению (1), и, учитывая, что коэффициент отражения R можно считать не зависящим от уклонов, получим соотношение

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) = (I^{sky})^{-1}[I^R(-\mathbf{n}_0)], \quad (9)$$

в правую часть которого входит видимая яркость элемента водной поверхности I^R , а в левую часть выражение, содержащее в неявной форме вектор уклонов η . Расписав левую часть (9) согласно (2) и введя для удобства обозначение $\alpha(x, y) = (I^{sky})^{-1}[I^R(-\mathbf{n}_0)] - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S})$, перепишем соотношение (9) в виде:

$$-2(\mathbf{N}, \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{n}_0, \mathbf{N}) = \alpha(x, y). \quad (10)$$

В случае если $(I^{sky})^{-1}$ находится по изображению неба, отраженного в ровной водной поверхности, в выражение для $\alpha(x, y)$ войдет дополнительный член: $\alpha(x, y) = (I^{sky})^{-1}[I^R(-\mathbf{n}_0)] - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) - 2n_{0z}S_z$.

В соотношение (10) подставим выражение (2), связывающее $\mathbf{N}$ и η , и, пренебрегая квадратичными по η членами, получим:

$$-2[\eta_x(S_x n_{0z} + S_z n_{0x}) + \eta_y(S_y n_{0z} + S_z n_{0y})] = \alpha(x, y). \quad (11)$$

Если в (11) пренебречь n_{0x} и n_{0y} , по сравнению с n_{0z} , то есть пренебречь отклонением направления визирования от надира (при условии, что Солнце не находится вблизи зенита), то уравнение (11) примет вид:

$$-2n_{0z}(\eta \cdot \mathbf{S}) = \alpha(x, y).$$

Выбрав ось x в направлении на Солнце, запишем выражение, аналогичное (8), для уклонов в направлении градиента яркости неба:

$$\eta_x = -\frac{\alpha(x, y)}{2n_{0z}S_x}. \quad (12)$$

Для нахождения η_y можно воспользоваться алгоритмом, описанным далее.

Выражение (11) может быть использовано для нахождения уклонов и без учета дополнительных приближений. В левую часть уравнения входят константы S_x, S_y, S_z , а также функции переменных (x, y) :

$$n_{0x} = \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2}}, \quad n_{0y} = \frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2}}, \quad n_{0z} = \frac{-H}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2}},$$

где координаты (x_0, y_0, H) характеризуют положение фотоприемника.

Умножив левую и правую части уравнения (11) на $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2}$ и, введя обозначение $\alpha_1(x, y) = -\frac{1}{2}\alpha(x, y) \times \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + H^2}$, получим:

$$\eta_x(-S_x H + S_z(x - x_0)) + \eta_y(-S_y H + S_z(y - y_0)) = \alpha_1(x, y). \quad (13)$$

В уравнении (13) перейдем к переменным (u, v) :

$$\begin{cases} v = x, \\ u = \frac{S_z x - S_z x_0 - S_x H}{S_z y - S_z y_0 - S_y H}, \end{cases} \begin{cases} x = v, \\ y = y_0 + \frac{S_y}{S_z} H + \frac{S_z v - S_z x_0 - S_x H}{S_z \cdot u}. \end{cases}$$

Знаменатель в выражении для u не обратиться в ноль при выборе соответствующих условий наблюдения. В новых переменных уравнение (13) будет иметь вид (напомним, что $\eta(x, y) = -\nabla\zeta(x, y)$): $\eta_v \cdot (S_z v - S_z x_0 - S_x H) = \alpha_1(x(v), y(u, v))$, откуда

$$\eta_v = -\frac{\alpha_1(x(v), y(u, v))}{(S_z v - S_z x_0 - S_x H)}. \quad (14)$$

Соотношение (14) является аналогом (8) и (12). После нахождения η_u (алгоритм нахождения описан далее) следует перейти к координатам (x, y) :

$$\begin{cases} \eta_x = -\eta_v - \eta_u \frac{S_z}{S_z y - S_z y_0 - S_y H}, \\ \eta_y = S_z \eta_u \frac{S_z x - S_z x_0 - S_x H}{(S_z y - S_z y_0 - S_y H)^2}. \end{cases}$$

Преимуществом данного метода является большая реалистичность по сравнению с классическим методом. Недостаток же заключается в сравнительно большом объеме численных расчетов, необходимых для реализации.

Нахождение градиента гладкой функции двух переменных по одной из его компонент.

Полагаем, что на конечном промежутке $[a, b] \times [c, d]$ задана гладкая функция двух переменных

$$f_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}. \text{ На том же промежутке требуется вычислить } f_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$

Для того чтобы найти f_y естественно проинтегрировать f_x по координате x : $f(x, y) = \int_a^x f_t(t, y) dt + f(a, y)$ и продифференцировать по y , и, таким образом, использовать $\hat{f}_y(x, y) = \int_a^x \frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial t \partial y} dt = \int_a^x \frac{\partial f_t(t, y)}{\partial y} dt$ в качестве первого приближения к f_y . Точное же выражение для f_y записывается в виде:

$$f_y = \hat{f}_y + \frac{\partial f(a, y)}{\partial y}, \quad (15)$$

где $\frac{\partial f(a, y)}{\partial y}$ — неизвестная функция переменной y . Эта функция имеет очевидное, но важное для излагаемого метода свойство: она не зависит от координаты x . Пользуясь указанной особенностью, а также свойствами преобразования Фурье можно построить следующее приближение к f_y (в дальнейшем всюду, где будет идти речь о преобразовании Фурье, Фурье-образе, Фурье-спектре, обратном преобразовании Фурье, а также дискретном преобразовании Фурье будет подразумеваться преобразование по координате x , если не объявлено иначе). Для этого нужно выполнить преобразование Фурье над $\hat{f}_y$, модифицировать полученный Фурье-образ, положив нулевую гармонику равной нулю, после чего выполнить обратное преобразование Фурье. В результате получим функцию $f_y^{new}(x, y)$, которая и является искомым приближением f_y .

Для того, чтобы выяснить преимущество спектральной фильтрации такого типа, применим преобразование Фурье к выражению (15). В правой части (15) функция $\frac{\partial f(a, y)}{\partial y}$ не зависит от x . Следовательно, после выполнения преобразования Фурье, она даст вклад только в нулевую гармонику. Это означает, что различие между Фурье-образом f_y и Фурье-образом $\hat{f}_y$ заключено только лишь в нулевой гармонике. Модифицируя ее тем или иным способом и выполняя обратное преобразование Фурье можно получать различные приближения к f_y .

В свете вышесказанного, возникают два важных вопроса:

1) функция $\frac{\partial f(a, y)}{\partial y}$ дает вклад только в нулевую гармонику при условии, что преобразование Фурье осуществляется непрерывно и над всей действительной осью. Что измениться

в случае дискретного преобразования Фурье (ДПФ), выполняемого над ограниченной областью (над промежутком $[a, b] \times [c, d]$)?

2) какова погрешность $\varepsilon(y) = f_y(x, y) - f_y^{new}(x, y)$, возникающая при приближенной замене f_y на $f_y^{new}(x, y)$?

На оба вопроса несложно получить ответ, введя в рассмотрение ДПФ. Согласно [9]: пусть $h(x)$ — непрерывная функция аргумента x , заданная в N равноудаленных точках, $h_k = h(x_k)$, $k = 0..N-1$ так, что расстояние между двумя соседними точками намного меньше характерного масштаба изменения $h(x)$. Тогда последовательность $H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \cdot e^{\frac{2\pi i \cdot k \cdot n}{N}}$, состоящая из N точек ($n = -N/2..N/2$) называется ДПФ, а $h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \cdot e^{-\frac{2\pi i \cdot k \cdot n}{N}}$ — обратным ДПФ.

Легко показать, что Фурье-образы $f_y(x_k, y)$ и $f_y^{new}(x_k, y)$ отличаются только для нулевой гармоники и в случае дискретного преобразования Фурье. Действительно, выполним ДПФ от (15):

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left[f_y(x_k, y) \cdot e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \right] = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\hat{f}_y(x_k, y) \cdot e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \right] + f_y(a, y) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i k n}{N}}.$$

В данном выражении множителем $f_y(a, y)$ является сумма геометрической прогрессии:

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i \cdot k \cdot n}{N}} = \frac{e^{\frac{2\pi i \cdot n \cdot N}{N}} - 1}{e^{\frac{2\pi i \cdot n}{N}} - 1} = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ N, & n = 0 \end{cases}, \text{ если}$$

откуда и следует искомое утверждение.

Обозначим ДПФ от $f_y(x_k, y)$ как $F_n(y)$: $F_n(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[f_y(x_k, y) \cdot e^{\frac{2\pi i \cdot k \cdot n}{N}} \right]$. Для нахождения погрешности $\varepsilon(y) = f_y(x, y) - f_y^{new}(x, y)$ достаточно вычислить, к чему приводит замена нулевой гармоники на ноль в выражении для $F_n(y)$:

$$f_y^{new}(x_k, y) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (F_n(y) - F_{n=0}(y) \cdot \delta_{0n}) \cdot e^{\frac{2\pi i \cdot k \cdot n}{N}} = f_y(x_k, y) - F_{n=0}(y) \cdot \frac{1}{N}.$$

Согласно правилам ДПФ, $F_{n=0}(k, y) \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f_y(x_k, y) \approx \frac{\int_a^b f_y(x, y) dx}{b-a}$ (последнее при-

ближенное равенство справедливо в случае, когда интегрирование выполняется по формуле прямоугольников). Окончательно:

$$\varepsilon(y) = f_y(x, y) - f_y^{new}(x, y) \approx \frac{\int_a^b f_y(x, y) dx}{b-a}.$$

Полученный результат справедлив в применении к любой достаточно гладкой функции $f(x, y)$.

В применении к нахождению вектора уклонов водной поверхности $(\eta(x, y) = -\nabla \zeta(x, y) = (\eta_x, \eta_y))$ по одной из его компонент алгоритм вычисления η_y по известной η_x будет следующим:

1) вычисляется $\hat{\eta}_y(x, y) = \int_a^x \frac{\partial \eta_t(t, y)}{\partial y} dt$;

2) находится Фурье-образ $\hat{\eta}_y(x, y)$: $F_n(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\hat{\eta}_y(x_k, y) \cdot e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \right]$;

3) полученный Фурье-образ модифицируется с обращением нулевой гармоники в ноль:

$$F_n^{new}(y) = \begin{cases} F_n(y), & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases};$$

4) над модифицированным Фурье-образом выполняется обратное преобразование Фурье:

$$\eta_y^{new}(x_k, y) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[F_n^{new}(y) \cdot e^{\frac{2\pi i k n}{N}} \right].$$

Погрешность $\varepsilon(y)$ описывается формулой:

$$\varepsilon(y) = \eta_y(x, y) - \eta_y^{new}(x, y) \approx \frac{\int_a^b \eta_y(x, y) dx}{b-a}. \quad (16)$$

В выражение для погрешности входит неизвестная, вообще говоря, функция η_y . Тем не менее, поскольку распределение уклонов водной поверхности обладает некоторыми специфическими свойствами, оценка точности (16) может быть весьма полезной.

1) Во-первых, при наличии волн, распространяющихся вдоль оси y (перпендикулярно градиенту яркости неба), предложенный алгоритм не позволяет восстанавливать их уклоны. Для доказательства достаточно выбрать $\eta_y(x, y)$ в форме $\eta_y(x, y) = g(x, y) + q(y)$, где $q(y)$ характеризует волну, распространяющуюся вдоль y , и подставить в (16).

2) Во-вторых, выражение для $\varepsilon(y)$ описывает среднее значение $\eta_y(x, y)$ по оси x на отрезке $[a, b]$, которое, за исключением случая, описанного в пункте 1), можно сделать сколь угодно малым путем увеличения $[a, b]$.

Следовательно, предложенный алгоритм не позволяет восстанавливать уклоны волн, распространяющихся перпендикулярно оси y . Для волн, бегущих в других направлениях погрешность в определении уклонов можно сделать сколь угодно малой путем увеличения области $[a, b]$.

Для иллюстрации работы алгоритма приведены результаты численного моделирования (рис. 2). Взмолнованная водная поверхность представлялась в виде суперпозиции плоских волн с различными частотами w_n , волновыми числами k_n , азимутальными углами φ_m волнового вектора и случайными фазами Ψ_{nm} , распределенными равномерно в интервале от 0 до 2π [10]:

$$\zeta(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_n \cdot \cos(w_n t + k_n \mathbf{r} + \Psi_{nm}) \cdot \Phi_{nm}(w_n, \varphi_m),$$

где вектор $\mathbf{r} = (x, y)$.

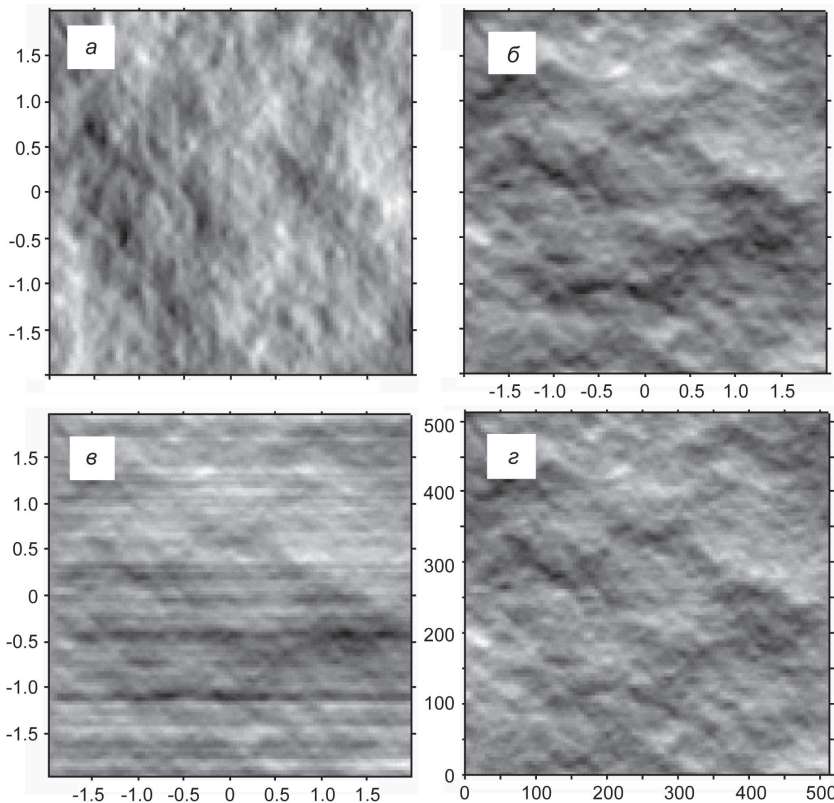


Рис. 2. Иллюстрация работы алгоритма спектральной фильтрации на примере случайного распределения уклонов. a — входные данные: распределение $\eta_x(x, y)$; $б$ — контрольные данные: распределение $\eta_y(x, y)$; $в$ — функция $\hat{\eta}_y(x, y)$, полученная на основе $\eta_x(x, y)$ без применения спектральной фильтрации; $г$ — результат применения алгоритма к $\eta_x(x, y)$, изображенного на рис. 2, a .

В моделировании использовались гравитационно-капиллярные волны с длинами от 2 см до 23 м с шагом 2 см, возникающие при скорости ветра 5 м/с. Размер моделируемой области 4×4 м, размер сетки 400×400 , то есть, размер одного элемента поверхности составил 1×1 см. Преобразование Фурье осуществлялось на сетке 512×512 .

В качестве входных данных использовалось смоделированное распределение $\eta_x(x, y) = -\frac{\partial \zeta(x, y)}{\partial x}$ (рис. 2, а). В качестве контрольных данных — смоделированное распределение $\eta_y(x, y) = -\frac{\partial \zeta(x, y)}{\partial y}$ (рис. 2, б). На рис. 2, в приведено распределение первого приближения к η_y : $\hat{\eta}_y(x, y) = \int_a^x \frac{\partial \eta_t(t, y)}{\partial y} dt$. На рис. 2, г — распределение $\eta_y^{new}(x, y)$ — результат работы алгоритма, примененного к $\eta_y(x, y)$.

Сравнение рис. 2, в и г показывает, насколько алгоритм позволяет улучшить качество по сравнению с обычным интегрированием и дифференцированием исходных данных. Сравнение рис. 2, б и г позволяет визуально оценить, насколько близок результат работы алгоритма к контрольному распределению.

Поскольку алгоритм использует ДПФ, а первым шагом является вычисление $\hat{\eta}_y(x, y) = \int_a^x \frac{\partial \eta_t(t, y)}{\partial y} dt$, осуществляемое дифференцированием по y и интегрированием по x , то естественно вычислять $\hat{\eta}_y(x, y)$ также при помощи ДПФ. В этом случае дифференцирование заменяется умножением, интегрирование делением и сам алгоритм заметно упрощается. Однако следует помнить о некоторых особенностях ДПФ, изложенных ниже на примере функции одной переменной.

Оптимизированный алгоритм вычисления градиента гладкой функции двух переменных по одной из его компонент. Пусть $f(x)$ — гладкая функция, определенная на конечном отрезке, $g(x)$ — первая производная по координате x от $f(x)$: $g(x) = \frac{df}{dx}$. Функции $g(x)$ соответствует Фурье-образ $G(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot x} dx$, функции $f(x)$ — образ $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot x} dx$ (множитель 2π в показателе экспоненты введен для того, чтобы привести формулы к виду, удобному для использования в алгоритме быстрого преобразования Фурье). $F(k)$ и $G(k)$ связаны соотношением:

$$G(k) = -2\pi i \cdot k \cdot F(k). \quad (17)$$

Операцию дифференцирования функции $f(x)$ предполагается совершать по следующей схеме:

1) вычислить Фурье-образ $F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot x} dx$; 2) вычислить $G(k)$ по формуле (17); 3) выполнить обратное преобразование Фурье над $G(k)$. В результате получим функцию, которую считаем производной $f(x)$. Данная схема неявно предполагает, что: 1) $f(x)$ задана на всей действительной оси; 2) преобразование Фурье существует и для $f(x)$ и для $g(x)$. Рассмотрим, что изменится в случае, когда хотя бы одно из этих условий нарушается.

$$\text{Пусть } f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| < a \\ 0, & \text{если } |x| > a \end{cases} \text{ и } g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < a \\ 0, & \text{если } |x| > a \end{cases}.$$

$$G(k) = \int_{-a}^a 1 \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot x} dx = \frac{1}{\pi k} \cdot \sin(2\pi k a), \quad F(k) = \int_{-a}^a x \cdot e^{2\pi i \cdot k \cdot x} dx = \frac{1}{2\pi i k} \cdot \left[2 \cos(2\pi k a) - \frac{\sin(2\pi k a)}{\pi k} \right].$$

Очевидно, что соотношение (17) не выполняется; применять указанную выше схему дифференцирования нельзя.

Рассмотрим более общий случай и произведем дифференцирование аккуратнее, полагая, что исходная функция задана на всей действительной оси, но терпит разрыв на границах отрезка

$[a, b]$. Пусть $f(x)$ задана в следующем виде: $f(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), & \text{если } x \in [a, b] \\ 0, & \text{если } x \notin [a, b] \end{cases}$, $\tilde{f}(x)$ — гладкая

функция, которая не обращается в ноль на концах $[a, b]$. $f(x)$ можно записать в следующем виде:

$f(x) = \tilde{f}(x) \cdot \text{step}(x-a) \cdot \text{step}(b-x)$, где $\text{step}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ — степ-функция. Приняв во

внимание, что $\frac{d}{dx} \text{step}(x) = \delta(x)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, и произведя вычисления

легко показать, что для Фурье образов функции $f(x)$ и ее производной соотношение (17) будет выполняться.

Следовательно, когда дифференцирование производится при помощи преобразования Фурье, имеет значение поведение поддифференциальной функции на всей действительной оси, а не только на заданном отрезке. Если функция терпит разрыв (т.е. если функция не обращается в ноль на концах отрезка), дифференцирование, производимое по указанной выше схеме, дает неверный результат. Для того чтобы получить правильное значение производной внутри какого-либо отрезка необходимо достроить поддифференциальную функцию за его пределами, плавно обратив ее (и ее производную) в ноль, и, вычислять преобразование Фурье над расширенной таким образом областью.

При интегрировании с использованием преобразования Фурье необходимо спектр функции $f(x)$ поделить на $(-2\pi ik)$ за исключением точки $k = 0$. При этом нулевая гармоника становится неопределенной (она соответствует константе интегрирования), и ее можно положить равной нулю.

Если, по аналогии с дифференцированием, обратить функцию в ноль на концах расширенной области определения, то попытка произвести интегрирование при помощи БПФ, приведет к неверному результату. Причина кроется в том, что у функции, полученной в результате интегрирования, не существует преобразования Фурье. Действительно, пусть на концах отрезка $[a, b]$ $f(x)$

обращается в ноль (рис. 3, а). Нетрудно видеть, что интеграл от нее $I(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ будет выглядеть приблизительно так, как показано на рис. 3, б. $I(+\infty) \neq 0!$ А раз функция не обращается на бесконечности в ноль, то вычислить от нее ДПФ не получится.

Для того чтобы можно было произвести интегрирование при помощи преобразования Фурье

необходимо так доопределить исходную функцию $f(x)$, чтобы интеграл от нее $I(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$

достаточно быстро обращался в ноль при $x \rightarrow \infty$. Достигнуть этого можно, доопределив $f(x)$

следующим образом (рис. 3, в): $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a, b], \\ -f(2b-x), & x \in [b, b+(b-a)] \end{cases}$. В этом случае суммар-

ная площадь под кривой $\tilde{f}(x)$ равна нулю и, следовательно, $\tilde{I}(x) = \int_{-\infty}^x \tilde{f}(t)dt$ будет стремиться к нулю при $x \rightarrow \infty$.

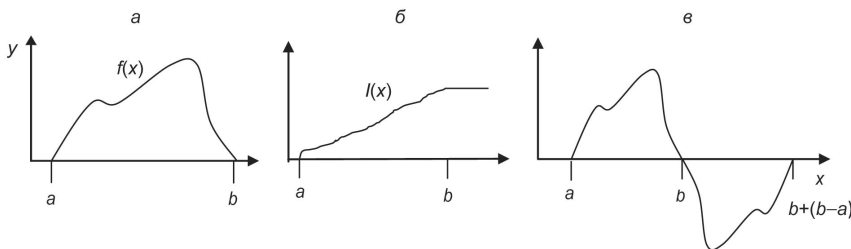


Рис. 3. Доопределение гладкой функции при ее интегрировании при помощи преобразования Фурье. а — случайная гладкая функция, обращающаяся в ноль на концах отрезка $[a, b]$; б — первообразная от функции, изображенной на рис. 3, а; в — функция, построенная на основе рис. 3, а таким образом, чтобы ее первообразная обращалась в ноль на концах отрезка $[a, b+(b-a)]$.

Итак, для выполнения численного дифференцирования и интегрирования с использованием преобразования Фурье необходимо, чтобы Фурье-образ существовал и для исходной функции и для конечного результата. Нужно учитывать, что преобразование Фурье действует на всей действительной оси, даже если исходная функция задана на конечном отрезке.

Вернемся к описанию алгоритма. Пусть распределение $\eta_x(x, y)$ задано на области $[a, b] \times [c, d]$. Для нахождения $\eta_y(x, y)$ необходимо выполнить интегрирование по x , дифференцирование по y и спектральную фильтрацию.

Оптимизированный алгоритм включает этапы:

1) Для дифференцирования по y необходимо расширить область определения $[a, b] \times [c, d] \rightarrow [a, b] \times [c_1, d_1]$ по координате y и доопределить $\eta_x(x, y) \rightarrow f_1(x, y)$ над расширенной областью так, чтобы обеспечить гладкость. На границах c_1 и d_1 функция $f_1(x, y)$ вместе с производной по y должны обращаться в ноль.

2) Для обеспечения непрерывности по x необходимо расширить область определения $[a, b] \times [c_1, d_1] \rightarrow [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$ по координате x и доопределить $f_1(x, y) \rightarrow f_2(x, y)$ над расширенной областью так, чтобы обеспечить непрерывность. На границах a_1 и b_1 функция $f_2(x, y)$ должна обращаться в ноль.

3) Для интегрирования по x необходимо расширить область определения $[a_1, b_1] \times [c_1, d_1] \rightarrow [a_2, b_2] \times [c_1, d_1]$ по координате x и доопределить $f_2(x, y) \rightarrow f_3(x, y)$ над расширенной областью так, чтобы обеспечить обращение в ноль интеграла от $f_3(x, y)$ по координате x , вычисляемого в пределах $[-\infty, +\infty]$.

4) Над функцией $f_3(x, y)$ выполняется преобразование Фурье по координате x и по координате y . В результате получается двумерный Фурье-спектр $F_3(k_x, k_y)$.

5) Над $F_3(k_x, k_y)$ выполняется интегрирование, дифференцирование и спектральная филь-

$$\text{трация: } F_3^{\text{new}}(k_x, k_y) = \begin{cases} \frac{k_y}{k_x} F_3(k_x, k_y), & \text{если } k_x \neq 0 \\ 0, & k_x = 0 \end{cases}.$$

6) Над $F_3^{\text{new}}(k_x, k_y)$ выполняется обратное преобразование Фурье по координате k_x и по координате k_y . В результате получается функция $f_4(x, y)$, определенная на области $[a_2, b_2] \times [c_1, d_1]$.

7) Вернувшись к исходной области определения, получим искомое распределение уклонов: $\eta_y^{\text{new}}(x, y) \equiv f_4(x, y)$, если $x \in [a, b]$ и $y \in [c, d]$.

Параметры $c_1, d_1, a_1, b_1, a_2, b_2$ подбираются из соображений баланса между величиной вычислительной погрешности и быстродействием алгоритма. Погрешность $\varepsilon(y) = \eta_y(x, y) - \eta_y^{\text{new}}(x, y)$ по-прежнему описывается формулой (16).

Расширение области определения приводит к существенному увеличению объема обрабатываемых данных. Однако, благодаря быстрому преобразованию Фурье, оптимизированный алгоритм значительно превосходит по быстродействию свою базовую версию, описанную выше.

В проведенных ранее исследованиях была показана возможность нахождения компоненты вектора уклонов взволнованной водной поверхности в направлении градиента яркости неба путем пространственной обработки изображения поверхности с использованием информации о распределении яркости на «зеркальном» участке небосвода в предположении, что это распределение является линейным.

В данной статье предложен алгоритм определения указанной компоненты уклонов в случае, когда распределение яркости неба не является линейным, но обладает аксиальной симметрией относительно направления на Солнце. Указан способ восстановления второй компоненты вектора уклонов по пространственному распределению той его компоненты, которая находится путем обработки изображения. Способ основывается на том, что обе компоненты вектора уклонов выражаются через одну скалярную функцию — функцию возвышений поверхности. Разработан быстродействующий алгоритм нахождения второй компоненты вектора уклонов, пригодный для обработки двумерных изображений без привлечения специальной вычислительной техники.

Автор выражает благодарность Л. С. Долину за полезные советы и практическую помощь при выполнении работы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 14-05-00138 и № 13-05-97038.

Литература

1. Долин Л. С., Лучинин А. Г., Турлаев Д. Г. Алгоритм восстановления изображений подводных объектов, искаженных поверхностным волнением // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2004. Т. 40, № 6. С. 856–864.
2. Долин Л. С., Лучинин А. Г., Турлаев Д. Г. О коррекции изображений подводных объектов при неполной информации о поверхностном волнении // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2005. Т. 41, № 2. С. 272–277.
3. Dolin L. S., Luchinin A. G., Titov V. I., Turlaev D. G. Correcting images of underwater objects distorted by sea surface roughness // Current Research on Remote Sensing, Laser Probing, and Imagery in Natural Waters. Proc. SPIE. 2007. V. 6615, 66150K. 12 p.
4. Турлаев Д. Г., Долин Л. С. О наблюдении подводных объектов через взволнованную водную поверхность: новый алгоритм коррекции изображений и лабораторный эксперимент // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2013. Т. 49, № 3. С. 370–376.
5. Кацев И. Л., Зега Э. П., Прихач А. С. Характеристики качества изображения при наблюдении объекта через случайную «живую» фазовую поверхность // Весці НАНБ. Сер. Фіз.-мат. навук. 2000. № 3. С. 84–89.
6. Вебер В. Л. Наблюдение подводных объектов через бликовые участки морской поверхности // Известия вузов. Радиофизика. 2005. Т. 48, № 1. С. 38–52.
7. Levin I. M., Savchenko V. V., Osadchy V. Ju. Correction of an image distorted by a wavy water surface: laboratory experiment // Applied Optics. 2008. V. 47, № 35. P. 6650–6655.
8. Зуйкова Э. М., Лучинин А. Г., Тумов В. И. Оптические дистанционные методы исследования поверхностного волнения // Дистанционные методы исследования океана. Горький: ИПФ АН СССР. 1987. С. 59–83.
9. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P. Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing. The Press Syndicate of the University of Cambridge, 1992. 1448 p.
10. Караев В. Ю., Каневский М. Б., Баландина М. Б. Численное моделирование поверхностного волнения и дистанционное зондирование. Препринт ИПФ РАН № 552. Н. Новгород, 2000. 25 с.

Статья поступила в редакцию 26.05.2014 г.