УДК 532.591+534.222+550.344.42

© *Ю. П. Королёв*
Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН
Сахалинский государственный университет, Южно-Сахалинск
y.korolev@imgg.ru

ПРИНЦИП ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ ДЛИННЫХ ВОЛН НА МЕЛКОЙ ВОДЕ С УЧЕТОМ ВРАЩЕНИЯ ЗЕМЛИ

Принцип взаимности в акустике известен достаточно давно и находит практическое применение. Соотношение взаимности является асимптотическим и справедливо для линейных процессов в неоднородных средах при наличии отражающих, поглощающих или импедансных границ. Длинноволновые процессы в океане (в частности, цунами) имеют особенности, которые при описании акустических процессов не являются существенными. К ним относятся существенная неоднородность среды (скорости длинных волн различаются более чем на порядок: от 10 м/с на глубинах воды 10 м до 200 м/с на глубинах 4000 м), а также возможность проявления эффекта Кориолиса. Применительно к длинным волнам принцип взаимности детально, а также при условии учета вращения Земли не исследовался. Целью настоящей работы является анализ принципа взаимности для длинных волн на мелкой воде при распространении на вращающейся Земле: определение границ применимости соотношения, учет неоднородности среды и оценка возможного влияния эффекта Кориолиса. Установлен критерий подобия, связывающий горизонтальные размеры источников и глубины воды в их эпицентрах, при соблюдении которого формы волн во взаимных точках совпадают. На основании численных экспериментов с использованием реальной батиметрии установлено, что соотношение взаимности справедливо при расстояниях между источниками, сравнимых с их горизонтальными размерами (при временах пробега, сравнимых с характерными периодами волн). Показано, что в общем виде при учете вращения Земли принцип взаимности не выполняется, однако в частном случае симметричных источников он является справедливым. Соотношение взаимности для длинных волн в этом случае совпадает с соотношением взаимности в акустике. Формы волн от взаимных источников, находящихся в районах вблизи Курильских островов и вблизи побережья Чили, хорошо совпадают друг с другом. Принцип (соотношение) взаимности может быть применен для решения задач, связанных с проблемой цунами, а также для решения других прикладных задач.

Ключевые слова: акустика, функция Грина, длинные волны, цунами, численное моделирование.

Yu. P. Korolev
Institute of marine geology and geophysics of FEB RAS
Sakhalin state university, Yuzhno-Sakhalinsk, Russia

THE RECIPROCITY PRINCIPLE FOR THE SHALLOW WATER WAVES, TAKING INTO ACCOUNT THE EARTH'S ROTATION

The reciprocity principle in acoustics is known for a long time and has a practical application. The reciprocity relationship is asymptotic one and is true for linear processes in heterogeneous media in the presence reflecting, absorbing or impedance boundaries. Long wave ocean processes (in particular, tsunamis) have features that are not essential in acoustics. These include a significant inhomogeneity (long wave velocities differ by more than 10 times: from 10 m/s on water of 10 m in depth to 200 m/s on water of 4000 m in depth), as well as the possibility of the Coriolis effect manifestation. The reciprocity principle in detail, as well as taking into account the Earth's rotation has not been researched with respect to long waves. The purpose of this paper is to analyze the reciprocity principle for long waves on shallow water propagating on the rotating Earth: the evaluation of limits of the applicability of reciprocity relationship, taking into account the media inhomogeneity and evaluation of the possible influence of the Coriolis effect. The similarity criterion was derived, which links the horizontal sizes of sources and water depths in their epicenters, under which waveforms in reciprocal points coincide. On the basis of numerical experiments using real bathymetry it is found that the reciprocity

Королёв Ю. П. Принцип взаимности для длинных волн на мелкой воде с учетом вращения Земли // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2016. Т. 9, № 2. С. 3—14.

Korolev Yu. P. The reciprocity principle for the shallow water waves, taking into account the Earth's rotation. *Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika.* 2016, 9, 2, 3—14.

relationship is valid for distances between sources, comparable to their horizontal sizes (with travel time, comparable with the characteristic wave periods). It is shown that in general case taking into account the Earth's rotation, the reciprocity principle is not satisfied; however, in the special case of symmetric sources it is fair. The reciprocity relationship for long waves in this case coincides with the reciprocity relationship in acoustics. Waveforms from reciprocal sources, located in areas near the Kuril Islands and off the coast of Chile, are in a good agreement with each other. The reciprocity principle (relationship) can be applied to solve problems related to the tsunami problem, and for other applications.

Key words: acoustics, Green's function, long waves, tsunami, numerical modeling.

Принцип взаимности, в частности для гармонических волн в акустике, известен более 140 лет, начиная с исследований Гельмгольца и Рэлея [1]. Принцип взаимности в линейных динамических системах, механических, акустических и электромеханических во многих случаях позволяет получить решение задач, прямое решение которых затруднительно [2—5].

Если в акустике этот принцип находит широкое применение (см., напр., [6]), то в задачах о распространении волн на воде он практически не используется.

Для волн в сплошных средах принцип взаимности является следствием фундаментального свойства симметрии функции Грина для линейного волнового уравнения. Принцип, или соотношение, взаимности выражает то же свойство симметрии для источников, имеющих конечные размеры.

В акустике имеет место следующее соотношение взаимности (асимптотическое равенство):

$$p_A(B) \cdot Q_B = p_B(A) \cdot Q_A, \qquad (1)$$

где $p_A(B)$ и $p_B(A)$ — амплитуды сигналов (давления) от источников A и B, измеренных в точках B и A; $Q_B = p_B \cdot S_B$, $Q_A = p_A \cdot S_A$; p_A , p_B — амплитуды давления на поверхности излучателей A, B, S_A S_B — площади излучающих поверхностей.

Как известно, принцип (соотношение) взаимности справедлив для линейных процессов в неоднородных средах при наличии отражающих, поглощающих или импедансных границ при условиях:

а) расстояние между пунктами A и B, в которых находятся взаимные источники, много больше длины излучаемой волны или

б) во временной области для неоднородных сред время распространения сигнала между A и B много больше периода излучаемого сигнала;

в) длина волны много больше размера излучателя.

Цунами до определенных глубин хорошо описывается системой линейных уравнений мелкой воды, сводящейся к волновому уравнению. Естественно предположить, что принцип взаимности для длинных волн на воде (в приближении мелкой воды) также должен выполняться, причем соотношение взаимности должно иметь вид, аналогичный соотношению взаимности для акустических волн.

Однако длинноволновые процессы в океане (в частности, цунами) имеют особенности, которые при описании акустических процессов не являются существенными.

В задачах, связанных с проблемой цунами, возможны ситуации, когда один из взаимных источников находится на достаточно большой глубине воды, другой — на мелководье. При этом расстояния между источниками может быть сравнимо с характерным горизонтальным размером очага (несколько сотен километров).

Не является очевидным, что асимптотическое соотношение взаимности может быть применимо при таких условиях.

В других случаях удаленных источников цунами (например, побережье Курильских островов и очаги чилийских цунами, время распространения между которыми около суток) условия асимптотичности выполняются, но может проявляться эффект Кориолиса, который при описании акустических процессов не учитывается.

Кроме того, на длинные волны в океане существенное влияние оказывает неоднородность среды: переменная глубина воды, или переменная скорость распространения. Если для акустических процессов в океане неоднородности среды мало заметны (вариации скорости звука в океане не превышают 7 %), то для волн цунами эти эффекты очень значительны, поскольку скорости длинных волн различаются более чем на порядок (от 10 м/с на глубинах воды 10 м до 200 м/с на глубинах 4000 м).

Представляет интерес выяснить, насколько перечисленные эффекты влияют на формулировку принципа взаимности.

Возможно, первое использование этого принципа для волн цунами было предложено в [7]. В этой работе сделана попытка применения принципа взаимности для оптимизации предварительных расчетов цунами. Однако эффекты неоднородности среды (неоднородная глубина и, следовательно, скорость распространения волн) не были проанализированы. Ожидаемый эффект не был получен.

Целью настоящей работы является анализ принципа (соотношения) взаимности для длинных волн на мелкой воде при распространении на вращающейся Земле: определение границ применимости соотношения, учет неоднородности среды и оценка возможного влияния эффекта Кориолиса.

Соотношение взаимности для волн на вращающейся Земле. Соотношение взаимности для длинных волн с учетом вращения Земли отличается от известного из акустики соотношения.

Соотношение взаимности выведено в соответствии с алгоритмом, изложенным в [8], исходя из известных уравнений для длинных волн в приближении *f*-плоскости [9]:

$$\frac{\partial \zeta_A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(D \cdot u_A\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D \cdot v_A\right) = 0,$$
$$\frac{\partial u_A}{\partial t} - f v_A = -g \frac{\partial \zeta_A}{\partial x}, \qquad (2)$$
$$\frac{\partial v_A}{\partial t} + f u_A = -g \frac{\partial \zeta_A}{\partial y}.$$

Здесь $D(x, y)$ — глубина бассейна; $\zeta_A = \zeta_A(t, x, y)$ — отклонение уровня воды от равновесного; $u_A = u_A(t, x, y)$ и $v_A = v_A(t, x, y)$ — компоненты массовых скоростей в направлениях x и y; $f = 2\Omega \sin\varphi$ — параметр Кориолиса; Ω — угловая скорость вращения Земли; φ — некоторая широта; индекс A указывает на источник возмущения.

Начальное условие задачи задается в виде начального возвышения свободной поверхности (источник А) в области S_A с эпицентром в точке A при $t = 0$:

$$\zeta_A(0, x, y) = \zeta_{A0}(x, y).$$

Рассматриваются волны в безграничном бассейне с жесткими границами Γ_1, Γ_2, Γ_3. Граничные условия:

$\zeta(t, x, y) = 0$ на границе Γ_1,
$\zeta(t, x, y) = 0$ на бесконечно удаленной границе Γ_∞, (3)
$u_n(t, x, y) = 0$ на границе Γ_2,
$\alpha(x, y) \cdot u_n(t, x, y) + \beta(x, y) \cdot \zeta(t, x, y) = 0$ на границе Γ_3 (смешанное, или импедансное, условие).

Здесь $u_n(t, x, y)$ — нормальная к границе составляющая массовой скорости, $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ — некоторые размерные коэффициенты (при $\alpha = 0$ смешанное условие переходит в первое или второе условия из (3), при $\beta = 0$ — в третье).

Для вывода соотношения взаимности в области S_B с эпицентром в точке B задается взаимный источник В в виде начального возвышения свободной поверхности $\zeta_B(0, x, y) = \zeta_{B0}(x, y)$. Форма свободной поверхности $\zeta_B(t, x, y)$ и массовая скорость $u_B(t, x, y)$, описывающие распространение волны из области S_B, подчиняются системе уравнений и граничным условиям, аналогичным (2) и (3).

Подробные выкладки приведены в Приложении 1. Получено выражение (П1.3), в координатной форме имеющее вид:

$$\int_{S_A + S_B} \left(\zeta_{A0}(x, y)\zeta_B(s, x, y) - \zeta_{B0}(x, y)\zeta_A(s, x, y)\right) dS =$$
$$= \frac{2f}{g} \int_S D \cdot \left(v_A(s, x, y) u_B(s, x, y) - u_A(s, x, y) v_B(s, x, y)\right) dS.$$

В этом выражении в левой части равенства интеграл берется по площадям S_A и S_B источников, в правой — по всей площади, занятой водой. Параметр s в аргументах функций указывает на то, что функции являются образами преобразования Лапласа.

До сих пор никаких упрощающих задачу предположений не делалось.

Пусть области S_A и S_B разнесены достаточно далеко друг от друга так, что расстояние между точками A и B много больше длин излучаемых волн. Пусть также длины излучаемых волн много больше

характерных размеров источников. Тогда в последнем выражении функции $\zeta_B(s, x, y)$ и $\zeta_A(s, x, y)$ можно вынести за знаки интегралов, заменив их значениями во взаимных точках A и B (ниже обозначено: $\zeta_B(s, x, y)/A = \zeta_B(s, x_A, y_A) = \zeta_B(s, A)$ — уровень свободной поверхности в точке A от источника B, аналогично $\zeta_A(s, x, y)/B = \zeta_A(s, x_B, y_B) = \zeta_A(s, B)$):

$$\zeta_B(s, A)\cdot\int_{S_A}\zeta_{A0}(x, y)\cdot dS - \zeta_A(s, B)\cdot\int_{S_B}\zeta_{B0}(x, y)\cdot dS = \frac{2f}{g}\int_S D\cdot(v_A u_B - u_A v_B)dS\,.$$

После обозначения первого интеграла в левой части равенства, являющегося объемом начального возвышения свободной поверхности, через Q_A, а второго через Q_B, равенство записывается в компактной форме:

$$\zeta_B(s, A)\cdot Q_A - \zeta_A(s, B)\cdot Q_B = \frac{2f}{g}\int_S D\cdot(v_A u_B - u_A v_B)\cdot dS\,. \qquad (4)$$

В равенстве (4) без учета вращения Земли ($f = 0$) правая часть обращается в нуль и (4) по форме совпадает с соотношением взаимности (1).

Оценка правой части в (4) выполнена в Приложении 1 (выражение (П1.4)):

$$\frac{2f}{g}\cdot\int_S D\cdot(u_A v_B - v_A u_B)\cdot dS = -\frac{1}{s}\cdot\int_{S_A+S_B} D\cdot\left(u_A\frac{\partial\zeta_{B0}}{\partial x} + v_A\frac{\partial\zeta_{B0}}{\partial y} - u_B\frac{\partial\zeta_{A0}}{\partial x} - v_B\frac{\partial\zeta_{A0}}{\partial y}\right)\cdot dS\,.$$

Для симметричных возмущений в предположении, что в областях очагов глубины воды почти постоянны, массовые скорости волн от взаимных источников асимптотически постоянны, интеграл по площади источников в правой части последнего равенства обращается в нуль, соответственно, в соотношении (4) правая часть также равна нулю.

Таким образом, с учетом сформулированных предположений, соотношением взаимности для волн на мелкой воде (выполнено обратное преобразование Лапласа) является

$$\zeta_A(t, B)\cdot Q_B = \zeta_B(t, A)\cdot Q_A\,, \qquad (5)$$

где $\zeta_A(t, B)$ — изменение уровня воды в точке B, обусловленное источником в области S_A с центром в точке A, $\zeta_B(t, A)$ — изменение уровня в точке A от возмущения в S_B.

Полученное соотношение по форме совпадает с известным соотношением взаимности (1).

При условии равенства объемов начальных возмущений из (5) следует, что формы волн во взаимных точках должны быть одинаковыми:

$$\zeta_A(t, B) = \zeta_B(t, A)\,. \qquad (6)$$

Соотношения (5) и (6) являются скалярными соотношениями взаимности для нестационарных длинных волн. При выводе (5) и (6) учитывались конечные размеры областей возмущений. Однако интегральная форма соотношений, обусловленная примененным приближением удаленности источников, скрывает особенности форм возмущений, а также эффекты неоднородности среды. Следует выяснить, каким условиям должны удовлетворять взаимные источники, чтобы соотношение (6) было справедливым.

Очевидно, что для выполнения (5) или (6), оба возмущения должны иметь одинаковый характер, например, представлять собой начальные возвышения свободной поверхности и иметь подобные формы. Критерий подобия, имеющий смысл характерного периода излучаемых волн, может быть построен, исходя из основных величин в очагах: глубин бассейна D_A и D_B в точках A и B, характерных размеров очагов R_A и R_B, ускорения g, —

$$\frac{R_A}{\sqrt{gD_A}} = \frac{R_B}{\sqrt{gD_B}}\,. \qquad (7)$$

В Приложении 2 приведено аналитическое асимптотическое решение задачи (2)—(3) о волнах в неограниченном бассейне, состоящем из двух полупространств с горизонтальным дном, но с разными глубинами. В рамках этой частной задачи получено соотношение (7). Этот пример подтверждает справедливость приведенных выше соображений.

Оценка границ применимости соотношения взаимности. Представляет интерес выяснить, насколько применимо соотношение (6) для источников, аппроксимирующих очаги цунами, которые имеют

достаточно протяженные размеры и не могут быть представлены в виде δ-функций: условие больших расстояний между очагом цунами и ближайшим пунктом регистрации, а также побережьем по сравнению с размерами очага зачастую не выполняется, длины волн излучаемых из очага цунами по порядку величины сравнимы с размерами очага.

Кроме того, в пределах очагов глубина воды может изменяться достаточно сильно и влиять на направленность излучения. Это также представляет интерес для исследования. Ниже показано, что неоднородность дна не влияет на результат. При определении диаметра источника в соответствии с (7) выбиралась глубина воды в эпицентре источника.

Следующие численные эксперименты проведены как для проверки соотношений (5) и (6) при условии (7), так и для выяснения границ применимости условий а), б) и в), т. е. насколько далеко должны быть разнесены взаимные источники и обязательно ли длины волн должны быть много больше характерных размеров источников.

Численные эксперименты проводились в области с реальной батиметрией. Был выбран район центральных и южных Курильских островов. Расчетная область с изображением источников показана на рис. 1. Как видно из рисунка, размеры очагов сравнимы с расстояниями между некоторыми источниками.

Источник 1 расположен на западном склоне Курило-Камчатского желоба, источник 2 — в Охотском море севернее о. Уруп, источник 3 — в Тихом океане юго-восточнее Курило-Камчатского желоба. Источники 4 и 5 расположены в Охотском море западнее о. Итуруп и о. Кунашир, соответственно. Источник 6 находится в Южно-Курильском проливе между о. Кунашир и о. Шикотан.

В пределах области источника 1 (координаты эпицентра 46º54'26" с.ш., 154º28'23" в.д.) глубина воды в области очага вдоль диаметра (по долготе) изменяется от 3616 м на западной границе, 5728 м в эпицентре, до 7443 м на восточной границе. Глубины воды в пределах очагов других источников изменяются менее значительно.

В численных экспериментах применялись источники в виде аксиально-симметричных возвышений свободной поверхности с одинаковыми объемами возмущений ($Q_1 = Q_2 = Q_3 = \ldots = Q_6$ или $a_1R_1^2 = a_2R_2^2 = a_3R_3^2 = \ldots = \text{const}$, где a — амплитуда возвышения, R — радиус возвышения в плане). Радиусы областей источников определялись по глубинам воды в эпицентрах источников в соответствии с (7). Характеристики источников приведены в табл. 1.

В экспериментах применялась разностная сетка с пространственным шагом 900 м по обеим координатам на широте 45º. Расчеты выполнялись с использованием программы, описанной в [10].

Некоторые результаты численного моделирования приведены на рис. 2. На этом рисунке сплошной линией отмечен сигнал от источника, номер которого на рисунке указан первым, в центре взаимного источника (второй номер), пунктиром — то же, но в обратном порядке. В качестве критерия совпадения сигналов от взаимных источников выбран коэффициент корреляции.

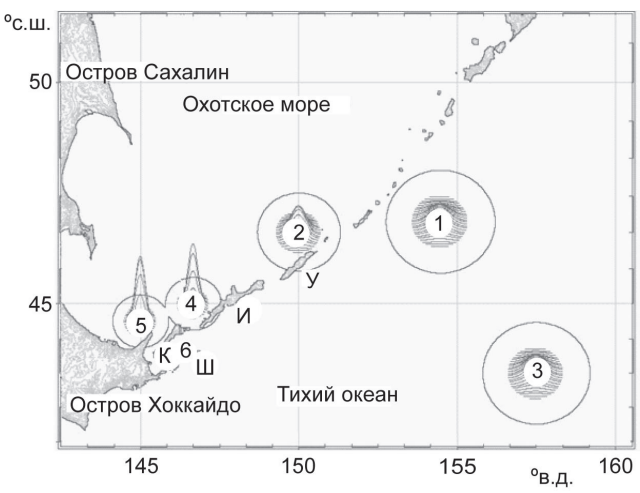

Рис. 1. Расчетная схема численных экспериментов.
На схеме обозначено: цифрами — эпицентры источников, К — о. Кунашир, И — о. Итуруп, У — о. Уруп, Ш — о. Шикотан.

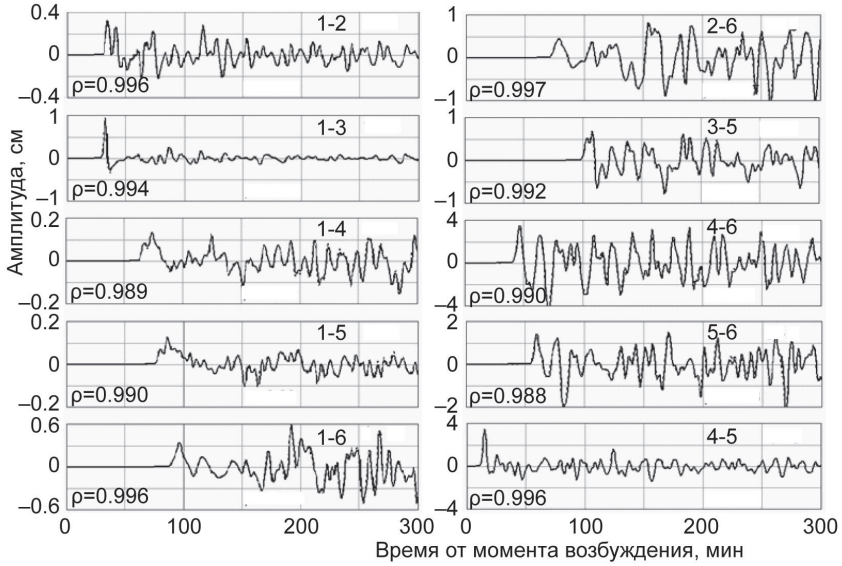

Рис. 2. Зависимость от времени уровня воды во взаимных точках.
На рисунке указаны номера взаимных источников (1-2, 1-3,…),
а также коэффициент корреляции ρ между формами волн от взаимных источников.

Видно, что кривые неразличимы, что свидетельствует о справедливости соотношения (6) и подтверждается высоким значением коэффициента корреляции.

Несмотря на то, что в пределах очагов источников 2—6 вариации глубины воды незначительны, а в пределах очага источника 1 глубина воды изменяется существенно: от 3616 м на западной границе до 7443 м на восточной, совпадения форм волн во взаимных источниках очень хорошие. В качестве глубины для источника 1 согласно (7) была выбрана глубина 5728 м в эпицентра очага. Предположения, изложенные выше, вполне оправдались. При выборе горизонтального размера источника согласно критерию подобия следует выбирать глубину воды в эпицентре очага.

Характерные первые периоды волновых пакетов составляют 13—34 мин, при этом времена распространения волн между центрами взаимных источников составляют 10—100 мин. Наименьшее время распространения волн между взаимными источниками (4 и 5) равно 10 мин. При этом первый период волны равен 14 мин (рис. 2). В целом отношение времени пробега волн между источниками к первому периоду волнового пакета находится в интервале от 0.7 (для пары источников 4 и 5) до 5 (для пары 3 и 4).

Коэффициенты корреляции между уровнями воды во взаимных точках для случаев круговых источников достаточно высоки и равны примерно 0.99.

Таким образом, несмотря на условие б), согласно которому время распространения должно быть много больше характерного периода волны, принятое при выводе соотношения взаимности, это соотношение справедливо и в случаях, когда время распространения сравнимо с характерным периодом волны.

Длины волн, оцениваемые как произведение первого периода на скорость волны в центре взаимного источника, сравнимы с диаметрами этих источников. Вопреки условию в) (длина волны много

Таблица 1

Характеристики взаимных источников

Источник	Глубина воды в эпицентре, м	Диаметр, км	Амплитуда, см
1	5728	100	10
2	3252	75	17.8
3	5623	98.7	10.3
4	1406	49.4	41.0
5	1294	47.4	44.6
6	62.3	10.4	926.3

больше размера излучателя) соотношение взаимности (5) справедливо и в условиях, когда длины волн сравнимы с характерными размерами источников.

Оценка влияния вращения Земли на формы волн взаимных источников. Серия численных экспериментов по проверке выполнимости соотношения взаимности (6) при учете вращения Земли выполнена на реальной батиметрии Тихого океана. В качестве взаимных взяты источники 1 и 2 (рис. 1) и источники с эпицентрами Чилийских цунами 2010 и 2014 гг. Применялись источники в виде аксиально-симметричных возвышений свободной поверхности с одинаковыми объемами возмущений ($a_1R_1^2 = a_2R_2^2 = a_{2010}R_{2010}^2 = a_{2014}R_{2014}^2$, где a — амплитуда возвышения, R — радиус возвышения в плане).

Источник 2010 имеет координаты эпицентра 36º07'19" ю.ш. и 72º53'53" з.д. Другие параметры источника представлены в табл. 2. Параметры источников 1 и 2, рассчитанные в соответствии с (7), также представлены в табл. 2. Расчет выполнен в модели длинных волн с учетом эффекта Кориолиса в сферической системе координат. Пространственный шаг разностной сетки равнялся 5 км на экваторе.

Глубины воды в эпицентрах источников 1 и 2 отличаются от глубин, указанных в табл. 1, вследствие использования иной батиметрии.

Аналогичные эксперименты выполнены для источников 1 и 2 и источника 2014 с координатами центра 19º38'31" ю.ш., 70º49'01" з.д. Параметры источников, рассчитанные в соответствии с (7), приведены в табл. 3.

На рис. 3 представлены результаты расчетов. Сплошной линией обозначена форма волны от источника 1 или 2 в эпицентрах источников 2010 или 2014, пунктиром — форма волны от источников 2010 или 2014 во взаимных точках. Коэффициент корреляции между формами волн во взаимных точках для пары источников 1–2010 равен 0.96, для пары 2–2010 равен 0.93. Для пары источников 1–2014 коэффициент корреляции равен 0.90, для пары 2–2014 равен 0.86.

Таблица 2

Характеристики взаимных источников

Источник	Глубина воды в эпицентре, м	Диаметр, км	Амплитуда, м
2010	114.2	75	10
1	5917	539.9	0.193
2	3210	397.6	0.356

Таблица 3

Характеристики взаимных источников

Источник	Глубина воды в эпицентре, м	Диаметр, км	Амплитуда, м
2014	2110	75	10
1	5917	125	3.6
2	3210	93.1	6.57

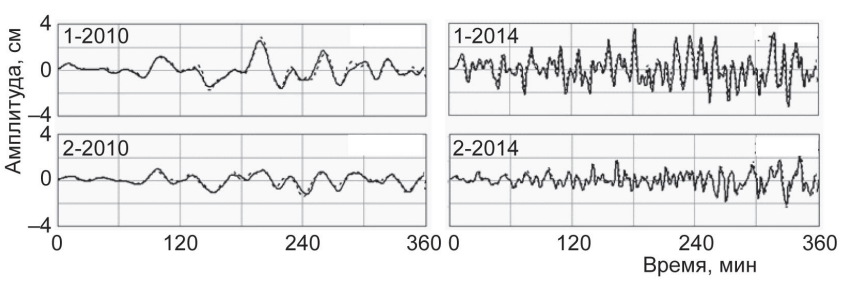

Рис. 3. Зависимость от времени уровня воды во взаимных точках.
На рисунке указаны номера взаимных источников (1-2010...).
Время отсчитывается от момента прихода волны в соответствующую точку.

Следует отметить, что, несмотря на идентичность форм начальных возмущений источников 2010 и 2014, волны от источника 2014 в точках 1 и 2 существенно более высокочастотные по сравнению с волнами от источника 2010 в тех же точках вследствие различия глубин океана в эпицентрах.

Несмотря на то, что в общем виде при учете вращения Земли принцип взаимности не выполняется (см. (4)), предположение о том, что в частном случае симметричных источников он может быть справедливым, оправдалось. Формы волн от взаимных источников, находящихся в районах вблизи Курильских островов и вблизи побережья Чили, хорошо совпадают друг с другом.

***

Выполнен вывод соотношения взаимности для длинных волн с учетом вращения Земли. Показано теоретически, что в общем случае принцип взаимности не выполняется. Однако в случае симметричных источников принцип взаимности должен выполняться асимптотически. Соотношение взаимности в этом случае имеет вид, совпадающий с известным в акустике.

Применимость соотношения взаимности к волнам цунами проанализирована с позиций теории подобия и размерностей, а также с использованием аналитического (асимптотического) решения задачи о распространении длинных волн в бассейне с кусочно-однородным дном. В частности показано, что соотношение взаимности справедливо для источников конечных размеров, имеющих одинаковый характер возмущений и подобные формы. Выведен критерий подобия источников.

Численные эксперименты с использованием реальной батиметрией показали, что соотношение (принцип) взаимности, выведенное в условиях асимптотичности (а, б и в), справедливо при существенно менее строгих ограничительных условиях. Показано, что соотношение взаимности справедливо не только при условии большой удаленности взаимных источников друг от друга по сравнению с горизонтальными размерами возмущений, но и при расстояниях, сравнимых с размерами источников (временах пробега, сравнимых с характерными периодами волн), а также при длинах волн, сравнимых с размерами источников. Коэффициенты корреляции функций, описывающих изменение формы волн во взаимных точках, в случаях круговых источников превышают 0.9.

Выполнено численное моделирование распространения длинных волн, пересекающих Тихий океан, с учетом вращения Земли. При использовании симметричных (круговых) взаимных источников получено хорошее совпадение форм волн во взаимных точках. При этих условиях соотношение взаимности также выполняется.

Принцип (соотношение) взаимности может быть применен для решения задач, связанных с проблемой цунами, а также для решения других прикладных задач.

Приложение 1

Вывод соотношений взаимности выполнен, исходя из известных уравнений для длинных волн в приближении *f*-плоскости [9]. Постановка задачи изложена в (2), (3).

Дальнейшие выкладки являются общеизвестными, тем не менее они приведены с целью показать, на каком этапе допускаются приближения (упрощения) и каковы эти приближения.

При выводе соотношения взаимности применен алгоритм, изложенный в [8].

К системе (2) и граничным условиям (3) применяется преобразование Лапласа по времени. В дальнейшем, если не оговорено, все функции от времени являются образами Лапласа, аргументами функций являются параметр s, а также координаты x, y, аргументами функций D, ζ_{A0}, ζ_{B0} являются координаты x, y, в дальнейшем не указываются.

Для волн от начального возмущения в области S_A преобразованная система в векторной форме выглядит следующим образом:

$$s\zeta_A + \nabla\left(D\mathbf{u}_A\right) = \zeta_{A0}, \qquad (\text{П1.1})$$

$$s\mathbf{u}_A + \mathbf{f}\times\mathbf{u}_A = -g\cdot\nabla\zeta_A, \qquad (\text{П1.2})$$

где $\mathbf{u}_A$ — вектор массовой скорости, $\nabla = \mathbf{e}_x \partial/\partial x + \mathbf{e}_y \partial/\partial y$.

Аналогичной системой описываются волны от источника B с начальным условием $\zeta_B(t, x, y) = \zeta_{B0}(x, y)$ в области S_B при $t = 0$. Нижний индекс указывает на источник возмущений.

Умножая уравнение (П1.1) для волн от источника B на ζ_A и вычитая из уравнения (П1.1), умноженного на ζ_B, получим

$$\zeta_B \cdot \nabla\left(D\mathbf{u}_A\right) - \zeta_A \cdot \nabla\left(D\mathbf{u}_B\right) = \zeta_{A0}\zeta_B - \zeta_{B0}\zeta_A .$$

Приведем левую часть к дивергентной форме с помощью соотношений $\zeta_B \cdot \nabla\left(D\mathbf{u}_A\right) = \nabla\left(\zeta_B D\mathbf{u}_A\right) - D\mathbf{u}_A \cdot \nabla\zeta_B$:

$$\nabla\left(\zeta_B D\mathbf{u}_A\right) - \nabla\left(\zeta_A D\mathbf{u}_B\right) - D\mathbf{u}_A \cdot \nabla\zeta_B + D\mathbf{u}_B \cdot \nabla\zeta_A = \zeta_{A0}\zeta_B - \zeta_{B0}\zeta_A .$$

Заменим градиенты свободной поверхности с помощью уравнений (П1.2):

$$\nabla\left(\zeta_B D\mathbf{u}_A - \zeta_A D\mathbf{u}_B\right) - \frac{2}{g} D\mathbf{f} \cdot \left(\mathbf{u}_A \times \mathbf{u}_B\right) = \zeta_{A0}\zeta_B - \zeta_{B0}\zeta_A .$$

Проинтегрируем полученное равенство по пространству S, занятому водой. Интеграл от первого слагаемого в левой части с помощью формул Грина преобразуется в интеграл по границе $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_\infty$ пространства S (u_{An}, u_{Bn} — нормальные к границе составляющие скоростей, dl — элемент длины дуги границы) [11]:

$$\oint_\Gamma D\left(\zeta_B u_{An} - \zeta_A u_{Bn}\right) dl - \frac{2}{g}\int_S D\mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_A \times \mathbf{u}_B) dS = \int_{S_A+S_B} \left(\zeta_{A0}\zeta_B - \zeta_{B0}\zeta_A\right) dS .$$

Интегралы по границам Γ_1, Γ_∞ и Γ_2 равны нулю в силу граничных условий (3): либо $\zeta = 0$, либо $u_n = 0$.

Интеграл по границе Γ_3 преобразуется: $\oint_{\Gamma_3} \frac{D}{\beta}\left[\left(\beta\zeta_B + \alpha u_{Bn}\right)u_{An} - \left(\alpha u_{An} + \beta\zeta_A\right)u_{Bn}\right] dl$. В силу граничных условий на Γ_3 интеграл обращается в нуль.

Таким образом, окончательно:

$$\int_{S_A+S_B} \left(\zeta_{A0}\zeta_B - \zeta_{B0}\zeta_A\right) dS = -\frac{2}{g}\int_S D\mathbf{f} \cdot (\mathbf{u}_A \times \mathbf{u}_B) dS . \qquad (\text{П1.3})$$

При отсутствии вращения Земли ($\mathbf{f} = 0$) выражение из (П1.3) следует скалярное соотношение взаимности для форм волновой поверхности от источников А и В во взаимных точках B и A.

Для оценки правой части (П1.3) произведем вывод соотношения взаимности для массовых скоростей.

Возьмем градиенты уравнения (П1.1) для волн от источников А и В: $\nabla\zeta_A = \frac{1}{s}\nabla\zeta_{A0} - \frac{1}{s}\nabla \cdot \nabla\left(D\mathbf{u}_A\right)$.

Умножая уравнение (П1.2) на $D\mathbf{u}_B$ и вычитая из произведения уравнение (П1.2) для волн от источника В, умноженное на $D\mathbf{u}_A$, получим, подставив приведенные выше выражения для градиентов:

$$\frac{2}{g} D\mathbf{f} \cdot \left(\mathbf{u}_A \times \mathbf{u}_B\right) - \frac{1}{s} Du_B \cdot \nabla \cdot \nabla\left(D\mathbf{u}_A\right) + \frac{1}{s} D\mathbf{u}_A \nabla \cdot \nabla\left(D\mathbf{u}_B\right) = -\frac{1}{s} D\left(\mathbf{u}_B \cdot \nabla\zeta_{A0} - \mathbf{u}_A \cdot \nabla\zeta_{B0}\right).$$

Приведем второе и третье слагаемые в левой части к дивергентной форме:

$$\frac{2}{g} D\mathbf{f} \cdot \left(\mathbf{u}_A \times \mathbf{u}_B\right) - \frac{1}{s}\nabla \cdot \left(D\mathbf{u}_B \cdot \nabla\left(D\mathbf{u}_A\right)\right) + \frac{1}{s}\nabla \cdot \left(D\mathbf{u}_A \cdot \nabla\left(D\mathbf{u}_B\right)\right) = -\frac{1}{s} D\left(\mathbf{u}_B \cdot \nabla\zeta_{A0} - \mathbf{u}_A \nabla\zeta_{B0}\right).$$

Возьмем интеграл от полученного выражения по пространству, занятому водой. Интегралы по площади от второго и третьего слагаемых в левой части преобразуются с помощью формул Грина [11] в контурный интеграл по границе Г. В силу граничных условий этот интеграл равен нулю.

Окончательно:

$$\frac{1}{s}\int_{S_A+S_B} D\left(\mathbf{u}_B \cdot \nabla\zeta_{A0} - \mathbf{u}_A \cdot \nabla\zeta_{B0}\right) dS = -\frac{2}{g}\int_S D\mathbf{f} \cdot \left(\mathbf{u}_A \times \mathbf{u}_B\right) dS . \qquad (\text{П1.4}).$$

При отсутствии вращения ($\mathbf{f} = 0$) из полученного соотношения выводится векторное соотношение взаимности для массовых скоростей.

Приложение 2

Рассматривается задача распространения волн в безграничном бассейне. Применяется декартова система координат (x, y) с началом при $x = 0$, $y = 0$. Одна половина бассейна (область A, $x < 0$) имеет постоянную глубину D_A, другая (область B, $x > 0$) имеет постоянную глубину D_B.

Пусть в полупространстве A в круговой области S_A радиуса R_A задано аксиально-симметричное возвышение свободной поверхности с центром в точке A с координатами X_A, Y_A. Ищется изменение формы свободной поверхности в точке с координатами X_B, Y_B в правом полупространстве B. Для определенности X_A, $Y_A < 0$, X_B, $Y_B > 0$.

Эволюция волн описывается системой уравнений мелкой воды (2) без учета вращения Земли с начальным условием $\zeta(t, x, y)/t = 0 = \zeta_{A0}(x\text{-}X_A, y\text{-}Y_A)$ в области S_A, а также условием на бесконечности: $\zeta(t, x, y) \to 0$ при $|x|, |y| \to \infty$.

После выполнения интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье по обеим координатам и исключения скоростей из преобразованной системы (2) получается алгебраическое уравнение

$$\left(\frac{s^2}{c_A^2} + k_x^2 + k_y^2\right) \cdot \zeta(s, k_x, k_y) = \frac{s}{c_A^2} \cdot \zeta_{A0}(k_x, k_y), \qquad (П2.1)$$

где s, k_x, k_y — параметры преобразований Лапласа и Фурье; c_A — скорость длинных волн на глубине D_A: $c_A = (gD_A)^{1/2}$, $\zeta_{A0}\left(k_x, k_y\right) = e^{ik_x X_A + ik_y Y_A} \cdot \int\limits_{S_A} \zeta_{A0}\left(x', y'\right) \cdot e^{ik_x x' + ik_y y'} \cdot dx'dy'$; x', y' — декартовы координаты с началом в точке A.

Обратное преобразование Фурье по k_x от функции $\zeta(s, k_x, k_y)$ из соотношения (П2.1)

$$\zeta_1\left(s, x, k_y\right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{s}{c_A^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ik_x X_A + ik_y Y_A} \int\limits_{S_A} \zeta_{A0}\left(x', y'\right) \cdot e^{ik_x x' + ik_y y'} dx'dy' \frac{e^{-ik_x x}}{k_x^2 + \chi_A^2} dk_x,$$

где $\chi_A^2 = \frac{s^2}{c_A^2} + k_y^2$, получается путем нахождения вычета в точке $k_x = -i\chi_A$. Берется только один вычет, поскольку интерес представляет решение в точке правее точки A.

Результатом является

$$\zeta_1\left(s, x, k_y\right) = \frac{s}{2c_A^2 \chi_A} e^{ik_y Y_A} \cdot e^{-\chi_A (x - X_A)} \cdot \int \zeta_{A0}\left(x', y'\right) \cdot e^{\chi_A x' + ik_y y'} dx'dy'.$$

Полученное выражение является частным решением неоднородного уравнения. В силу того, что решение ищется в области со скачком глубин, следует учесть общее решение однородного уравнения. Им является $\zeta_2\left(s, x, k_y\right) = C_2 \cdot e^{\chi_A x}$. Взято одно из фундаментальных решений, удовлетворяющее условию $\zeta_2(s, x, k_y) \to 0$ при $x \to -\infty$.

В правом полупространстве ($x > 0$) общим решением однородного уравнения с учетом условия $\zeta_3 \to 0$ при $x \to \infty$ является $\zeta_3\left(s, x, k_y\right) = C_3 \cdot e^{-\chi_B x}$, где $\chi_B^2 = \frac{s^2}{c_B^2} + k_y^2$, $c_B = (gD_B)^{1/2}$.

Неопределенные коэффициенты C_2 и C_3 находятся из условий сшивки решений на границе раздела областей (при $x = 0$):

$\zeta_1\left(s, 0, k_y\right) + \zeta_2\left(s, 0, k_y\right) = \zeta_3\left(s, 0, k_y\right)$ — условие непрерывности уровня,

$D_A \cdot \frac{d}{dx}\left(\zeta_1\left(s, x, k_y\right) + \zeta_2\left(s, x, k_y\right)\right)/_{x=0} = D_B \cdot \frac{d}{dx}\zeta_3\left(s, x, k_y\right)/_{x=0}$ — условие непрерывности потоков.

Из этих граничных условий

$$C_3 = \frac{2\chi_A D_A}{\chi_A D_A + \chi_B D_B} \cdot \frac{s}{2c_A^2 \chi_A} \cdot e^{\chi_A X_A + ik_y Y_A} \cdot \int\limits_{S_A} \zeta_{A0}\left(x', y'\right) \cdot e^{\chi_A x' + ik_y y'} dx'dy'.$$

Решением задачи об отклике уровня в точке $B(X_B, Y_B)$ на возмущение в области S_A в переменных s и k_y является

$$\zeta_A\left(s, X_B, k_y\right) = \frac{s}{g \cdot \left(\chi_A D_A + \chi_B D_B\right)} \cdot e^{\chi_A X_A + ik_y Y_A} \cdot \int\limits_{S_A} \zeta_{A0}\left(x', y'\right) \cdot e^{\chi_A x' + ik_y y'} dx'dy' \cdot e^{-\chi_B X_B}.$$

Далее выполняется обратное преобразование Фурье по k_y (в точке X_B Y_B):

$$\zeta_A\left(s, X_B, Y_B\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{g\cdot\left(\chi_A D_A + \chi_B D_B\right)} e^{\chi_A X_A - \chi_B X_B + ik_y Y_A} \int_{S_A} \zeta_{A0}\left(x', y'\right)\cdot e^{\chi_A x' + ik_y y'} dx'dy' e^{-ik_y Y_B} dk_y .$$

В дальнейшем рассматривается регулярное отражение (преломление) волн от границы раздела сред.

Оценка последнего интеграла по k_y при больших значениях X_A, X_B, Y_A и Y_B может быть выполнена методом перевала [12]. Для этого фазовая функция

$$\Psi(k_y) = \chi_A X_A - \chi_B X_B + ik_y Y_A - ik_y Y_B$$

должна быть разложена в ряд вблизи седловой точки, которая определяется равенством нулю производной фазовой функции:

$$\Psi'\left(k_y\right) = \frac{k_y X_A}{\chi_A} - \frac{k_y X_B}{\chi_B} + i\cdot\left(Y_A - Y_B\right) = 0 .$$

При $|X_A|, |X_B|, |Y_A|, |Y_B| >> R_A$ можно пренебречь вкладом в фазовую функцию слагаемым $\chi_A x' + ik_y y'$.

С учетом того, что X_A, Y_A < 0, подходящим корнем последнего уравнения является $k_y = k_+ = -i\cdot\frac{s}{c_A}\sin\theta_A = -i\cdot\frac{s}{c_B}\sin\theta_B$, где θ_A, θ_B — углы падения и преломления луча, соединяющего точки A и B, в некоторой точке на границе раздела сред.

Фазовая функция и ее вторая производная в седловой точке равны:

$\Psi(k_+) = \frac{s}{c_A}\cos\theta_A\cdot X_A - \frac{s}{c_B}\cos\theta_B\cdot X_B + \frac{s}{c_A}\sin\theta_A\cdot Y_A - \frac{s}{c_B}\sin\theta_B\cdot Y_B = -s\cdot T_{AB}$, где T_{AB} — время распространения волны из A в B вдоль луча, и $\Psi''\left(k_+\right) = -\left(\frac{c_A|X_A|}{s\cos^3\theta_A} + \frac{c_B X_B}{s\cos^3\theta_B}\right)$.

Пусть $\zeta_{A0}(x', y')$ является аксиально-симметричной, заданной в круговой области S_A радиуса R_A. В выражении для $\zeta_A(s, X_B, Y_B)$ и в интеграле по x' и y' удобно заменить декартовы координаты (x', y') на полярные ($x' = r\cos\varphi$, $y' = r\sin\varphi$) и перейти к безразмерным координатам и функции ($r = r'R_A$, $\zeta_{A0}(x', y') = a_A\,\zeta'_{A0}(r')$).

Согласно методу перевала, подынтегральная функция в интеграле по k_y заменяется ее разложением в ряд по степеням k_y вблизи седловой точки k_+. Таким образом, последний интеграл преобразуется к виду:

$$\zeta_A\left(s, X_B, Y_B\right) = \frac{a_A R_A^2}{2\pi}\frac{e^{-s\cdot T_{AB}}}{c_A\cos\theta_A + c_B\cos\theta_B}\int_0^1 \zeta'_{A0}(r')\cdot\int_0^{2\pi} e^{\frac{sR_A}{c_A}r'\cos(\varphi-\theta_A)} d\varphi\cdot r'dr'\cdot$$
$$\cdot\int_\gamma \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{c_A|X_A|}{s\cos^3\theta_A}\left(k_y + i\frac{s}{c_A}\sin\theta_A\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{c_B X_B}{s\cos^3\theta_B}\left(k_y + i\frac{s}{c_B}\sin\theta_B\right)^2\right) dk_y . \qquad (П2.2)$$

Интегрирование по k_y производится вдоль линии наискорейшего спуска γ, проходящей через седловую точку k_+.

Аналогичным выражением описывается решение в точке A от кругового источника $\zeta_{B0}(x\text{-}X_B, y\text{-}Y_B)$ радиуса R_B (седловая точка та же самая: $k_y = k_+ = -i\cdot\frac{s}{c_A}\sin\theta_A = -i\cdot\frac{s}{c_B}\sin\theta_B$):

$$\zeta_B(s, X_A, Y_A) = \frac{a_B R_B^2}{2\pi}\frac{e^{-s\cdot T_{BA}}}{c_B\cos\theta_B + c_A\cos\theta_A}\int_0^1 \zeta'_{B0}(r')\cdot\int_0^{2\pi} e^{\frac{sR_B}{c_B}r'\cos(\varphi-\theta_B)} d\varphi\cdot r'dr'\cdot$$
$$\cdot\int_{\tilde{a}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{c_B X_B}{s\cos^3\theta_B}\left(k_y + i\frac{s}{c_B}\sin\theta_B\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{c_A|X_A|}{s\cos^3\theta_A}\left(k_y + i\frac{s}{c_A}\sin\theta_A\right)^2\right) dk_y . \qquad (П2.3)$$

В (П2.3) r' — радиальная координата, нормированная на R_B, с центром в (X_B, Y_B).

Сравнение полученных выражений (П2.2) и (П2.3) показывает, что изменения уровня воды в точках A и B от взаимных источников будут одинаковыми при следующих условиях:

— идентичности форм начальных возмущений, нормированных на максимальную амплитуду и горизонтальный радиус очага: $\zeta'_{A0}(r') = \zeta'_{B0}(r')$;

— равенства объемов начальных возмущений: $a_A R_A^{\,2} = a_B R_B^{\,2}$;

— равенства показателей экспонент в (П2.2) и (П2.3) в интегралах по φ: $\dfrac{sR_A}{c_A} r' = \dfrac{sR_B}{c_B} r'$.

Из последнего условия вытекает условие (7), предложенное на основе общих соображений подобия и размерностей.

В целом приведенные выкладки подтверждают как (5) и (6), так и (7).

Автор выражает благодарность В. М. Кайстренко за внимание к работе, плодотворные обсуждения, а также рецензентам за полезные замечания.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 13-07-00412.

Литература

1. *Стретт Дж. В.* Теория звука. В 2 т. Т. 1. / Пер. с англ. М.: ГИТТЛ, 1955. 504 с.
2. *Фурдуев В. В.* Теоремы взаимности. М.-Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948. 92 с.
3. *Бабич В. М.* Принцип взаимности для динамических уравнений теории упругости // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Т. VI. Л.: Изд. ЛГУ, 1962. С. 60.
4. *Шендеров Е. Л.* Волновые задачи гидроакустики. Л.: Судостроение, 1972. 352 с.
5. *Белоусов Ю. И., Римский-Корсаков А. В.* Принцип взаимности в акустике и его применение для расчета звуковых полей колеблющихся тел // Акустический журнал. 1975. Т. XXI, вып. 2. С. 161—172.
6. *Урик Р. Дж.* Основы гидроакустики / Пер. с англ. Л.: Судостроение, 1978. 448 с.
7. *Loomis H. G.* Tsunami prediction using the reciprocal property of Green's functions // Marine Geodesy. 1979. V. 2. P. 27—39.
8. *Бреховских Л. М., Годин О. А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.
9. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Т. 1. / Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 480 с.
10. *Поплавский А. А., Храмушин В. Н., Непоп К. И., Королев Ю. П.* Оперативный прогноз цунами на морских берегах Дальнего Востока России. Южно-Сахалинск: ДВО РАН, 1997. 272 с.
11. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике / Пер. с англ. М.: Наука, 1970. 720 с.
12. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

Статья поступила в редакцию 05.03.2015 г.