

УДК 532.5

© А. С. Козелков<sup>1,2</sup>, В. Р. Ефремов<sup>3</sup>, С. М. Дмитриев<sup>2</sup>, А. А. Куркин<sup>2</sup>, Е. Н. Пелиновский<sup>2,4</sup>, Н. В. Тарасова<sup>1</sup>, Д. Ю. Стрелец<sup>5</sup><sup>1</sup>Российский Федеральный Ядерный Центр "Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики", г. Нижний Новгород<sup>2</sup>Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексева, г. Нижний Новгород<sup>3</sup>АО «Конструкторское бюро приборостроения им. академика А.Г. Шипунова», г. Тула<sup>4</sup>Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук, г. Нижний Новгород<sup>5</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ВСПЛЫТИЯ ПУЗЫРЬКОВ ВОЗДУХА И ТВЕРДЫХ СФЕР

Статья поступила в редакцию 04.04.2018, после доработки 30.10.2018.

Представлены результаты численного моделирования всплытия пузырьков и твердых сфер диаметром 1—20 мм в воде. Анализ основан на численном решении полной системы уравнений Навье—Стокса для двухфазной среды в трехмерной постановке неявным способом. Межфазная границы газ-вода автоматически отслеживается методом выделения объемной доли. Движение твердых сфер моделируется с применением методики «Химера». Особое внимание уделено изучению локальных физических характеристик процесса движения. Проводится сравнение средних расчетных скоростей всплытия с экспериментальными данными. Показан периодичный (зигзагообразный или спиралеобразный) характер траектории движущихся пузырьков, связанный с изменением их формы и с формированием за ними характерного турбулентного следа. Получена корреляция скорости всплытия пузырьков с действующими на него силами. Для твердых сфер выявлена тенденция изменения траектории всплытия по мере возрастания числа Галилея.

**Ключевые слова:** уравнения Навье—Стокса, численное моделирование, пакет программ ЛОГОС, пузырек, средняя скорость всплытия, метод SIMPLE, осциллирующая траектория.

A. S. Kozelkov<sup>1,2</sup>, V. R. Efremov<sup>3</sup>, S. M. Dmitriev<sup>2</sup>, A. A. Kurkin<sup>2</sup>, E. N. Pelinovsky<sup>2,4</sup>, N. V. Tarasova<sup>1</sup>, D. Yu. Strelets<sup>5</sup><sup>1</sup>Russian federal nuclear center "All-Russian research institute of experimental physics", Nizhny Novgorod, Russia<sup>2</sup>Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R. E. Alekseev, Nizhny Novgorod, Russia<sup>3</sup>JSC "Design Bureau of Instrument Engineering n.a. academician A. G. Shipunova", Tula, Russia<sup>4</sup>Institute of Applied Physics of Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia<sup>5</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

## STUDY OF THE FEATURES OF RISING OF AIR BUBBLES AND SOLID SPHERES

Received 04.04.2018, in final form 30.10.2018.

The results of numerical modeling of rising of bubbles and solid spheres with a diameter of 1 to 20 mm in water are presented. The analysis is based on the numerical solution of the complete system of Navier—Stokes equations for a two-phase medium in a three-dimensional formulation in an implicit manner. The interface gas-water boundary is automatically monitored by the method of allocating the volume fraction. The motion of solid spheres is modeled using the method "Chimera". Particular attention is paid to the study of local physical characteristics of motion process. Comparison of average calculated rising velocities with experimental data is carried out. The periodic (zigzag or spiral) character of the trajectory of moving bubbles associated with changing their shape and with the formation of a characteristic turbulent trace is shown. The correlation of the velocity of bubble rise with the forces acting on it is obtained. The tendency of change of a rise trajectory in process of increase of number of Galileo is revealed for solid spheres.

Ссылка для цитирования: Козелков А. С., Ефремов В. Р., Дмитриев С. М., Куркин А. А., Пелиновский Е. Н., Тарасова Н. В., Стрелец Д. Ю. Исследование особенностей всплытия пузырьков воздуха и твердых сфер // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2018. Т. 11, № 4. С. 73—80.

For citation: Kozelkov A. S., Efremov V. R., Dmitriev S. M., Kurkin A. A., Pelinovsky E. N., Tarasova N. V., Strelets D. Yu. Study of the features of rising of air bubbles and solid spheres. *Fundamentalnaya i Prikladnaya Gidrofizika*. 2018, 11, 4, 73—80.

doi: 10.7868/S2073667318040093

**Key words:** Navier—Stokes equations, numerical simulation, software package LOGOS, bubble, terminal velocity, SIMPLE method, oscillating trajectory.

На протяжении последних десятилетий достаточно много внимания уделяется изучению движения пузырьков и твердых сфер в жидкости в поле силы тяжести [1—9]. По многим вопросам, касающимся закономерности движения пузырьковых течений в целом и, даже, свободного всплытия одиночного пузырька, так и не достигнуто согласия [10]. Нелинейное взаимодействие таких факторов как физические свойства жидкости и газа, заполняющего пузырек, поверхностное натяжение, инерция окружающей жидкости, сопротивление среды и плавучесть, а также трехмерная природа всплытия осложняют детальное экспериментальное изучение и построение теоретических моделей, учитывающих все эти аспекты [10].

В исследованиях, касающихся всплытия/погружения твердых сфер фиксированной формы, картина более определенная. В данном случае, по сравнению с движением пузырьков, исключено влияние изменения формы сферы на динамику ее движения. Тем не менее, несмотря на упрощение, среди ряда работ по этой теме имеются некоторые разногласия относительно обстоятельств и времени появления вибрации и существующих типов движения [3, 11, 12].

С развитием вычислительных методов стало возможным применять прямое численное моделирование для решения задачи о всплытии одиночного пузырька или сферы. Наиболее полно численное исследование данного процесса возможно только на основании решения системы уравнений Навье—Стокса для двухфазной среды в трехмерной постановке, с использованием модели поверхностного натяжения [2, 10] в случае всплытия пузырьков. Численное моделирование позволяет получить информацию о характере траекторий движения и некоторые количественные характеристики.

В данной работе представлены результаты численных исследований динамики всплытия одиночного пузырька воздуха в чистой воде. Исследовался характер всплытия пузырьков разного диаметра 1—10 мм. Особое внимание уделяется изучению локальных физических характеристик процесса всплытия. В частности, рассмотрены характер поля скорости, образующегося вокруг всплывающего пузырька, траектория пузырьков, зависимость локальных характеристик этих траекторий от диаметра пузырька. Проводится сравнение средних скоростей всплытия пузырьков разных диаметров, полученных в расчетах, с экспериментальными данными. На основе проведенного анализа делается вывод о причинах зигзагообразного и спирального характера всплытия пузырьков.

Предположение о связи спирального вида траектории пузырька с изменением его формы подтверждается численными экспериментами по моделированию всплытия одиночных твердых сфер. В этом случае влияние изменения формы исключено.

В работе [3] на основании большого числа проведенных экспериментов с твердыми сферами сделана попытка обобщения результатов и определены режимы движения сферических тел и тип вихревого следа, оставляемого за телом. Одним из результатов работы является составленная карта режимов движения твердых сфер, полученная для большого диапазона характерных чисел Рейнольдса  $Re$  и  $m^* = \rho_s/\rho$  (соотношение плотностей частица/жидкость). Из нее следует, что для твердых сфер может наблюдаться либо прямолинейное, либо наклонное, либо зигзагообразное движение. При этом сферы могут дополнительно совершать либо периодические, либо «хаотичные» мелкие вибрации, а могут всплывать без осцилляций. Следует отметить, что, несмотря на то, что «спиральная» траектория иногда упоминается в работах по исследованию движения твердых сфер [4, 12, 13], в последних работах по этой теме [3] утверждается, что осцилляции, интерпретирующиеся как спиральные, малы по амплитуде и длине волны относительно тех, что происходят в одной плоскости и представляют собой зигзагообразное движение.

В настоящей работе проанализирован характер траекторий всплытия сфер с  $m^* = 0.2$  диаметром 5, 7, 10 и 20 мм и выявлена закономерность влияния вихревого следа за всплывающей сферой на траекторию движения. Подтверждена тенденция [9, 14] изменения траектории движения от прямолинейной к зигзагообразной по мере увеличения числа  $Re$ . На основании сравнения типов получаемых движений для твердой сферы и воздушного пузырька делается вывод о механизме, формирующем спиральную траекторию всплывающих пузырьков.

**1. Физико-математическая модель и численный метод.** Движение пузырька обусловлено силами плавучести, сопротивления, поверхностного натяжения. Одной из важных безразмерных характеристик всплытия газообразных пузырьков является число Рейнольдса  $Re = Vd/\nu$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость,  $d$  — эквивалентный диаметр пузырька,  $V$  — скорость всплытия пузырька), характеризующее влияние течения жидкости вокруг пузырька на характер всплытия. Безразмерные числа, характеризующие всплытие твердых сфер — это соотношение плотностей жидкости и твердого тела  $m^* = \rho_0/\rho$  и число Галилея:  $Ga = \sqrt{|1 - m^*|} gD^3 / \nu$  ( $\rho_0$  — плотность сферы,  $\rho$  — плотность жидкости,  $D$  — диаметр сферы,  $g = |\vec{g}|$  — модуль вектора ускорения свободного падения), исполняющее роль безразмерной обратной вязкости (это соотношение сил гравитации и трения).

Совсем маленькие и совсем большие пузырьки должны всплывать практически прямолинейно. По мере того, как пузырь начинает деформироваться и принимать форму сплюсненной сферы, начинает появляться неустойчивость, выражающаяся в зигзагообразной или спиралеобразной траектории пузырька. Зигзагообразная траектория выражается в движении из стороны в сторону в вертикальной плоскости; ориентация плоскости может оставаться постоянной, или изменяться случайным образом по мере всплытия пузырька.

Спиралеобразная траектория пузырька предполагает движение по либо против хода часовой стрелки в зависимости от начальных условий всплытия. Движение пузырька может быть сначала зигзагообразным, затем переходить в спиралеобразное, причем обратный переход отсутствует [16].

В данной работе для численного исследования всплытия пузырьков и сфер применяется метод прямого численного моделирования с отслеживанием границ между фазами в случае пузырьков с помощью объемного метода [17, 18]. К достоинствам данного подхода относится отсутствие какой-либо эмпирики, однако для его применения требуется высокое сеточное разрешение в окрестности межфазной границы. Метод позволяет естественным образом в результате расчетов учесть все силы, действующие на межфазной границе.

Метод основан на решении системы уравнений Навье—Стокса, в общем случае представленной в виде:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{u}) = 0, \\ \frac{\partial(\rho\vec{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{u} \otimes \vec{u}) = -\nabla p + \operatorname{div}T + \rho\vec{g} + \int_S \sigma'_i n' \delta(x - x') dS, \\ \frac{\partial\alpha_i}{\partial t} + \vec{u}\nabla\alpha_i = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\rho$ ,  $\vec{u}$ ,  $p$ ,  $t$  — плотность, скорость, давление и время, соответственно,  $T$  — тензор вязких напряжений,  $\vec{g}$  — объемные силы, включающие в себя силы тяжести.  $\alpha_i$  — концентрация  $i$ -го вещества,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения, которые появляются в случае рассмотрения всплытия газообразных пузырьков.

Предполагается, что фазы несжимаемы. Последний член в правой части уравнения сохранения импульса — это член описывающий действие сил поверхностного натяжения. Для этих целей использовалась модель непрерывной поверхностной силы (CFS), предложенная Брекбиллом и соавторами [19]. В рамках этой модели рассматривают нормальную составляющую силы, а тангенциальной пренебрегают. Коэффициент поверхностного натяжения вдоль поверхности раздела фаз не меняется. В таком приближении эффект поверхностного натяжения представлен как непрерывная объемная сила, действующая в переходной области  $\int_{S(t)} \sigma'_i n' \delta(x - x') dS \approx \sigma k \nabla\alpha_i$ , где  $k = -\nabla \cdot (\nabla\alpha_i / |\nabla\alpha_i|)$  — кривизна поверхности раздела.

Для описания свободного всплытия пузырька необходимо рассматривать область размерами, намного превосходящими размеры самого пузырька. А поскольку требуется подробное сеточное разрешение в окрестности пузырька, то предполагаемые расчетные сетки имеют большую размерность. Для облегчения моделирования и уменьшения вычислительных затрат сетка задается в некоторой небольшой окрестности пузырька и двигается согласно перемещению центра масс пузырька. На границах такой расчетной области задаются граничные условия, которые обеспечивают свободное протекание

жидкости. В соответствии с движением области, окружающей пузырек, исходная система уравнений модифицируется, исходя из следующего дифференциального тождества

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t)} \varphi dV = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \int_{\partial\Omega(t)/\partial t} \varphi \dot{x} \cdot \vec{n} dS,$$

где  $\varphi$  — произвольная переменная (в частности:  $\varphi = \rho, \rho u, \alpha_i$ ),  $\dot{x}$  — скорости перемещения центра масс пузырька.

В случае твердой сферы ее движение моделируется как движение твердого тела под действием действующих на него сил: силы тяжести, силы Архимеда и других гидродинамических сил. Действие силы тяжести задается непосредственно, исходя из характеристик твердой частицы: ее плотности и объема.

$$\vec{F}_{\text{тяж}} = \rho_0 \vec{g} V.$$

Гидродинамические силы, включающие в себя и силу Архимеда, определяются на каждом расчетном шаге, исходя из давления, действующего на частицу со стороны жидкости, и силы трения:

$$\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_\tau, \quad \vec{F}_p = \int p \vec{n} dS, \quad \vec{F}_\tau = \int \mu \frac{\partial u_\tau}{\partial n} dS, \quad (2)$$

где  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к грани,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости жидкости,  $u_\tau$  — тангенциальная компонента скорости,  $V$  — объем ячейки интегрирования,  $S$  — площадь грани.

Дискретизация системы уравнений (1) осуществляется методом конечных объемов на произвольной неструктурированной сетке, а для её численного решения используется полностью неявный метод [20], основанный на известном алгоритме SIMPLE [21].

Для моделирования движения сферы используется подход, основанный на применении многообластных сеток с перекрытиями (сетки «Химера») [22]. В этом случае, основная расчетная область представляет собой «базовую» сетку, по которой движется отдельная расчетная сетка, окружающая твердое тело. Полученные геометрические модели объединяются в одну сетку, представляющую исходную задачу.

Взаимодействие «базовой» и дополнительной сеток осуществляется с использованием интерполяционного шаблона, предназначенного для корректного взаимодействия топологически несвязанных регионов. Одним из достоинств данного подхода является возможность использования достаточно больших расчетных областей. Сеточное разрешение может быть грубым в областях, расположенных вдалеке от твердого тела, тогда как в его окрестности строится расчетная сетка с подробным разрешением. Отслеживание границ твердого тела происходит автоматически.

Описанная физико-математическая модель реализована в пакете программ ЛОГОС — программном продукте инженерного анализа, предназначенном для решения сопряженных трехмерных задач конвективного теплопереноса, аэродинамики и гидродинамики на параллельных ЭВМ [23, 24]. При вычислениях используется многосеточный метод [23], позволяющий существенно ускорить вычислительную процедуру и эффективно использовать сотни вычислительных ядер.

**2. Результаты численных расчетов.** В качестве жидкости рассматривается чистая вода со стандартными свойствами. Коэффициент поверхностного натяжения для воды равен 0.0727 Н/м.

Исследуется всплытие пузырьков диаметром 1, 2.5, 3, 5, 8 и 10 мм и твердых сфер диаметром  $D = 5, 7, 10$  и 20 мм с  $m^* = \rho_0/\rho = 0.2$ .

Изначально вся система покоится, начальное давление на свободной поверхности задано равным атмосферному. Расчетная область в случае движения сфер представляет собой параллелепипед размерами  $20D \times 20D \times 100D$ , в случае всплытия пузырьков характерный размер области моделирования по направлениям составляет 0.03 м. В начальный момент времени сфера/пузырь расположены на расстоянии порядка одного диаметра от нижней стенки расчетной области. В случае твердой сферы на ее поверхности ставится граничное условие «непроницаемая стенка».

Для устойчивого счета и во избежание размывания межфазной границы достаточно использовать расчетный шаг, соответствующий числу Куранта 0.5.

На рис. 1 показана эволюция поля скорости всплывающего пузырька диаметром 5 мм. Поле скорости изображено в виде векторного поля в плоскости разреза, сделанного вертикально и проходящего через центр масс пузырька, насыщенность оттенков серого зависит от модуля каждого вектора скорости.

Из рис. 1 видно зарождение вихрей, первоначально симметричный характер течения, затем асимметричный поочередный срыв вихрей и формирование вихревой дорожки в следе за пузырьком.

Для пузырьков различного диаметра характер течения несколько отличается. На рис. 2 представлены картины поля скорости для пузырей диаметром 1, 3, 5 и 10 мм в разрезе по вертикальной плоскости, проходящей через центр пузыря.

Для пузырей с  $d = 3$  и 5 мм поля имеют сходную структуру. Хорошо видно срывающиеся поочередно вихри с разных сторон пузыря, вырождающиеся в вихревую дорожку. Всплытие пузырей такого диаметра соответствует переходному промежуточному режиму течения. Такой характер срыва вихрей объясняет неустойчивое поведение пузырька, его периодически меняющуюся траекторию и сложные колебания формы пузырька.

Для пузыря диаметром  $d = 1$  мм вихри менее выражены и симметричны, в результате чего всплытие происходит по прямолинейной траектории. Число Рейнольдса порядка 100 соответствует промежуточным значениям, находящимся между ламинарным режимом всплытия и промежуточным режимом.

Для пузыря с  $d = 10$  мм взаимодействие срывающихся вихрей вблизи пузыря менее выражено, поскольку вихри отстоят дальше друг от друга из-за больших размеров пузыря. По мере увеличения диаметра пузыря след за ним становится менее устойчивым, что приводит к деформациям поверхности. Из рис. 2 также видно, что с увеличением диаметра форма пузыря сначала становится эллипсоидальной, при больших диаметрах пузырь деформируется уже значительно.

Одной из основных количественных характеристик движения пузырька является значение скорости его всплытия. На рис. 3 представлены графики зависимости скорости всплытия пузырьков  $V$  ( $V = V_y$ ) от времени для пузырьков с характерным диаметром  $d = 1, 2.5, 3, 5, 8$  и 10 мм.

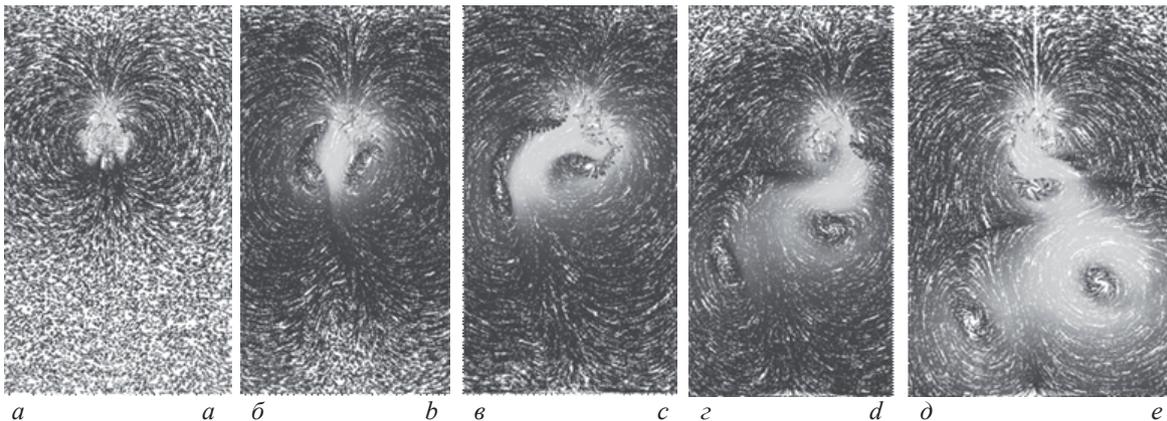


Рис. 1. Поле скорости для пузыря диаметром  $d = 5$  мм в различные моменты времени:

$a — 0.05$  с;  $b — 0.15$  с;  $в — 0.21$  с;  $г — 0.4$  с;  $д — 0.47$  с

(масштаб кадров: ширина — 6 диаметров, высота — 10 диаметров).

Fig. 1. The velocity field for a bubble with the diameter of  $d = 5$  mm for different moments of time:  $a — 0.05$  s;  $b — 0.15$  s;  $c — 0.21$  s;  $d — 0.4$  s;  $e — 0.47$  s (frame scale: width — 6 diameters, height — 10 diameters).

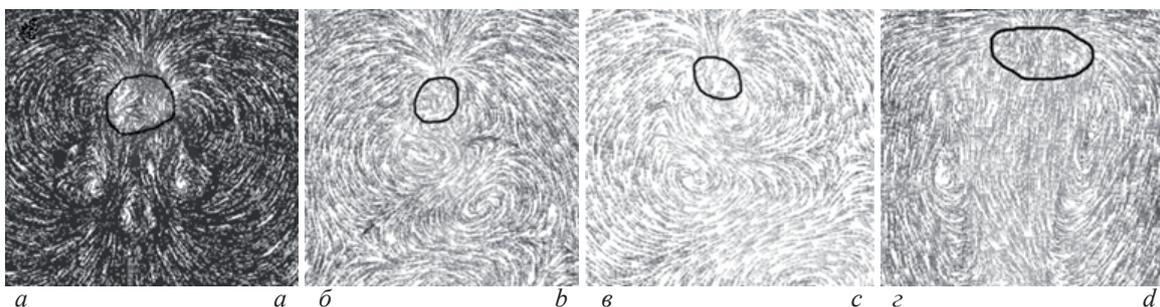


Рис. 2. Поле скорости для пузырей различного диаметра  $d$ :

$a — 1$  мм;  $b — 3$  мм;  $в — 5$  мм;  $г — 10$  мм (граница пузыря показана черной линией).

Fig. 2. The velocity field for the bubbles of different diameters  $d$ :

$a — 1$  mm;  $b — 3$  mm;  $c — 5$  mm;  $d — 10$  mm (boundary of the bubble is shown by the black line).

Для пузырей диаметром 2.5—10 мм после короткого переходного периода возникает режим устойчивых осцилляций. Для пузыря  $d = 1$  мм на всем временном интервале наблюдаются сильные осцилляции скорости. Это связано с численной неустойчивостью, порождаемой введением силы поверхностного натяжения, величина которой достаточно велика из-за большой кривизны поверхности. Для пузырей большего диаметра используемое разрешение оказывается достаточным для получения удовлетворительных результатов указанные паразитные осцилляции относительно средних значений наблюдаемых величин сравнительно малы (рис. 3).

Осцилляции скорости всплытия свидетельствуют о нестабильном колебательном характере всплытия: при преобладании в некоторой фазе движения в горизонтальной или наклонной к вертикали плоскости скорость всплытия уменьшается, далее при преобладании поступательного движения в вертикальном направлении скорость всплытия опять немного увеличивается.

На рис. 4 представлена диаграмма зависимости средней скорости всплытия воздушного пузырька в воде от его диаметра, построенная по результатам множества экспериментальных и теоретических данных, полученных в работах [10, 15, 25—27].

На диаграмме наблюдается область, в которой для пузырей диаметром от 1 до 10 мм имеется тенденция к уменьшению средней скорости всплытия с ростом диаметра пузырька. Такая тенденция подтверждается

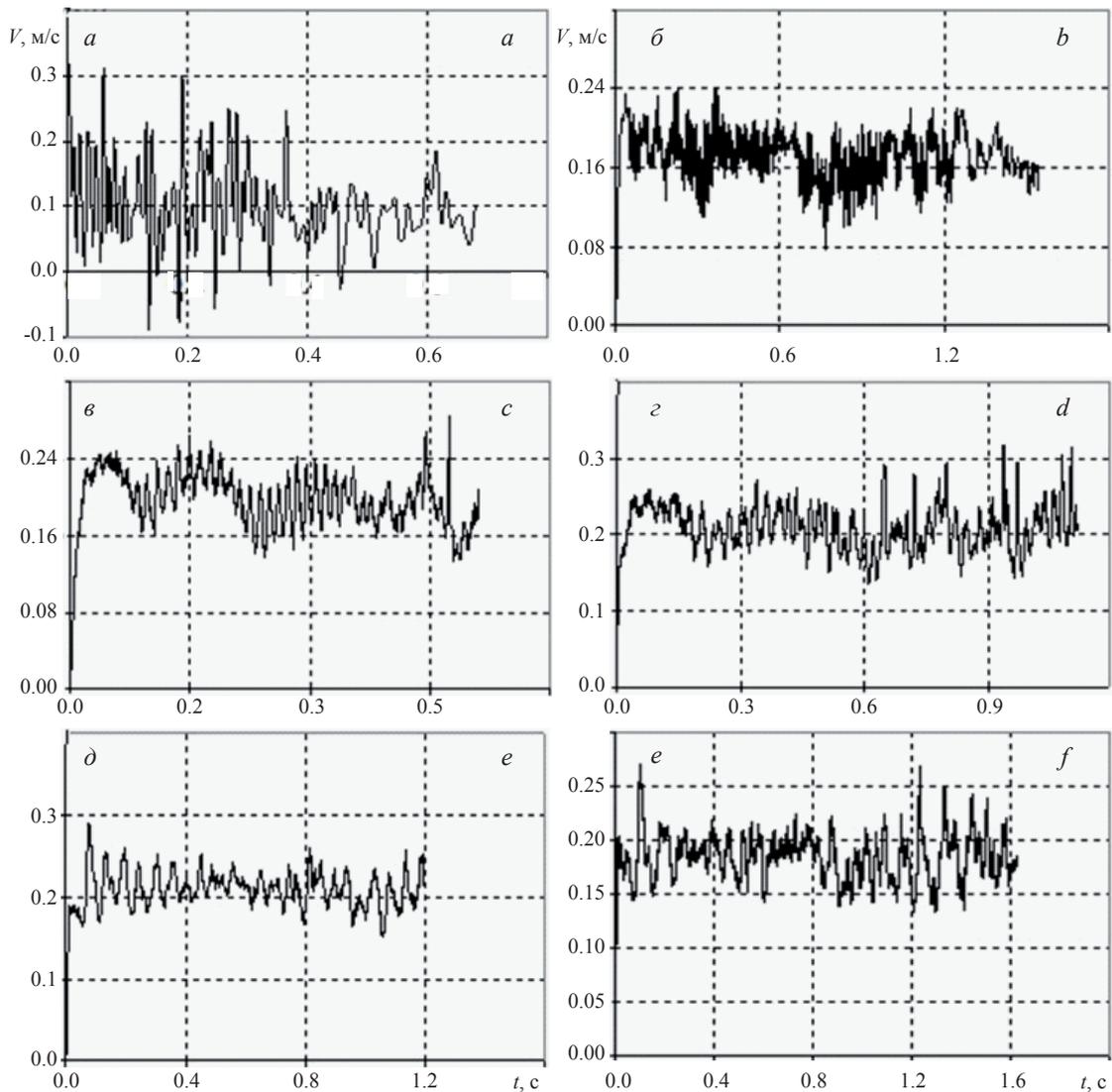


Рис. 3. Временные зависимости скорости всплытия пузыря различного диаметра  $d$ :  
 $a$  — 1 мм;  $б$  — 2.5 мм;  $в$  — 3 мм;  $г$  — 5 мм;  $д$  — 8 мм;  $е$  — 10 мм.

Fig. 3. The time dependence of the velocity of rising of a bubble of different diameter  $d$ :  
 $a$  — 1 mm;  $b$  — 2.5 mm;  $c$  — 3 mm;  $d$  — 5 mm;  $e$  — 8 mm;  $f$  — 10 mm.

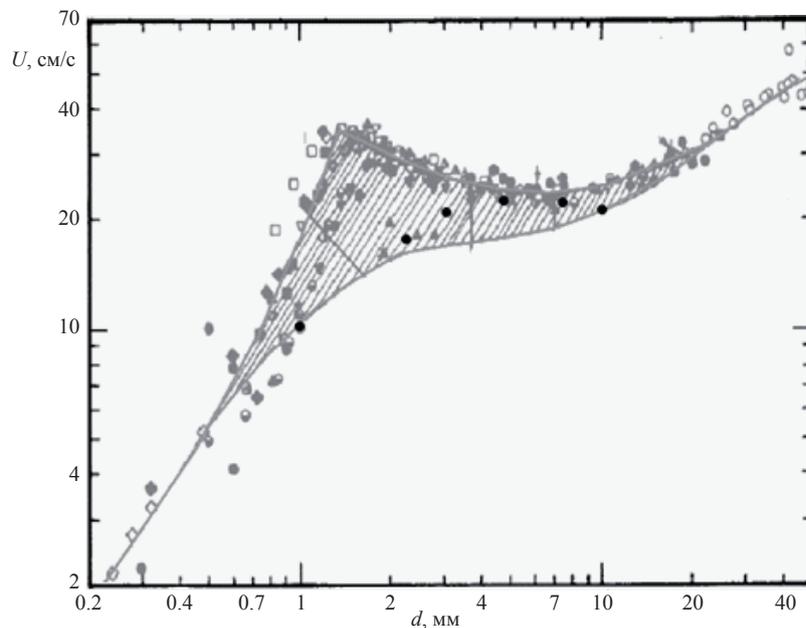


Рис. 4. Установившаяся скорость всплытия пузырька как функция диаметра. (черные точки — значения, полученные в данной работе, серые и белые точки — экспериментальные и теоретические данные [2, 10, 15, 25—27]).

Fig. 4. Terminal velocity as a function of diameter for air bubbles in water. (black dots — the values obtained in this paper, gray and white dots — experimental and theoretical data [2, 10, 15, 25—27]).

и данными расчетами для пузырьков с диаметром от 5 до 10 мм, тем самым показывая качественное согласие результатов. Для всех пузырьков, кроме пузырей с  $d = 5$  и 8 мм, значения средней скорости всплытия занижены относительно данных диаграммы для чистой воды. Для пузырей с диаметром  $d = 5$  и 8 мм значения средней скорости всплытия 0.22 и 0.21 м/с соответственно, хорошо согласуются с результатами на диаграмме. Отметим, что такие значения скорости всплытия пузырьков соответствуют числам Рейнольдса от 100 до 1100, то есть переходному и турбулентному режиму всплытия.

*Анализ траектории всплытия.* Принимая во внимание полученные данные о характере следа за пузырьком и изменении его формы, можно предположить развитие неустойчивости, вызванной этими двумя факторами. Неустойчивость обуславливает зигзагообразное движение пузырька, которое, возможно, перерождается в спиралеобразную траекторию. Данные рассуждения подтверждаются рис. 5, на котором представлены траектории движения пузырьков разных диаметров в вертикальных плоскостях.

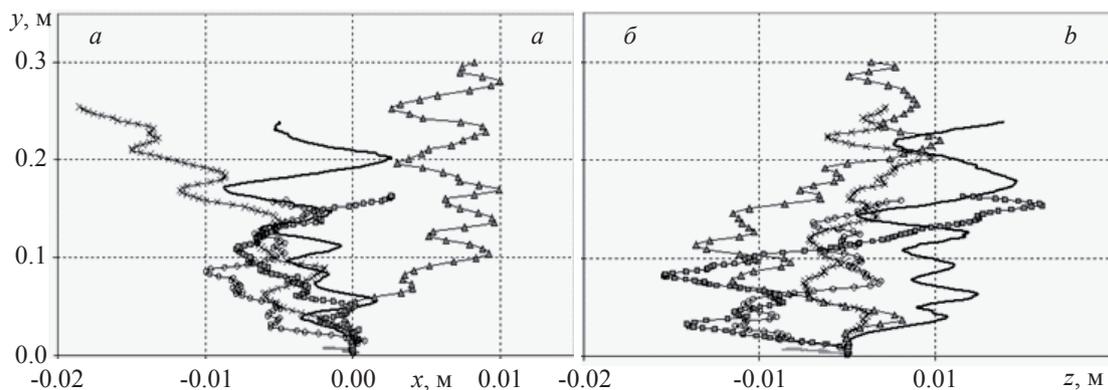


Рис. 5. Траектории движения пузырьков разных диаметров в вертикальных плоскостях:  $a$  —  $(x-y)$ ;  $b$  —  $(z-y)$  (— — 1 мм; ■ — 2.5 мм; ○ — 3 мм; — — 5 мм; × — 8 мм; ▲ — 10 мм).

Fig. 5. The trajectories of motion of the bubbles of different diameters in vertical planes:  $a$  —  $(x-y)$ ;  $b$  —  $(z-y)$  (— — 1 mm; ■ — 2.5 mm; ○ — 3 mm; — — 5 mm; × — 8 mm; ▲ — 10 mm).

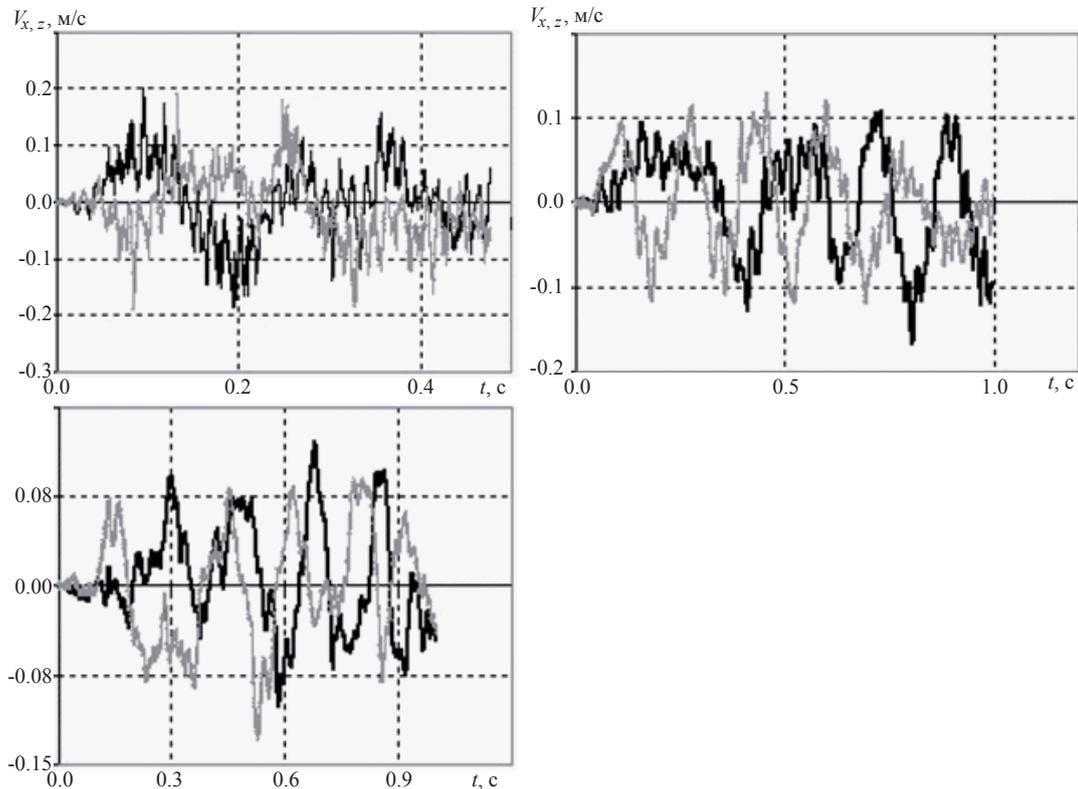


Рис. 6. Графики поперечных компонент скорости пузырьков разных диаметров:  
 $a$  — 3 мм;  $b$  — 5 мм;  $c$  — 10 мм (черный —  $V_x$ ; серый —  $V_z$ ).

Fig. 6. Graphics of transverse components of the velocity of bubbles of different diameters:  
 $a$  — 3 mm;  $b$  — 5 mm;  $c$  — 10 mm (black —  $V_x$ ; grey —  $V_z$ ).

Видно, что пузырек диаметром 1 мм движется прямолинейно, совершая хаотичные движения вдоль своей траектории. Все остальные пузырьки совершают периодическое движение: зигзагообразное или спиралеобразное. При рассмотрении траектории пузырька  $d = 5$  мм с разных ракурсов становится видно, что всплытие сначала происходит по зигзагу, превращающегося затем в спираль.

Изменение зигзагообразного характера всплытия на спиралеобразный по мере увеличения диаметра пузырька хорошо видно из графиков поперечных компонент скорости, представленных на рис. 6.

Наблюдается периодическое движение в обоих направлениях. Сначала колебания  $V_x$  и  $V_z$  нестабильные, различаются между собой по периоду, имеют непостоянный фазовый сдвиг относительно друг друга. После участка нестабильности пузыри диаметром  $d = 5$  и 10 мм выходят на траекторию с устойчивым режимом всплытия с постоянным фазовым сдвигом и одинаковыми периодами для поперечных компонент скоростей. При этом  $V_x$  и  $V_z$  колеблются почти в противофазе, с небольшим фазовым сдвигом. В работах [10, 16, 17, 25, 28] отмечено, что периодическую траекторию представляют две моды, соответствующие горизонтальным осцилляциям скорости пузырька в двух перпендикулярных направлениях. Эти моды имеют одинаковую частоту и относительный фазовый сдвиг на  $\pi/2$  в случае спирального движения. Приведенные данные косвенно подтверждают выход на спиралеобразный режим движения, который следует за промежутком нестабильности, представляющим переход от зигзагообразного к спиралеобразному режиму. Можно сделать вывод, что для пузырей с  $d \geq 5$  мм наблюдается выход на спиральный режим течения, а для пузырей меньшего диаметра - переходный зигзагообразный тип всплытия.

Количественные оценки относительно характеристик спирали/зигзага могут быть получены из измерений частоты и амплитуды периодического движения в разных плоскостях. В табл. 1 представлены амплитуды колебаний пузырька по горизонтальному и вертикальному направлениям. Для пузырьков  $d < 3$  мм оценки частоты и амплитуды колебаний по проекциям траектории на плоскости  $XY$  и  $ZY$  затруднительны, поскольку всплытие носит нестабильный характер. Из табл. 1 также можно сделать

**Амплитуды колебаний пузырьков в координатных плоскостях**  
**The amplitudes of oscillations of the bubbles in the coordinate planes**

Диаметр (мм)	3	5	10
$\Delta x$ (мм), XY	3.5	4	3
$\Delta y$ (мм), XY	45	35	30

вывод, что амплитуды колебаний в плоскости, перпендикулярной основной оси спирали/зигзага, для пузырей разного диаметра очень близки.

В целом, полученные амплитуды колебаний близки к экспериментальным данным [14], где для пузырька  $d = 2.5$  мм получено значение амплитуды 4.3 мм.

Наблюдаемый характер всплывания можно объяснить срывом несимметричных вихрей, приводящим к появлению боковой (поперечной) компоненты подъемной силы. Когда вихрь отрывается, пространство за телом, которое он занимал, заполняется более медленной жидкостью, скорость падает, давление возрастает, значит, нестационарная боковая сила увеличивается. Это подтверждается графиками изменения поперечных компонент скорости согласно изменениям соответствующих компонент силы. Вихри придают значительный момент пузырьку.

Силы, действующие на пузырек, вычислялись аналогично случаю твердой сферы по формуле (2). За исключением того, что в качестве давления в данном случае использовалось  $p_{piezo} = p_{stat} - \rho \vec{g}(\vec{r} - \vec{r}_{ref})$  ( $p_{stat}$  — статическое давление).

Из рис. 7 видно, что колебания скорости и силы происходят в противофазе. В табл. 2 приведены данные о частоте срыва вихрей, вычисленные из частоты колебания силы и из данных о траектории движения пузырей. Силы изменяются с той же частотой, с какой происходит колебание пузырька в горизонтальной плоскости, что обусловлено колебанием поперечных компонент скорости.

**Частота колебаний сил и траектории пузырьков**  
**The frequency of oscillations of forces and the trajectory of the bubbles**

Диаметр (мм)	2.5	3	5	8	10
Частота (1/с) (графики сил)	6.2	6	5.6	4.54	4.95
Частота (1/с) (графики траектории)	5.1	5.95	5.8	4.73	4.9

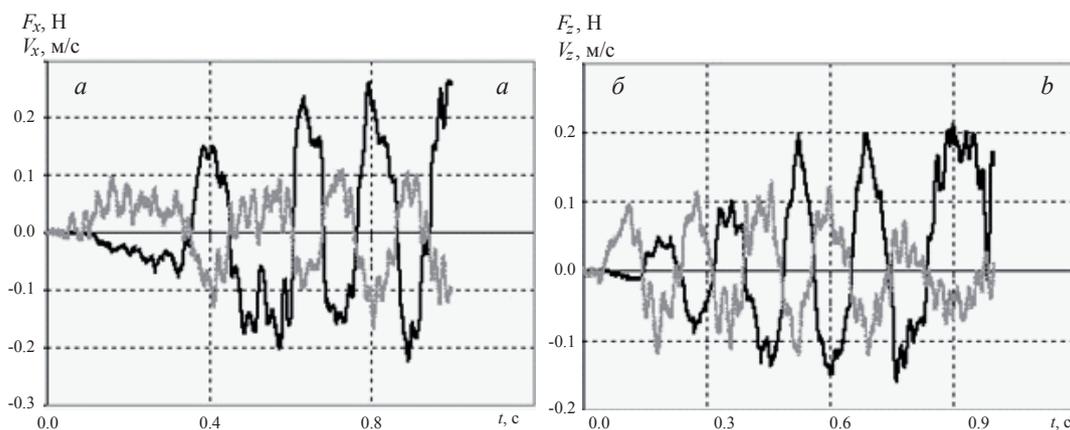


Рис. 7. Графики согласованности поперечных компонент скорости с соответствующими компонентами силы для пузырька  $d = 5$  мм: *a* — (черный —  $F_x$ ; серый —  $V_x$ ); *b* — (черный —  $F_z$ ; серый —  $V_z$ ).

Fig. 7. The consistency graphics of the transverse velocity components with corresponding force components for a bubble  $d = 5$  mm: *a* — (black —  $F_x$ ; grey —  $V_x$ ); *b* — (black —  $F_z$ ; grey —  $V_z$ ).

В [29] приведены данные о средней частоте колебаний пузырьков порядка 5 Гц, что согласуется с представленными в таблице величинами.

Представленные выше результаты частично подтверждают утверждения, сделанные в [10, 16, 25—28] о том, что зигзагообразное движение связано с регулярным образованием и высвобождением противоположно ориентированных вихревых структур. Однако плоскость зигзага неустойчива, и развивается вторая мода осцилляций, связанная с изменением формы пузырька, что приводит к формированию спиралеобразной траектории всплытия. Спиральный путь за пузырьком состоит из двойных пар вихревых нитей по потоку, которые наматываются на спиральную траекторию и присоединяются к основанию пузыря в антисимметричной позиции.

Влияние изменения формы пузырька на возникновение спиральной траектории всплытия подтверждается наблюдениями за всплытием твердых сфер. В этом случае форма поверхности фиксирована, а наблюдаемые траектории только прямолинейные, либо зигзагообразные. Это доказывают как данные из работы [3], так и результаты данных численных расчетов.

На рис. 8 представлены траектории движения сфер в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Из представленных графиков видно, что сферы диаметром 10 и 20 мм совершают периодическое движение как относительно оси  $X$ , так и относительно оси  $Z$ . Траектории движения сфер в горизонтальной плоскости определяют это периодическое движение как зигзагообразное. При этом для сферы диаметром 10 мм из рис. 5 видно, что сначала плоскость зигзага расположена вертикально под углом 45 градусов к вертикальным координатным плоскостям, а затем она меняет свое положение. Сфера диаметром 20 мм после короткого периода установления движется в одной вертикальной плоскости по зигзагу.

Сфера диаметром 7 мм сначала совершает малые колебания, которые затем затухают, и дальнейшее всплытие происходит по наклонной прямой. Данные о траектории сферы диаметром 5 мм (рис. 8) приведены до момента времени равного 1 с. Отметим, что за это время горизонтальные смещения сферы составляют  $0.5D$ . Такое движение следует рассматривать как прямолинейное.

Зигзагообразное движение связано с регулярным образованием и высвобождением противоположно ориентированных вихревых структур. На рис. 9 представлены характерные вихревые следы, получаемый в описанных выше расчетах для сфер разных диаметров. Они состоят из двойных пар нитей вихрей, которые присоединяются к основанию сферы в антисимметричной позиции.

Видно, что сфера диаметром 5 мм, двигаясь вертикально, оставляет симметричный след без смены ориентации вихрей. След, оставляемый за сферой диаметром 7 мм, представляет собой цепочку одно-сторонне ориентированных вихревых структур, благодаря которым возникает подъемная боковая сила, способствующая возникновению наклонного режима всплытия. Для сфер диаметром 10 и 20 мм след включает в себя последовательность вихревых колец, формирующиеся в течение каждого цикла движения тела. При этом при переходе от одного кольца к другому ориентация вихрей меняется.

На рис. 10 представлены графики поперечных компонент скорости тела для сфер диаметром 10 и 20 мм.

Из рис. 10 видно, что скорость движения в обоих поперечных направлениях колеблется в соответствии с отрывом вихрей с поверхности тела. Колебания происходят с одинаковой частотой, более того, они совпадают по фазе. Такое совпадение характеризует именно зигзагообразное движение.

\*\*\*

Проведено численное исследование динамики свободно всплывающего пузырька с помощью трехмерной методики, реализованной в пакете программ ЛОГОС. Представлена качественная картина всплытия. Даны количественные характеристики относительно скорости всплытия пузырьков разных диаметров, частоты и амплитуды периодического движения пузырьков. В целом расчетная скорость всплытия немного занижена относительно экспериментальных и теоретических данных для чистой воды. Для пузырьков диаметром 5 и 8 мм результаты хорошо согласуются с известными экспериментальными и расчетными данными [10, 15]. Наблюдается согласие результатов по частоте и амплитуде осцилляций пузырька с экспериментальными данными.

Для пузырей диаметром от 2.5 до 10 мм численно подтверждено, что траектория пузырьков неустойчива и представляет собой периодическое зигзагообразное или спиралеобразное движение. В численных экспериментах показано, что колебания траектории пузырька согласуется с осцилляцией сил, действующих на пузырек. Подтверждена тенденция стремления фазового сдвига между поперечными компонентами скорости всплытия к  $\pi/2$  по мере приближения траектории к спиральной.

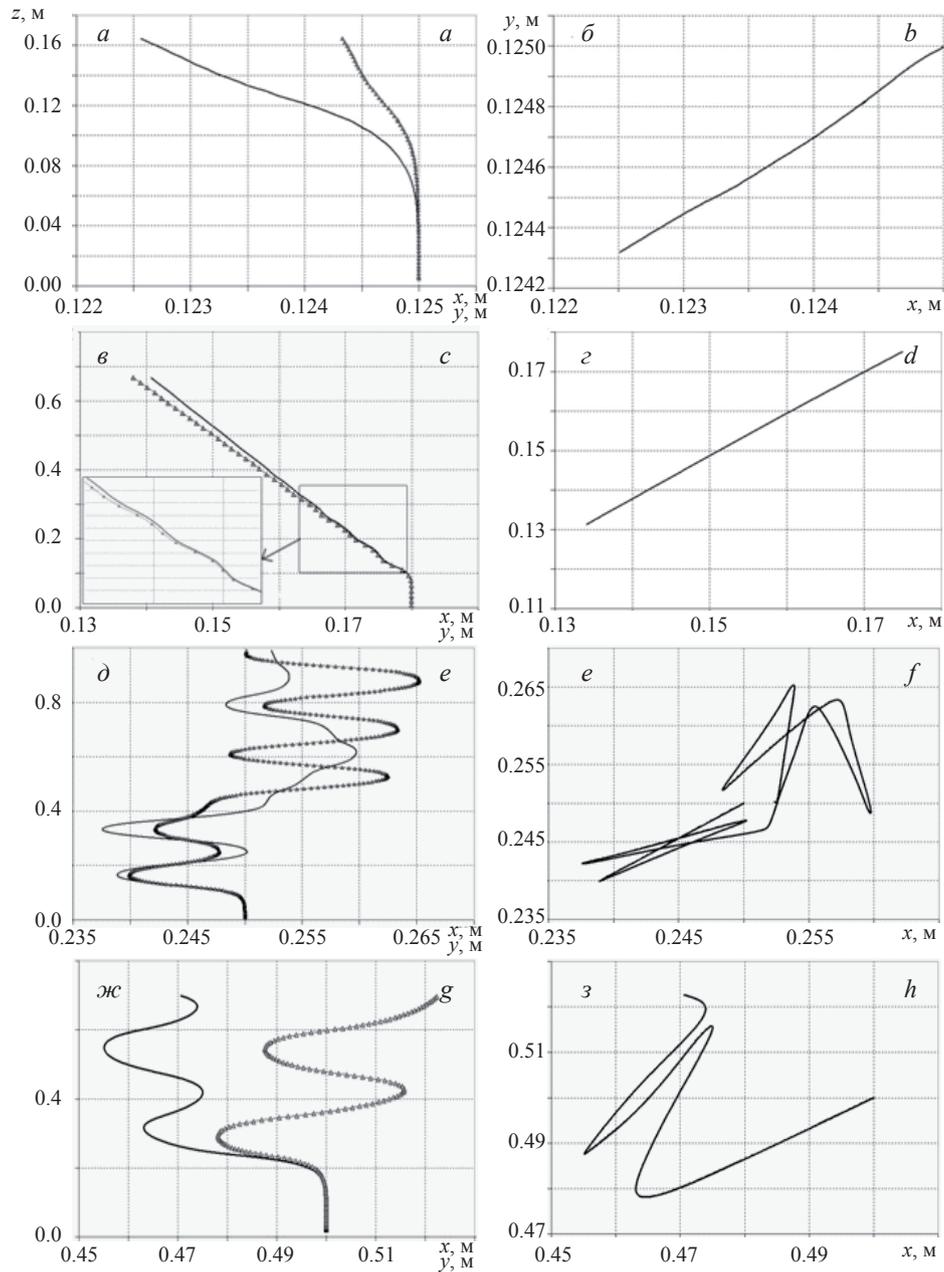


Рис. 8. Траектория движения сфер различного диаметра: *a* — 5 мм; *б* — 7 мм; *в* — 10 мм; *г* — 20 мм: (слева — в вертикальных плоскостях (*x-z*) и (*y-z*) ( — *x*; — *y*)); справа — в горизонтальной плоскости (*x-y*)).

Fig. 8. The trajectory of movement of the spheres of different diameter: *a* — 5 mm; *b* — 7 mm; *c* — 10 mm; *d* — 20 mm: (on the left — in vertical planes (*x-z*) and (*y-z*) ( — *x*; — *y*)); on the right — in the horizontal plane (*x-y*)).

Дополнительную информацию относительно механизма возникновения спиральной траектории в случае движения пузырьков дает сравнение с возможными видами траекторий всплытия сфер аналогичных диаметров, полученными в данной работе и представленными в работе [3].

При исследовании всплытия твердых сфер разного диаметра с  $m^* = 0.2$  установлено, что характер всплытия сфер меняется с увеличением диаметра (числа Рейнольдса). Сфера диаметром 5 мм всплывает прямолинейно, диаметром 7 мм – по наклонной прямой, а сферы диаметром 10 и 20 мм всплывают по зигзагу. Поскольку для твердых сфер спирального движения не наблюдается, это дает основание полагать, что различие в поведении газовых пузырей и твердых сфер происходит из-за того, что пузыри способны легко деформироваться.

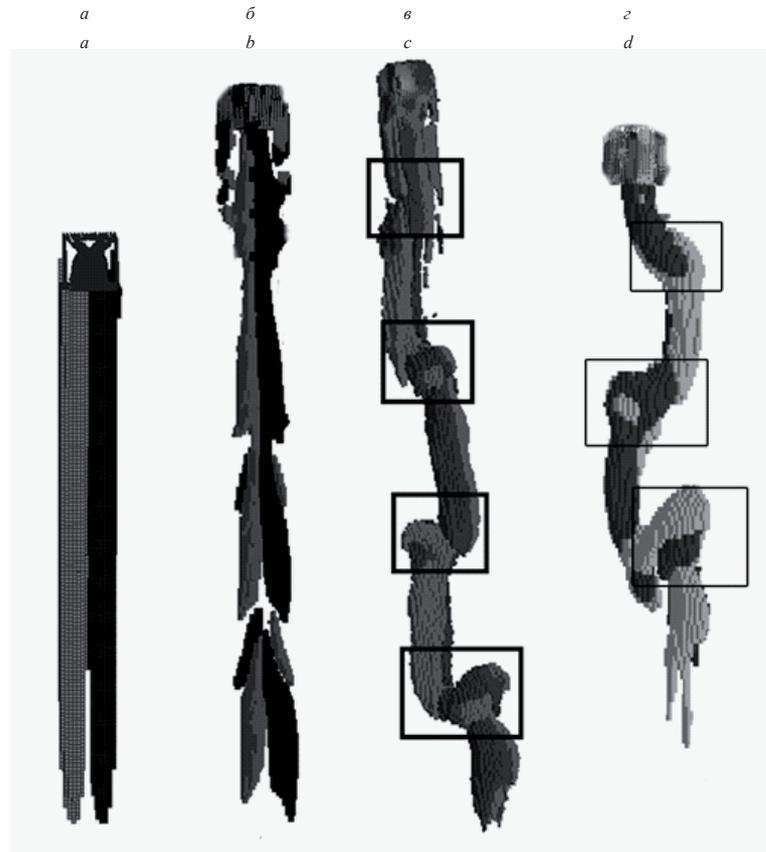


Рис. 9. Характерные вихревые следы, остающиеся за движущейся сферой:  
 а —  $d = 5$  мм; б —  $d = 7$  мм; в —  $d = 10$  мм; г —  $d = 20$  мм.

Fig. 9. Characteristic vortex trases behind a moving sphere:  
 а —  $d = 5$  mm; б —  $d = 7$  mm; в —  $d = 10$  mm; г —  $d = 20$  mm.

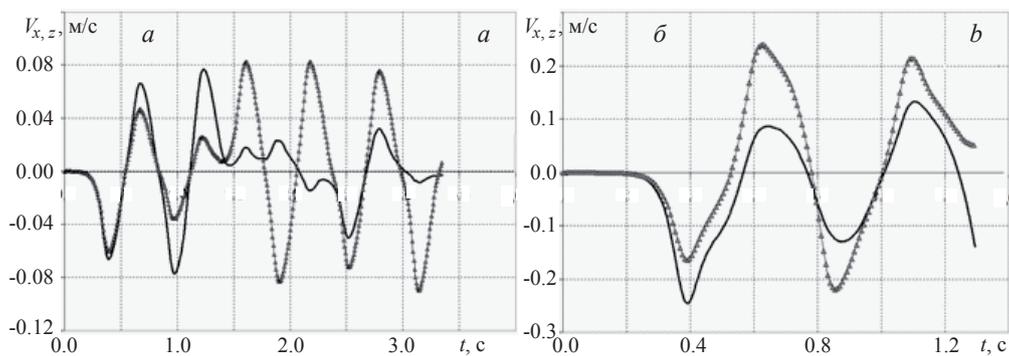


Рис. 10. Графики поперечных компонент скорости в зависимости от времени:  
 а —  $d = 10$  мм; б —  $d = 20$  мм (черный —  $V_x$ ; серый —  $V_z$ ).

Fig. 10. Graphics of the transverse velocity components versus time:  
 а —  $d = 10$  mm; б —  $d = 20$  mm (black —  $V_x$ ; grey —  $V_z$ ).

Показано, что каждому из наблюдаемых типов всплыва сфер соответствует свой вихревой след. Описан основной механизм возникновения зигзагообразной траектории, определяемый регулярным образованием и высвобождением противоположно ориентированных вихревых структур, которые уносят часть присоединенной массы.

*Представленные результаты получены в рамках выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (задание № 5.4568.2017/6.7 и задание № 5.1246.2017/4.6) и при финансовой поддержке грантов*

Президента Российской Федерации по государственной поддержке научных исследований ведущих научных школ Российской Федерации НШ-2685.2018.5 и молодых российских ученых-докторов наук МД-4874.2018.9, а также при финансовой поддержке РФФИ - проекты № 16-01-00267 и 17-05-00067.

### Литература

1. Veldhuis C., Biesheuvel A., Wijngaarden L. Shape oscillations on bubbles rising in clean and in tap water // *Physics of fluids*. 2008. V. 20. P. 1—12.
2. Hua J., Stene J., Lin P. Numerical simulation of 3D bubbles rising in viscous liquids using a front tracking method // *J. Comp. Phys*. 2008. V. 227, N 6. P. 3358—3382.
3. Horowitz M., Williamson C.H.K. The effect of Reynolds number on the dynamics and wakes of freely rising and falling spheres // *J. Fluid Mech*. 2010. V. 651. P. 251—294.
4. Букреев В. И., Костомаха В. А., Романов Е. М. Погружение шара в однородной жидкости // *Труды Международной конференции RDRAMM-2001*. 2001. Т. 6, Ч. 2. С. 144—149.
5. Архипов В. А., Васенин И. М., Ткаченко А. С., Усанина А. С. О нестационарном всплывании пузырька в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2015. № 1. С. 86—94.
6. Abbad M., Souhar M. Effects of the history force on an oscillating rigid sphere at low Reynolds number // *Experiments Fluids*. 2004. N 36. P. 775—782.
7. Stepanyants Y. A., Yeoh G. H. Particle and bubble dynamics in a creeping flow // *Eur. J. Mech. – B/Fluids*. 2009. V. 28. P. 619—629.
8. Lovalenti P. M., Brady J. F. The force on a bubble, drop, or particle in arbitrary time-dependent motion at small Reynolds number // *Phys. Fluids A*. 1993. V. 5. P. 2104—2116.
9. Hassan H., Stepanyants Y. Dynamics of two charged particles in a creeping flow // *J. Phys. Maths*. 2015. V. 6, N 2. P. 1000145-1-7.
10. Rusche H. Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at high phase fraction // *PhD thesis, Imperial College of Science, Technology & Medicine, Dep. of Mech. Eng., London, 2002*.
11. Jenny M., Dusek J., Bouchet G. Instabilities and transition of a sphere falling or ascending freely in a Newtonian fluid // *J. Fluid Mech*. 2004. V. 508. P. 201—239.
12. Preukschat A. W. Measurements of drag coefficients for falling and rising spheres in free motion // *PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, 1964*.
13. MacCready P. B., Jex Y. R. Study of sphere motion and balloon wind sensors. *Tech. Rep. Tech. Mem., X53089, NASA, 1964*.
14. Wu M., Gharib M. Experimental studies on the shape and path of small air bubbles rising in clean water // *Phys. Fluid*. 2002. V. 14, N 7. P. L49—L52.
15. Clift R., Grace J. R., Weber M. E. Bubbles, drops and particles. London: Academic Press, 1978.
16. Ellingsen K., Risso F. On the rise of an ellipsoidal bubble in water: oscillatory paths and liquid induced velocity // *J. Fluid. Mech*. 2001. V. 440. P. 235—268.
17. Козелков А. С., Куркин А. А., Пелиновский Е. Н., Курюлин В. В., Тятюшклина Е. С. Моделирование возмущений в озере Чебаркуль при падении метеорита в 2013 году // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2015. № 6. С. 134—143.
18. Chen L., Garimella S. V., Reizes J. A., Leonard E. The development of a bubble rising in a viscous liquid // *J. Fluid Mech*. 1999. V. 387. P. 61—96.
19. Brackbill J. U., Kothe D. B., Zemach C. A continuum method for modelling surface tension // *J. Comp. Phys*. 1992. V. 100. P. 335—354.
20. Kozelkov A. S., Kurkin A. A., Pelinovsky E. N., Tyatyushkina E. S., Kurulin V. V., Tarasova N. V. Landslide-type tsunami modelling based on the Navier-Stokes Equations // *Science of tsunami Hazards*. 2016. V. 35, N 3. P. 106—144.
21. Ferziger J. H., Peric M. Computational methods fluid dynamics. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 2002. 423 p.
22. Benek J. A., Buning P. G., Steger J. L. A 3-D Chimera Grid Embedding Technique // *AIAA Paper*. 1985. No. 85—1523.
23. Волков К. Н., Дерюгин Ю. Н., Емельянов В. Н., Карпенко А. Г., Козелков А. С., Тетерина И. В. Методы ускорения газодинамических расчетов на неструктурированных сетках. Москва: Физматлит, 2013. 536 с.
24. Kozelkov A. S., Shagaliev R. M., Kurulin V. V., Yaloz A. V., Lashkin S. V. Investigation of Supercomputer Capabilities for the Scalable Numerical Simulation of Computational Fluid Dynamics Problems in Industrial Applications // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2016. V. 56, N 8. P. 1506—1516.
25. Talaia M.A.R. Terminal velocity of a bubble rise in a liquid column // *International Journal of Physical and Mathematical Sciences*. 2007. V. 1, N 4. P. 220—224.
26. Saffman P. G. On the rise of small air bubbles in water // *J. Fluid. Mech*. 1956. V. 1. P. 249—275.
27. Cuenot B., Magnaudet J., Speranto B. The effect of slightly soluble surfactants on the flow around a spherical bubble // *J. Fluid Mech*. 1997. V. 339. P. 25—29.
28. Esmaeeli A., Tryggvason G. Direct numerical simulation of bubbly flows. Part 2. Moderate Reynolds number array // *J. Fluid Mech*. 1999. V. 385. P. 325—358.
29. Baz-Rodriguez S., Aguilar-Corona A., Soria A. Rising velocity for single bubbles in pure liquids // *Revista Mexicana de Ingenieria Quimica (Mexico)*. 2012. V. 11, N 2. P. 269—278.