

УДК 551.458

© Н. Е. Вольцингер<sup>1</sup>, А. А. Андросов<sup>1,2</sup>, К. А. Клеванный<sup>3</sup>, А. С. Сафрай<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт полярных и морских исследований им. А. Вегенера, Бремерхафен, Германия

<sup>3</sup>ООО «Кардинал-софт», г. Санкт-Петербург

e-mail

## ОКЕАНОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ. ОБЗОР

Представлены работы по аспектам океанологических моделей негидростатической динамики, выполненные за последние два-три десятилетия. Продвижение в этом направлении обязано в первую очередь развитию вычислительной гидродинамики, обозначившей качественно новый современный уровень моделирования динамики Мирового океана и его регионов. Широкая тематика негидростатического моделирования включает рассмотрение процессов и явлений с выраженными вертикальными движениями, для описания которых желателен, а в ряде случаев и необходим, учет динамической компоненты давления. Постановка краевых задач для подсистем уравнений негидростатической динамики, совокупность методов их реализации, оценка и анализ эффектов негидростатики составляет предмет обзора. Основой океанологических негидростатических моделей является постановка и методы решения краевых задач для уравнений Навье—Стокса динамики вязкой несжимаемой жидкости. Необходимое рассмотрение работ, относящихся к этому кругу задач, составляет раздел обзора. Изложение концентрируется на работах, использующих наиболее употребительный проекционный метод реализации океанологических моделей при различных типах дискретизации области: конечно-разностной сеточной, конечно-объемной, конечно-элементной и при различных формах представления решения: в гранично-согласованных координатах, рядами, спектральным разложением и др. Эти приближения тестируются и применяются для моделирования отдельных мезомасштабных процессов и негидростатической динамики подобласти региона в рамках крупномасштабной модели. Структуру проекционного метода определяет расщепление оператора задачи и вычисление приближений поля скорости на этапах временного шага. Приближением может служить решение гидростатической задачи. Такой удобный подход связывает гидростатическое приближение с негидростатическим модулем задачи для уравнений Навье—Стокса, что акцентируется в обозрении.

Обзор краток. Мы старались не перегружать его ни формулами, где это возможно, ни литературой, ибо каждая из приводимых ссылок содержит свою, зачастую обширную, библиографию. Цель — представить в простом и общем виде состояние развитого негидростатического моделирования, элементы которого в уже близкой перспективе сделают возможным решение краевых задач негидростатической динамики обширных областей и протяженных участков шельфа мирового океана на основе параллельных вычислений.

**Ключевые слова:** гидростатика/негидростатика, уравнения Навье—Стокса, типы аппроксимаций, проекционный метод.

*N. E. Voltzinger<sup>1</sup>, A. A. Androsov<sup>1,2</sup>, K. A. Klevanny<sup>3</sup>, A. S. Safray<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Alfred Wegener Institute for Polar and Marine Studies, Bremerhaven, Germany

<sup>3</sup>LLC CARDINAL-Soft, St.-Petersburg, Russia

## OCEANOLOGICAL MODELS OF NON HYDROSTATIC DYNAMICS. A REVIEW

Results devoted to different aspects of oceanographic models for non-hydrostatic dynamics reported during two-three last decades are discussed in this review. Achievement in this field was obtained mainly due to the progress in computational hydrodynamics which marked a qualitatively new current level of World ocean dynamics and its regions modelling. Wide thematic of non-hydrostatic modelling includes consideration of the processes and phenomena with pronounced vertical

Ссылка для цитирования: Вольцингер Н. Е., Андросов А. А., Клеванный К. А., Сафрай А. С. Океанологические модели негидростатической динамики: обзор // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2018. Т. 11, № 1. С. 3—20.

For citation: Voltzinger N. E., Androsov A. A., Klevanny K. A., Safray A. S. Oceanological Models of Non Hydrostatic Dynamics: A Review. *Fundamentalnaya i Prikladnaya Gidrofizika*. 2018, 11, 1, 3—20.

DOI: 10.7868/S207366731801001X

movements. For their description, taking into account the dynamic component of pressure is desirable and in some cases essential. Statement of particular boundary value problems for non-hydrostatic dynamics equations subsystems, methods of their realization and, finally, evaluation and analysis of non-hydrostatic effects are the objectives of the present review. The basis of oceanographic non-hydrostatic models consists in formulation and methods of resolving of boundary problems for the Navier—Stokes equations of viscous incompressible fluid dynamics. A necessary consideration of such works is a section of this review. The presentation focuses at works which use the most common projections method of oceanographic models realization by different types of domain discretization: finite-difference grid, finite-volume, finite-element and different forms of solution presentation: in boundary conformal coordinates, series, spectral decomposition etc. These approximations are tested and used for separate mesoscale processes and non-hydrostatic dynamics of sub-domain of the region in the frame of a large-scale model. The structure of the projection method determines the splitting operator of the task and computation of the velocity fields approach at stages of time step. The hydrostatic problem solution can serve as such an approach. Such a suitable approach links hydrostatic approach with a non-hydrostatic module for the Navier—Stokes equations. That is emphasized in this review.

This review is brief. We tried not to overload it either with formulas, where it was possible, or bibliography because each cited reference in general contains its own wide bibliography. Its goal is presentation in a simple and general view of the status of matured non-hydrostatic modelling which elements will in the near future make it possible to resolve boundary problems of non-hydrostatic dynamics of wide regions and longest section of World ocean shelf on the basis of parallel computing.

**Key words:** hydrostatic/non hydrostatic, Navier-Stokes equations, types of approximations, projective method.

Классификация движений в океане основывается на отношении их характерных масштабов: вертикального  $H$  и горизонтального  $L$ . По значению  $\varepsilon = H/L$  ориентировочно определяют принадлежность движения к одному из двух классов: гидростатическому (ГС) и негидростатическому (НГ). В первом случае при ГС моделировании предполагается допустимость пренебрежения вертикальным ускорением в уравнении движения по вертикали, что выражает баланс между вертикальным ускорением и силой плавучести. Во втором случае уравнение движения по вертикали не редуцируется и определяет динамическую компоненту давления.

Выбор в пользу НГ модели естественен при  $\varepsilon > O(10^{-2})$  и столь же мотивирован отказ от нее при  $\varepsilon < O(10^{-2})$  в силу высокой точности ГС моделирования крупномасштабных процессов. Между этими двумя классами движений есть место и для крупномасштабных длинноволновых движений при их трансформации на выраженных элементах рельефа, когда влиянием НГ фактора нельзя пренебречь. В этом смысле можно говорить, что изменение  $\varepsilon$  в динамическом процессе выражает связь между масштабами движения и давлением — этой важнейшей после энергии физической характеристикой среды. И действительно, при разложении уравнений Эйлера в ряд по степени  $\varepsilon^2$  — числу Фридрихса, первое приближение дает гидростатические уравнения мелкой воды, а второе приближение содержит дисперсионную поправку к давлению [1]. НГ модели характеризуются использованием уравнения движения по вертикали, определяющим динамическую компоненту давления и, строго говоря, нелинейно-дисперсионные приближения не входят в этот круг, если считать негидростатикой все, что не гидростатика. Совокупность явлений, моделируемых на основе двумерных (2D) и трехмерных (3D) НГ уравнений, включает, если ограничиться лишь небольшим числом ссылок, бароклинную неустойчивость [2], глубоководную конвекцию [3, 4], мезомасштабную циркуляцию [5], гравитационные течения над наклонным дном [6, 7], внутренние волны [8—10], баротропно-бароклинное взаимодействие [11], приливную динамику над подводной горой [12], нелинейно-дисперсионное взаимодействие поверхностных волн [13, 14], процессов длинноволнового наката, схода оползня и генерируемого им волнового поля [15—18], разрушения волн [19], плотностные течения [20], НГ эффекты взаимодействия вода-воздух [21] и др. Эти работы и содержащееся в них обильное количество библиографических ссылок определяют аспекты приложений краевых задач НГ динамики.

Объектами 3D НГ моделирования являются регионы шельфа, окраинные моря, проливы и эстуарии с изменчивой морфометрией, резким перепадом глубин, водоворотами и разнонаправленными течениями — элементов активной динамики с выраженным вертикальным движением, что требует учета НГ компоненты давления при моделировании структур Мирового океана.

Моделирование процессов и явлений на НГ масштабе выполняется на основе численного решения краевых задач для уравнений вязкой несжимаемой жидкости — осредненных по Рейнольдсу уравнений

Навье—Стокса. В океанологии такие задачи модифицируются в соответствии с имманентным содержанием геофизической гидродинамики и характеризуются рядом особенностей, к которым относится сложность геометрии реальной области, наличие свободной поверхности, стратификация поля плотности, учет силы Кориолиса. При этом давление представляется либо в его целостности форме, как в уравнениях Навье—Стокса, либо в виде суммы составляющих:

$$P = P_r + q, \quad (1)$$

где  $P_r$  — гидростатическая компонента давления, являющаяся суммой баротропной и бароклинной его компонент, определяемая редукцией уравнения движения по вертикали

$$\partial/\partial z P_r = -g\rho, \quad (2)$$

а  $q$  — динамическая компонента, обязанный динамике поля скорости.

Принимая  $\rho = \rho_0 + \rho'$ ,  $\rho_0$  — отсчетное значение плотности, из (2) следует:

$$P_r = P_a + g\rho_0(\zeta - z) + g \int_z^\zeta \rho' dz,$$

где  $P_a$  — атмосферное давление на свободной поверхности  $\zeta$ , принимаемое обычно для сравнительно непротяженных акваторий постоянным. Отсюда

$$\nabla_2 \frac{P}{\rho_0} = g \nabla_2 \left( \zeta + \rho_0^{-1} \int_z^\zeta \rho' dz \right) + \nabla_2 q, \quad (3)$$

где  $\nabla_2 = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  — двумерный оператор градиента.

Океанологические задачи, в которых давление выступает в целостном виде, являются непосредственным аналогом краевых задач для уравнений Навье—Стокса [22—24]. Расщепления давления согласно (1) позволяет получить общую картину динамики, в которой выделены фрагменты, отвечающие баротропной и бароклинной компонентам ГС давления [5, 25, 26]; при этом НГ описание может относиться либо ко всему региону, либо к его подобласти, например, со свалом глубин или подводной горой, причем допущение гидростатики может нарушаться и локально и в отдельные интервалы времени, как это происходит на экстремумах приливного цикла [27, 12].

Подход, заключающийся в моделировании крупномасштабной ГС динамики в протяженных областях с выделением подобластей НГ с локально выраженным рельефом, рационален в связи с высокими вычислительными затратами на реализацию НГ модели. В [26] оценка затрат показывает, что для компьютера с производительностью  $O(10^6)$  операций/с расчет одного периода суммарного прилива в 3D-области, содержащей всего  $O(10^5)$  узлов, в гидростатической постановке занимает около десятка минут. Расчет НГ модуля требует увеличения сеточного разрешения хотя бы на порядок, ибо на грубой сетке негидростатические эффекты могут оказаться неразличимыми; на такой сетке, содержащей несколько миллионов узлов, основное время занимает решение 3D-эллиптической задачи для определения динамического давления на каждом временном шаге и весь расчет требует около десяти часов. Таким образом, при удачном алгоритме и выделении подобластей НГ моделирование в относительно небольшой области можно выполнить при использовании однопроцессорной системы, тогда как решение полной задачи в областях большой протяженности и глубины требует параллельных вычислений.

Целесообразность выделения подобластей НГ помимо априорных представлений может опираться на количественную оценку значимости НГ фактора. Из рассмотрения уравнения движения по вертикали с масштабом горизонтальной скорости  $U$  и частотой плавучести  $N = \left( \frac{-g\rho_z}{\rho_0} \right)^{1/2}$  следует, что вер-

тикальным ускорением частиц жидкости можно пренебречь, и давление будет гидростатическим при  $\Gamma = \frac{\varepsilon U^2}{N^2 H^2} \ll 1$  [2].

Если роль НГ существенна, то значения критерия  $\Gamma$  должны быть гораздо большими. Такая ситуация типична в регионе подводной горы, когда параметр  $\varepsilon$  выражает уже не отношение характерных размеров, а некий средний уклон:  $\varepsilon = H/L = \operatorname{tg} \lambda$ ; при этом само понятие характерной глубины на горном рельефе теряет смысл и должно быть заменено на локальную склоновую глубину  $h_*(x, y)$ . Пусть  $h_0$  — глубина над вершиной горы,  $h$  — глубина у ее подошвы, тогда  $h_0 \leq h_* \leq h$  и на горном склоне критерий  $\Gamma$  трансформируется к виду:

$$\gamma = \frac{U^2}{N^2 h_*^2} \operatorname{tg}^2 \lambda. \quad (4)$$

Заметим, что (4) содержит вертикальную придонную скорость в силу кинематического условия  $w = -U h_x \approx U \operatorname{tg} \lambda$ , и  $\gamma$ , выявляя пространственно-временное распределение НГ эффектов, служит критерием их значимости. Экспериментальные расчеты с подводной горой показывают, что действительно  $\Gamma \rightarrow \gamma$  с увеличением крутизны склона и  $\gamma$  может оказаться величиной  $O(1)$ , определяя подобласти, требующие перестройки алгоритма для повышения репрезентативности модели [12].

Способ выделения локальных НГ эффектов в длинноволновом движении, предложенный в [28], основывается на оценке изменения НГ градиента давления по определяемой гидростатической производной  $w$ , в уравнении движения по вертикали. Другой способ заключается в оценке изменения уровня в вертикальной компоненте контравариантной скорости для определения целесообразности пересчета уровня после реализации НГ модуля либо для выделения интервала учета НГ в приливном процессе, о чем будет сказано ниже.

В обзоре рассматриваются океанологические модели НГ динамики, строящиеся на основе постановки и численной реализации краевых задач для уравнений Навье—Стокса. Модели классифицируются по принадлежности к типу дискретизации физической области: сеточному, конечно-объемному и конечно-элементному, каждый из которых имеет свои, но по существу, близкие методы численной реализации модели.

Далее приводится постановка 3D негидростатической краевой задачи, включающей при расщеплении градиента давления согласно (3) блок задачи для примитивных уравнений. Дается обзор численных методов реализации НГ моделей. Приводятся некоторые результаты, иллюстрирующие роль НГ в мезомасштабных движениях и локально в длинноволновой динамике. Обсуждается состояние и перспективы НГ моделирования.

#### Океанологические модели динамики вязкой несжимаемой жидкости

**Гидростатические модели.** Океанологические 3-D модели в гидростатическом приближении строятся на основе постановки и решения примитивных уравнений

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + g \nabla_z \zeta + g \rho_0^{-1} \nabla_z \int_z^\zeta \rho' dz + f \mathbf{v}' = \nabla_z (K \nabla_z \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \mathbf{v}_z)_z, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{v} = (u, v)$  — вектор горизонтальной скорости;  $\mathbf{u} = (\mathbf{v}, w)$ ;  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$  — трехмерный оператор градиента;  $f$  — коэффициент Кориолиса;  $\mathbf{v}' = (-v, u)$ ;  $K, \nu$  — коэффициенты турбулентного обмена. Компонента решения — уровень  $\zeta$  определяется из решения задачи для вертикально-осредненных уравнений (5), (6) при кинематических условиях на дне и на свободной поверхности либо из второго из этих условий.

Уравнения решаются в области  $Q_\Gamma = Q \times [0, T^*]$ ,  $Q$  — 3D-область, ограниченная свободной поверхностью воды  $\zeta(x, y, t)$ , дном  $h(x, y)$  и боковой поверхностью  $\partial Q: Q = \{x, y, z; x, y \subset \Omega, -h \leq z \leq \zeta\}$ ,  $0 \leq t \leq T^*$ , при начальных условиях  $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^0$ , удовлетворяющих (6),  $\zeta|_{t=0} = \zeta^0$  и некоторых граничных условиях [29]. ГС модель обычно включает адвективно-диффузионные уравнения для температуры и солёности, позволяющие определить поле плотности  $\rho$  и замыкание для определения коэффициентов турбулентного обмена.

Высокая точность ГС приближения при отношении характерных масштабов  $\varepsilon = H/L < O(10^{-2})$  определила успешность построения моделей крупномасштабных длинноволновых процессов: региональных и глобальных приливов [30], морских наводнений [31], длинноволновой прибрежной динамики [32], океанских инерционно-гравитационных волн [33] и др.

Преимущество примитивных уравнений перед двумерными уравнениями мелкой воды, вполне пригодными для описания длинноволновых процессов, заключается в возможности с некоторым приближением описать вертикальную структуру гидрофизических полей. Вместе с тем решение 3D краевой задачи для этих уравнений в области с открытой границей связано с известными трудностями, ибо такая задача некорректна [29]. Единственной возможностью корректной постановки задачи в этом случае является разложение решения по собственным функциям вертикального оператора, связанного

с данной задачей и решения спектральных двумерных гиперболических уравнений мелкой воды для каждой моды [34, 35]. Ситуация облегчается тем, что внешняя мода, определяемая на предшествующем шаге или задаваемая, может использоваться для конструкции условий на открытой границе — конструкции, вообще говоря, сомнительной, сопровождаемой различными способами релаксации решения в приграничной зоне [36, 37].

Открытая граница — «ахиллесова пята» краевой задачи для примитивных уравнений.

**Негидростатическая краевая задача.** В динамическом уравнении

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \mathbf{g} + \frac{1}{\rho_0} \nabla q + \mathbf{f} \times \mathbf{u} = (\mathbf{v} \mathbf{u}_z)_z + \nabla_2 (K \nabla_2 \mathbf{v}),$$

где  $\mathbf{g} = (0, 0 - g)$ ,  $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f)$ , где компоненты  $\mathbf{f}$  — проекции на координатные оси; в принятой правой системе координат  $f_x = 0$ ; ГС комбинация дополняется градиентом динамического давления,  $\nabla q$ . В уравнении вертикального движения в приближении Буссинеска имеем:

$$\frac{1}{\rho} P_z + g + \frac{1}{\rho} q_z = \frac{P_z}{\rho_0} + g \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{1}{\rho} q_z = \frac{1}{\rho_0} q_z,$$

и полная гидродинамическая система уравнений записывается в виде:

$$\mathbf{v}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + g \nabla_2 \zeta + g \rho_0^{-1} \nabla_2 \int_z^\zeta \rho' dz + \frac{1}{\rho_0} \nabla_2 q + \mathbf{f} \mathbf{v}' + \mathbf{f}' \mathbf{w} = (\mathbf{v} \mathbf{v}_z)_z + \nabla_2 (K \nabla_2 \mathbf{v}), \quad (7)$$

$$w_t + \mathbf{u} \cdot \nabla w + \frac{1}{\rho_0} q_z - f_y u = (\mathbf{v} w_z)_z + \nabla_2 (K \nabla_2 w), \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$(\mathbf{v}' = (-v, u), \mathbf{f}' = (f_y, 0)). \quad (9)$$

Уравнения (7)–(9) решаются при граничных условиях по вертикали:

$$v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0, \quad v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \Big|_{z=\zeta} = \frac{\boldsymbol{\tau}_\zeta}{\rho_0}, \quad (10)$$

где  $\boldsymbol{\tau}_\zeta$  — вектор касательных напряжений на свободной поверхности; на непроницаемой части боковой поверхности  $\partial Q_1$  ставится условие на нормальную компоненту скорости:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\partial Q_1} = 0, \quad (11)$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали. На открытой границе на вытоке  $\partial Q_2$  может использоваться экстраполяция скорости из области или условие

$$\frac{\partial v_n}{\partial n} \Big|_{\partial Q_2} = 0, \quad (12)$$

На втоке обычно задается информация, определяющая обе компоненты скорости и условие, требуемое оператором вязкости:

$$\mathbf{v} \Big|_{\partial Q_2} = \gamma_0, \quad K \frac{\partial v_n}{\partial n} \Big|_{\partial Q_2} = 0. \quad (13)$$

Система уравнений (7)–(9) принадлежит к т.н. типу не вполне параболических уравнений и близка к гиперболической. Отказ от приближения ГС «легализует» ее в том смысле, что НГ краевая задача в области с открытой границей корректна [29].

Условия на открытой границе не являются естественными граничными условиями и ставятся так, чтобы проходящие движения внешней среды не вызывали возмущений внутри области; к тому же условия на втоке и вытоке должны быть согласованы, что выполняется просто только для периодических условий. По большей части условия на открытой границе имеют характер необходимых. В некоторых случаях, например, когда превалирует адвекция и гиперболичность уравнений более выражена, используются и другие условия: безотражательные [38], радиационные, адаптивного принуждения, приграничной релаксации [39, 40, 37].

**Гидродинамическая модель в криволинейных гранично-согласованных координатах.** Краевая задача (7)–(13) в гранично-согласованных координатах использует преобразование



$$\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y), \sigma = H^{-1}(z - \zeta), \tau = t, \quad (14)$$

$H = h + \zeta$ , с якобианом преобразования  $J^{-1} = \frac{\partial(\xi, \eta, \sigma)}{\partial(x, y, z)}$ ,  $0 \neq J^{-1} < \infty$ ,  $J = J_* H$ ,  $J_* = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}$  — плоский

якобиан. При соответствующем выборе четырех попарно-противоположных участков граничного контура  $\partial\Omega$  область  $Q$  отобразится на параллелепипед  $Q^*$ , непроницаемые границы  $\partial Q_1$  физической области отобразятся на непроницаемые грани  $\partial Q_1^*$  вычислительного параллелепипеда, а открытые границы  $\partial Q_2$  — на открытые грани  $\partial Q_2^*$ ; нижней и верхней горизонтальными гранями  $Q^*$  будут прямоугольники  $\partial\Omega^*$  в плоскостях соответственно  $\sigma = -1$ ,  $\sigma = 0$  [32, 5].

В новых переменных уравнения (7)–(9) примут вид:

$$\mathbf{v}_t + U^i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi^i} + W \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left( g\zeta + \rho_0^{-1} gH \int_{\sigma}^0 \rho' d\sigma + \frac{1}{\rho_0} q \right) \nabla_2 \xi^i + f\mathbf{v}' + fw = H^{-2} (\mathbf{v}\mathbf{v}_\sigma)_\sigma + J_*^{-1} (KJ_* g^{jk} \mathbf{v}_{\xi_k})_{\xi_j}, \quad (15)$$

$$w_t + U^i \frac{\partial w}{\partial \xi^i} + W \frac{\partial w}{\partial \sigma} + \frac{1}{\rho_0 H} q_\sigma + f_\tau u = H^{-2} (\mathbf{v}w_\sigma)_\sigma + J_*^{-1} (KJ_* g^{ik} w_{\xi_k})_{\xi_j}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} J U^i + \frac{\partial}{\partial \sigma} J \tilde{W} = 0. \quad (17)$$

Здесь  $U^i = \mathbf{v} \cdot \nabla_2 \xi^i$  — контравариантные горизонтальные скорости,  $\nabla_2 \xi^i = (\xi_x^i, \xi_y^i)$ ,  $i, j, k = 1, 2$  при суммировании по повторяющемуся индексу,  $U^1 = U$ ,  $U^2 = V$ ,  $\xi^1 = \xi$ ,  $\xi^2 = \eta$ ,  $W = \sigma_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \sigma$  — контравариантная вертикальная скорость,  $\tilde{W} = W - \sigma_t$ ,  $g^{ik}$  — ковариантные компоненты метрического тензора.

Уравнения (15)–(17) решаются в  $Q^*$  при граничных условиях по вертикали:

$$U^i \Big|_{\sigma=-1} = 0, \quad \mathbf{v} U_\sigma^i \Big|_{\sigma=0} = H \nabla_2 \xi^i \frac{\tau_\zeta}{\rho_0}. \quad (18)$$

Вертикальная компонента  $W$  удовлетворяет условиям  $W|_{-1} = W|_0 = 0$ .

Пусть непроницаемые боковые грани  $\partial Q^*$ , лежат в плоскостях  $\xi = \text{const}$ , а открытые грани  $\partial Q_2^*$  — в плоскостях  $\eta = \text{const}$ . Тогда

$$W|_{-1} = W|_0 = 0. \quad (19)$$

В дозвуковом случае без членов турбулентного обмена на открытой грани  $\partial Q_2^*$  на вытоке ставится одно условие: экстраполяция нормальной к границе компоненты скорости  $V$  либо ее произвольной  $\partial V / \partial \eta$ . На открытых границах при втоке требуется информация, определяющая обе компоненты скорости:

$$U^i \Big|_{\partial Q_2^*} = \psi_i(\xi, \sigma, t). \quad (20)$$

Для сверхзвуковых течений на втоке ставятся три условия, например, на обе компоненты скорости и инвариант Римана; на вытоке условий ставить не надо. При удержании членов турбулентного обмена на открытой границе ставятся дополнительные условия: на вытоке —  $Kg_{22}^{-1/2} U_\xi = \psi_3$ , на втоке —  $Kg_{ik}^{-1/2} V_\eta = \psi_4$ ,  $g_{ik}$  — контравариантные компоненты метрического тензора.

К краевой задаче (15)–(20) следует присоединить задачу для вертикально-осредненных уравнений (15), (17), определяющих баротропную компоненту давления и два адвективно-диффузионных уравнения для температуры и солёности, определяющих бароклинную компоненту давления. Постановка этих задач, а также уравнения форм энергии в гранично-согласованных координатах содержатся в [41].

В ряде работ постановка задачи использует преобразование  $(x, y, \sigma)$ , т. е. в (14) спрямляется только вертикальная координата. В этом случае  $J = H$ ,  $J_* = 1$  и численная реализация задачи упрощается, зато утрачивается простота постановки граничных условий на боковой поверхности — важнейшего преимущества метода гранично-согласованных координат.

### Численные методы реализации моделей динамики вязкой несжимаемой жидкости

**Общее рассмотрение.** Численная реализация океанологических моделей динамики вязкой несжимаемой жидкости использует широкий арсенал методов решения краевых задач для уравнений Навье—Стокса:

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 1/\rho_0 \nabla p = \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (22)$$

Эти задачи входят составной частью в океанологические модели, на заключительном этапе их реализации, определяя НГ компоненту давления.

Уравнения решаются в ограниченной области  $Q \subset R^3$ , с границей  $\partial Q$  при начальных условиях  $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^0$ , удовлетворяющих (22) и граничных условиях Дирихле или Неймана в зависимости от типа границы; обстоятельное рассмотрение постановки граничных условий для уравнений (21), (22) содержится в [42].

Решение краевых задач для уравнений Навье—Стокса использует численные методы, которые развивались и разветвлялись на протяжении более полувека в нескольких направлениях. Работы Чорина [43] и Темама [44] проложили дорогу проекционному методу, основанному на расщеплении разностных операторов задачи [45]. Конечно-разностным аппроксимациям в обобщенных координатах серьезную конкуренцию составили методы представления приближений рядами. К ним относится группа методов взвешенной невязки, в которой приближение  $\tilde{\omega}$  к решению  $\omega$  задается конечным рядом.

$$\tilde{\omega} = \sum_n \alpha_n(t) \varphi_n(\mathbf{x}), \quad (23)$$

$\mathbf{x} = (x, y, z)$ , где  $\alpha_n$  подлежат определению, а  $\varphi_n$  — известные базисные функции. Подстановка компоненты решения в уравнение с оператором  $L$  определяет невязку

$$L(\tilde{\omega}) = R.$$

Коэффициенты  $\alpha_n$  определяются из условия нулевой взвешенной невязки

$$\int_Q \psi_n(\mathbf{x}) R d\mathbf{x} = 0.$$

Выбор весовой функции  $\psi$  характеризует в самом общем виде метод решения.

При разбиении области  $Q$  на подобласти  $Q_m$  ( $m = 1, 2, \dots, \tilde{m}$ ) и определении  $\psi_m = 1$  при  $\mathbf{x} \in Q_m$  и  $\psi_m = 0$  вне  $Q_m$  имеем метод конечных объемов [22], восходящий к работе Патанкара и Сполдинга [46]; выбор в качестве базиса непрерывных функций из подмножества полной системы ортогональных функций, например, тригонометрических, полиномов Чебышева или Лежандра, когда коэффициенты разложения переменной рассматриваются как ее спектр, при использовании некоторого глобального критерия наилучшего приближения, определяет спектральный метод [47]; выбор  $\psi_n = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)$  — дельта функции Дирака, определяет псевдоспектральный метод или метод коллокаций [48]; выбор  $\psi_n = \varphi_n$ , когда весовая функция является базисной, представляет формулировку Галеркина [49]; приближение

$$\tilde{\omega} = \sum_n \omega_n \chi_n,$$

где  $\chi_n$  — аппроксимационные кусочно-линейные полиномы, определяет метод конечных элементов, подробное изложение которого содержится в [50]. Общим для всех этих методов является решение уравнений в переменных  $(\mathbf{u}, p)$  при использовании уравнения неразрывности как ограничения для нахождения давления из уравнения Пуассона; другой подход заключается в исключении уравнения неразрывности и решении задачи в переменных: завихренность, функция тока или завихренность, векторный потенциал [51].

Выбор метода определяется не столько спецификой задачи, как должно бы быть, сколько субъективными склонностями и опытом освоения стандартных программ решения задачи каким-либо одним методом. По мере накопления такого опыта наступает этап сравнения различных методов для обоснованного выбора применительно к решаемой задаче, и в отношении совокупности методов реализации океанологических моделей такой этап уже обозначился [52—54].

Особенность численных методов, затрудняющих выбор, в том, что каждый имеет свои достоинства и недостатки. Конечно-элементные аппроксимации обеспечивают локальную консервативность решения, но менее точны по сравнению с конечно-разностными на криволинейных сетках в областях сложной геометрии; метод конечных объемов обеспечивает высокую точность решения и консервативность на каждом элементе области, но в его, даже продвинутых версиях, решение на сильно деформированных объемах сходится медленно и даже может расходиться; спектральные и псевдоспектральные методы консервативны глобально, обеспечивают высокую точность решения и малые ошибки фазовой скорости, чем выгодно отличаются от разностных методов, но подвержены нелинейной неустойчивости, связанной с появлением шума в движениях на масштабах, не различаемых сеткой.

Методы спорят, соперничают и противоречат друг другу.

**Методы стационарирования.** Особенностью уравнений (21), (22), осложняющих их решение, является отсутствие явного представления эволюции давления в отличие от уравнений динамики сжимаемой жидкости, где изменение давления во времени выражается через эволюцию поля плотности в уравнении неразрывности.

Простейший способ связать давление с полем плотности заключается в том, чтобы навязать эту связь в предположении искусственной сжимаемости, когда уравнение (22) записывается в виде:

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (24)$$

Предполагая слабую сжимаемость, линеаризуем уравнение состояния:

$$p(\rho) = p_0 + c_0^2 (\rho - \rho_0), \quad (25)$$

где  $c_0^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_0$  — квадрат скорости звука в состоянии  $(p_0, \rho_0)$ ; исключая  $p$  из линеаризованного уравнения (24), получим:

$$p_t + c_0^2 \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (26)$$

Система уравнений движения (21) и неразрывности в виде (26) может использоваться при  $p_t \rightarrow 0$  для нахождения стационарного решения уравнений Навье—Стокса. В двумерном случае эти уравнения при  $p = H$ ,  $p = 1/2gH^2$  представляют систему уравнений мелкой воды, что соответствует уравнениям газовой динамики с показателем адиабаты  $\gamma = 2$  [1].

Общим приемом в модификациях метода искусственной сжимаемости является представление уравнения неразрывности в виде:

$$LP + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (27)$$

где  $L$  — оператор искусственной сжимаемости применяется в различных формах, как, например, в (23):  $L = \varepsilon \partial/\partial t$  или  $L = -\varepsilon \nabla^2$ , или просто  $L = \varepsilon$ ; здесь  $\varepsilon$  — релаксационный параметр и при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решение уравнений (21), (27) стремится к решению уравнений Навье—Стокса. Методы стационарирования используют присоединенную процедуру, ускоряющую сходимость [55].

Другую возможность обойти ограничения сжимаемости представляет использование вместо скорости в двумерном случае функции тока и завихренности, а в трехмерном — завихренности и векторного потенциала [22, 51].

#### **Нестационарные краевые задачи**

**Методы МАС.** В группе методов решения нестационарных задач для уравнений Навье—Стокса одним из наиболее используемых является т.н. метод маркеров и ячеек (МАС), позволяющий получить наряду с полями независимых переменных также и эволюцию поверхности раздела сред.

Идея метода заключается в подстановке еще неизвестной скорости  $\mathbf{u}^{k+1}$  на временном шаге  $(k+1)\tau$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\tau$  — шаг по времени, в уравнение движения на том же шаге, что дает:

$$\mathbf{u}^{k+1} = -\frac{\tau}{\rho_0} \nabla p^{k+1} + \mathbf{R}^k, \quad (28)$$

где  $\mathbf{R}^k$  — все остальные члены уравнения (21) на шаге  $k$ . Отсюда при использовании уравнения неразрывности (22) следует уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 p^{k+1} = \frac{\rho_0}{\tau} \nabla \cdot \mathbf{R}^k,$$

после решения которого поле скорости  $\mathbf{u}^{k+1}$  определяется из (28).

К методу МАС весьма близок и приводимый ниже популярный проекционный метод, аналогия с которым приводится в [56, 22].

**Проекционный метод.** Проекционный метод может рассматриваться как развитие метода МАС, хотя его источником были совсем другие представления.

Метод заключается в нахождении приближения  $\mathbf{u}^*$  к  $\mathbf{u}^{k+1}$  в (21)

$$\frac{(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^k)}{\tau} + \frac{1}{\rho} \nabla p^k = \mathbf{R}(\mathbf{u}^k), \quad (29)$$

и его коррекции  $\mathbf{u}$ :



$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^* + \tau \nabla q^{k+1}.$$

Чтобы выполнялось уравнение неразрывности (22) на шаге  $k+1$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0. \quad (30)$$

В таком представлении коррекция приближения  $\mathbf{u}^*$  может рассматриваться — в более адекватной интерпретации [44] — как «проекция» приближения на поле бездивергентных векторов.

Имеем:

$$\frac{(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k)}{\tau} + \frac{1}{\rho} \nabla p^{k+1} = \mathbf{R}(\mathbf{u}^k). \quad (31)$$

Вычитая (29) из (31), получим

$$\frac{(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*)}{\tau} + \frac{1}{\rho} \nabla (p^{k+1} - p^k) = 0,$$

откуда применением оператора дивергенции с учетом (30) следует уравнения Пуассона для нахождения поправки к давлению

$$\hat{p}^{k+1} = p^{k+1} - p^k : \nabla^2 \hat{p}^{k+1} = \frac{\rho}{\tau} \nabla \cdot \mathbf{u}^*, \quad (32)$$

и после решения краевой задачи для (32) корректируются поля скорости и давления:

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^* - \frac{\tau}{\rho} \nabla \hat{p}^{k+1}, \quad p^{k+1} = \hat{p}^{k+1} + p^k.$$

Одной из трудностей в методе проекций является отсутствие физически обоснованных граничных условий для двумерной компоненты приближения  $\mathbf{v}^* = (u, v)^*$  в [57]. В океанологических моделях аналогом  $\mathbf{v}^*$  выступает решение ГС задачи.

**Численная реализация океанологических моделей негидростатической динамики.** Построение океанологических моделей на основе задач для уравнений (18)–(20) может выполняться для давления как в его целостном виде, так и в расщепленной форме (5) в соответствии с физическим содержанием отдельных задач. В первом случае для нахождения решения вся система уравнений интегрируется до сходимости на каждом шаге по времени. Такой подход требует больших вычислительных затрат даже при использовании суперкомпьютеров для решения НГ задачи в относительно небольшой области. Во втором случае вычислительный процесс дробится в пределах временного шага на этапы, последовательная реализация которых приводит к решению на шаге.

**Неявные и явные аппроксимации.** Полностью неявная схема решения краевой задачи для уравнений (21), (22) в области  $Q$  имеет вид:

$$\frac{(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k)}{\tau} + \mathbf{A} \mathbf{u}^{k+1} + \nabla q^{k+1} = \mathbf{D} \mathbf{u}^{k+1},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0,$$

$k = 0, 1, \dots, \bar{k} = \left\lceil \frac{T}{\tau} \right\rceil$ , где  $\mathbf{A} = (\mathbf{u}^{k+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k+1}$  — оператор адвекции,  $\mathbf{D}$  — оператор вязкости. Такая схема не имеет ограничений на шаг  $\tau$ , но требует решения нелинейной системы уравнений на каждом шаге.

Линеаризация  $\mathbf{A} = (\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k+1}$  определяет полунявную схему, более точную в форме Адамса—Бэшфорта/Кранка—Николсон:

$$\frac{(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k)}{\tau} + \frac{1}{2} [3(\mathbf{u}^k \cdot \nabla) \mathbf{u}^k - (\mathbf{u}^{k-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k-1}] + \frac{1}{2} \nabla (q^{k+1} + q^k) = \frac{1}{2} \mathbf{D} (\mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{u}^k), \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0.$$

Примерами других версий полунявных аппроксимаций являются:

$$\frac{(3\mathbf{u}^{k+1} - 4\mathbf{u}^k + \mathbf{u}^{k-1}))}{2\tau} + [(2\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}) \cdot \nabla (2\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1})] + \nabla q^{k+1} = \mathbf{D} \mathbf{u}^{k+1}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0,$$

или:

$$\frac{(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k)}{\tau} + \frac{1}{4} [(3\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{k-1}) \cdot \nabla (\mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{u}^k)] + \nabla q^{k+1} = \frac{1}{2} \mathbf{D} (\mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{u}^k), \quad \nabla \cdot (\mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{u}^k) = 0.$$

Эти схемы используются и при других типах дискретизации области: конечно-объемной и конечно-элементной. В [58] приводится ряд схем — неявных и полунеявных, различающихся структурой и вычислительными характеристиками.

**Проекционный метод реализации океанологических моделей.** В этом пункте подробно рассматривается метод расщепления оператора задачи — проекционный метод, широко используемый для решения уравнений Навье—Стокса и вошедший в практику океанологического моделирования. Проекционный метод особенно рационален в конечноразностной версии использующей преобразования к гранично-согласованным координатам. Его структура состоит из решения задачи для адвективно-диффузионных уравнений, определяющих поле плотности, решения гиперболической задачи, определяющей среднюю адвекцию и уровня и решения эллиптической задачи для оператора Лапласа—Бельтрами, определяющей динамическую компоненту давления.

Все разнообразия модификаций проекционного метода в океанологических моделях характеризуется видом аппроксимаций и структурой алгоритмов реализации физических модулей на этапах временного шага; эти этапы представляют отдельные краевые задачи, последовательность которых определяет эффективность и робастность метода.

Рассмотрим применение проекционного метода решения краевой задачи для уравнений (15)—(17) и вложенной двумерной задачи для определения уровня  $\zeta$ . Для простоты запишем динамические уравнения в декартовых координатах и оставим за обозначением разностных аппроксимаций их дифференциальную форму.

Имеем:

$$\mathbf{v}_t + g \nabla_2 \zeta + 1/\rho_0 \nabla_2 q = (\mathbf{v}\mathbf{v}_z)_z + \mathbf{R}_v, \quad (33)$$

$$w_t + 1/\rho_0 \nabla_2 q_z = (\mathbf{v}w_z)_z + R_w, \quad (34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (35)$$

где  $\mathbf{R}_v, R_w$  содержат члены адвекции, бароклинной компоненты давления, горизонтального турбулентного обмена и ускорения Кориолиса.

К системе уравнений (33)—(35) следует присоединить среднее уравнение, определяющее уровень:

$$\zeta_t + \nabla_2 \cdot \int_{-h}^{\zeta} \mathbf{v} dz = 0$$

и уравнения для определения температуры и солёности.

Численное решение задачи в сеточной области  $Q_\Delta$  может использовать различные типы дискретизации области и аппроксимаций дифференциальных операторов; некоторые продвинутые формы конечноразностных аппроксимаций приведены в [41].

В соответствии с общей структурой метода, представленной выше, запишем расщепление уравнений на этапы временного шага:

$$\frac{(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^k)}{\tau} + g \nabla_2 \zeta^* = (\mathbf{v}\mathbf{v}_z)_z^* + R_v^k, \quad (36)$$

$$\frac{(\mathbf{w}^* - \mathbf{w}^k)}{\tau} = (\mathbf{v}\mathbf{w}_z)_z^* + R_w^k, \quad (37)$$

$$\frac{(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*)}{\tau} = \frac{1}{\rho_0} \nabla q^{k+1}. \quad (38)$$

Здесь переход  $\mathbf{u}^* \rightarrow \mathbf{u}^{k+1}$  может составлять не обязательно один этап, что и является одной из важнейших черт проекционного метода.

Применяя к (38) операцию дивергенции с учетом (35) имеем уравнение для определения динамического давления:

$$\nabla^2 q^{k+1} = \frac{\rho_0}{\tau} \nabla \cdot \mathbf{u}^*. \quad (39)$$

В гранично-согласованных координатах (14) это уравнение имеет вид:

$$\left( J g^{ij} q_{\xi^i}^{k+1} \right)_{\xi^j} = \frac{\rho_0}{\tau} \left[ (JU)_{\xi}^* + (JV)_{\eta}^* + (J\tilde{W})_{\sigma}^* \right]. \quad (40)$$

Уравнение Пуассона для оператора Лапласа—Бельтрами (40) решается при условиях по вертикали:

$$q_{\sigma}|_{\sigma=-1} = 0, q|_{\sigma=0} = 0.$$

На боковых непроницаемых гранях в плоскостях  $\xi = \text{const}$  и на открытых гранях —  $\eta = \text{const}$  имеем соответственно:

$$q_{\xi}|_{\partial Q_1^*} = 0, q_{\eta}^{k+1}|_{\partial Q_2^*} = \psi^{k+1}(\xi, \sigma, \tau),$$

где назначение  $\psi$  определяется контравариантной производной  $V_{\eta}$  на этапе решения динамической задачи для  $V$  — компоненты контравариантной скорости — аналога декартовой  $v$ -компоненты в (36).

После определения динамического давления  $q^{k+1}$  окончательное поле скорости определяется из (38), а уровень корректируется из  $\tilde{W}|_{\sigma=0} = \frac{\zeta}{H}$ , откуда

$$\zeta^{k+1} = \zeta^* + \tau H \tilde{W}^{k+1}.$$

Как отмечалось, варианты проекционного метода разнятся во многих отношениях. Одним из существенных отличий является аппроксимации адвективных членов в уравнениях (36), (37), которая в консервативной форме имеет вид:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}, \mathbf{a}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{a} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{a}.$$

В [59] такая аппроксимация используется на промежуточных этапах в виде

$$A\left(\mathbf{u}^{k+\frac{1}{2}}, \mathbf{u}^{k+\frac{1}{2}}\right).$$

В работах [60, 61] предложена схема коррекции давления, имеющая в принятых обозначениях вид:

$$\frac{(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^k)}{\tau} + \frac{1}{2} [3A(\mathbf{u}^k, \mathbf{u}^k) - A(\mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{u}^{k-1})] + \nabla q^k = \frac{1}{2} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{u}^k) + \mathbf{f}^*,$$

$$\frac{(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*)}{\tau} + \frac{1}{2} \nabla (q^{k+1} - q^k) = 0,$$

$$\mathbf{u}^*|_{\partial Q^*} = 0,$$

$$\nabla^2 (q^{k+1} - q^k) = 2 \frac{\rho_0}{\tau} \nabla \cdot \mathbf{u}^*.$$

В [61] схема реализуется методом коллокаций при разложении решения по горизонтали в ряд по функциям Лежандра и по вертикали — в ряд по тригонометрическим функциям.

Обобщением аппроксимации адвекции является высокоточная многошаговая схема  $\bar{s}$  — порядка, построенная на коэффициентах Адамса—Бэшфорта/Адамса—Моултона:

$$\mathbf{A} = \sum_s \rho_s (\mathbf{u}^{k-s} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{k-s},$$

$s = 0, 1, \dots, \bar{s} - 1$ . Такая аппроксимация входит в проекционный метод системы ROMS при  $\bar{s} = 3$  [25].

Принципиальной чертой проекционного метода является требование высокой точности выполнения уравнения неразрывности (35) после определения динамического давления и коррекции скорости  $\mathbf{u}^{k+1}$ . Выполнение (35) никак не обязано точности решения уравнения Пуассона (39), ибо само это уравнение возникает в предположении, что уравнение неразрывности на заключительном этапе шага выполняется точно. В работе [62] и др. для выполнения уравнения неразрывности вводится дополнительная потенциальная функция  $\mathbf{u}^p$ , такая что

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = \nabla \cdot \mathbf{u}^* + \nabla \cdot \mathbf{u}^p, \mathbf{u}^p = \nabla \omega.$$

Отсюда следует второе, дополнительное к (39), уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \omega = -\nabla \cdot \mathbf{u}^*,$$

которое решается на каждом временном шаге при условии  $\frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\partial Q^*} = 0$  и после нахождения  $\omega$  давление определяется из условия  $q^{k+1} = -\frac{\rho_0}{\tau} \omega$ , аналогично (39).

Исключительная важность того, чтобы поле  $\mathbf{u}^{k+1}$  удовлетворяло уравнению неразрывности с высокой точностью ясно следует из [63], где реализация задачи даже в декартовых координатах использует последовательность двух предикторов и двух корректоров на шаге, состоящем из семи этапов — и все же на заключительном этапе приходится определять вертикальную скорость из уравнения неразрывности для его точного выполнения, как в ГС приближении.

Столь настойчивой подгонки, видимо, можно избежать, если расщепление реализуется с достаточно высокой точностью. В [45] это достигается использованием схемы

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^k)}{\tau} &= \sum_n \beta_n \mathbf{A}(\mathbf{u}^{k-n}), \\ \frac{(\mathbf{u}^{**} - \mathbf{u}^*)}{\tau} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla q^{k+1}, \\ \frac{(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^{**})}{\tau} &= \sum_n \gamma_n \mathbf{D}(\mathbf{u}^{k+1-n}). \end{aligned}$$

Здесь  $\beta_n, \gamma_n$  — коэффициенты Адамса—Бэшфорта/Адамса—Моултона; уравнения решаются в области  $Q$  с граничными условиями Дирихле на  $\partial Q$ . При этом предполагается, что  $\mathbf{u}^{**}$  удовлетворяет уравнению неразрывности (25) и тогда  $q^{k+1}$  определяется из уравнения Пуассона, аналогично (28).

**Оценка влияния негидростатики.** В этом разделе приводятся некоторые результаты, иллюстрирующие роль и значимость НГ фактора в океанологических моделях.

Внимание к уточненному описанию мезомасштабной динамики и локальному учету НГ в крупномасштабной динамики океана обозначилось, как видно из приводимой библиографии, сравнительно недавно.

Первоначальный этап НГ моделирования характеризуется работами, относящимися к тестовым расчетам волновой динамики в условиях выраженных вертикальных движений, на которых верифицировались модели. На рис. 1 показано отличие численного решения негидростатической модели от гидростатической при прохождении внутренней приливной волны  $M_2$  над подводным склоном ( $x = 0$ ). В отличие от гидростатического решения происходит расширение спектра приливной внутренней волны, а в дальнейшем и появление краевых вторичных волн.

Сравнение с экспериментом удобно выполнять с использованием спрямляющего преобразования по вертикали в координатах  $(x, y, \sigma)$ . В такой постановке в [13] проведены расчеты диспергирующих волновых процессов, наката и разрушения солитона, генерации цунами при оползне; в [64] моделировались волны малой амплитуды с оценкой неприемлемости приближения ГС и экспериментальные расчеты ветровой циркуляции в замкнутом бассейне, показавшие, что использование примитивных

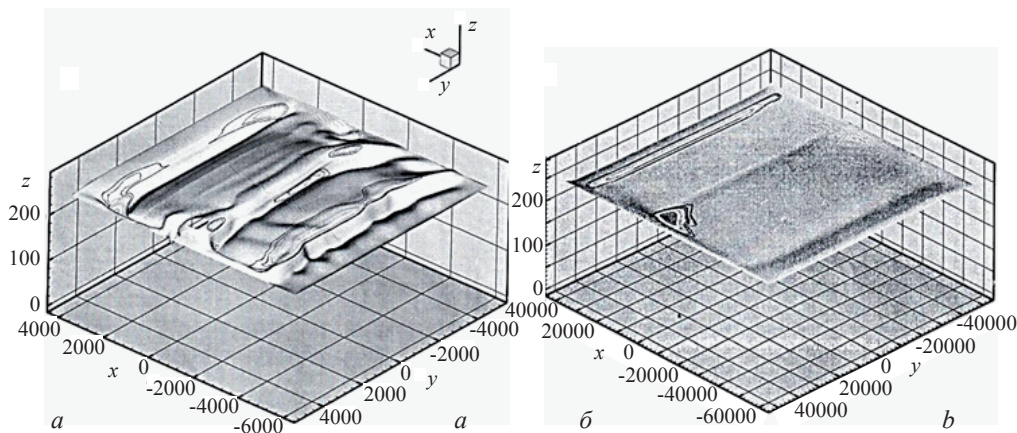


Рис. 1. Сравнение решений НГ (а) и ГС (б) задач расчета внутренней приливной волны  $M_2$  над подводным склоном (0,  $Y$ ).

Fig. 1. Comparison of non-hydrostatic (a) и hydrostatic (b) numerical solutions for internal wave  $M_2$  under bottom slope (0,  $Y$ ) simulations.

уравнений сильно искажает вертикальные скорости у стенки. В работах [63, 65] такие расчеты выполнены в 3D постановке для оценки влияния НГ на сейшевые колебания и распространение периодической волны над препятствием; для верификации результатов использовались данные лабораторных экспериментов и простые аналитические решения.

В [25] модель в обобщенных координатах всесторонне тестировалась на большом наборе задач, в которых влияние НГ существенно: осцилляции гравитационной волны у стенки, распространение сильно нелинейной внутренней волны, сдвиговая неустойчивость, внутренний прилив над подводной горой. НГ моделирование длинноволновых процессов в реальных областях с выраженным рельефом требует больших вычислительных затрат, в связи с чем особое значение приобретает процедура выделения подобластей НГ.

В работах [11, 12, 26] модель в гранично-согласованных координатах использовалась для расчета НГ приливной динамики проливов с подводной горой. На примере Гибралтарского пролива в [26] показано, что выделение подобластей учета НГ требует внимательного ознакомления с особенностями динамики на границах подобласти. Так, выбор границы западнее Тарифской узкости неудачен, поскольку здесь в интервалы энергетического минимума волны  $M_2$  возникает сильный центральный водоворот, пронизывающий всю халинную структуру. Следует учитывать также, что граница может оказаться в месте суоя — неустойчивых разнонаправленных течений, которых в Гибралтарском проливе более десятка. О сложности НГ динамики в таких условиях можно судить по рис. 2, где представлен ход в приливном цикле  $M_2$  нормы  $\|\delta(S)\|_c = \max_N |\delta(S)|$  по всем  $N$  узлам сеточной области,  $\delta(S) = S_{\text{НГ}} - S_{\text{ГС}}$  — разность  $S$ -компоненты решения двух задач для  $(v, w)$  — продольной и вертикальной скорости. Видно, что в западной части пролива, расширенной и с более сглаженным рельефом, значения  $\delta(S)$  существенно меньше, чем в его восточной части, где  $\|\delta(v)\|_c \sim 22$  см/с в интервале  $\sim T/2$ ,  $\|\delta(w)\|_c \sim 3,5$  см/с на двух максимумах около  $T/4$  и  $3T/4$ .

Примером региона, где выбор подобласти НГ не вызывает затруднений, является Мессинский пролив [12]. Рельеф пролива представляет огромную подводную гору с перепадом глубин  $O(10^3)$  м на протяжении около 20 км. Оказывается, что в таких условиях выделять подобласти НГ не следует. На рис. 3 приводится ход  $C$ -нормы  $\|\delta(S)\|_c$  для  $S = (v, w)$ , где  $\delta(S) = S_{\text{НГ}} - S_{\text{НГ}}, S_{\text{НГ}}$  — решения при учете НГ во все области пролива,  $S_{\text{НГ}}$  — только в подобласти, а в остальной части — модель ГС. Большие изменения характеристики  $\delta(S)$  свидетельствуют о недопустимости изменения выделения подобласти НГ.

В работах [27, 11] приводится расчет энергии баротропно-бароклинного взаимодействия и его НГ моделирования в Баб-Эль-Мандебском проливе Красного моря. На рис. 4 представлено сравнение потоков энергии для двух задач через открытые границы Баб-эль-Мандебского пролива; на рис. 5 (см.

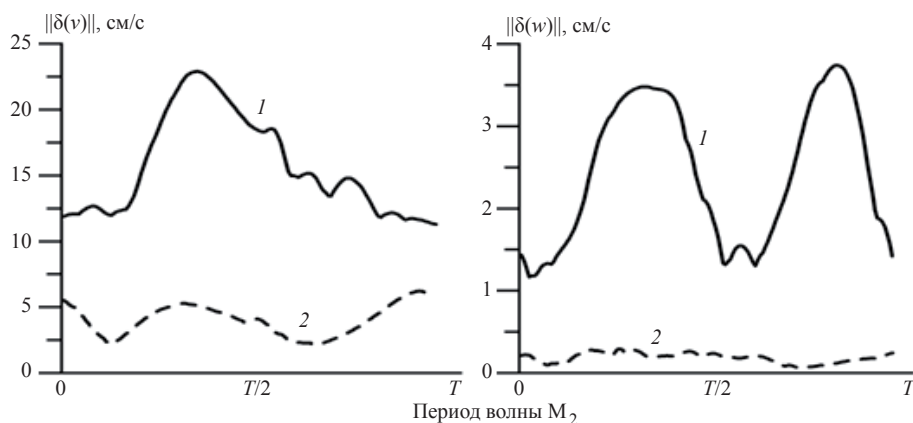


Рис. 2. Сравнение хода норм  $\|\delta(\bar{S})\|_c$ ,  $\bar{S} = (v, w)$  в приливном цикле волны  $M_2$  в Гибралтарском проливе.  $a$  —  $v$ -компонента скорости;  $b$  —  $w$ -компонента скорости. 1 — восточная подобласть; 2 — западная подобласть.

Fig. 2. Comparison of norms  $\|\delta(\bar{S})\|_c$ ,  $\bar{S} = (v, w)$  evolution during tidal cycle  $M_2$  in the Gibraltar Strait.  $a$  —  $v$ -component of velocity;  $b$  —  $w$ -component of velocity. 1 — eastern subdomain; 2 — western subdomain.



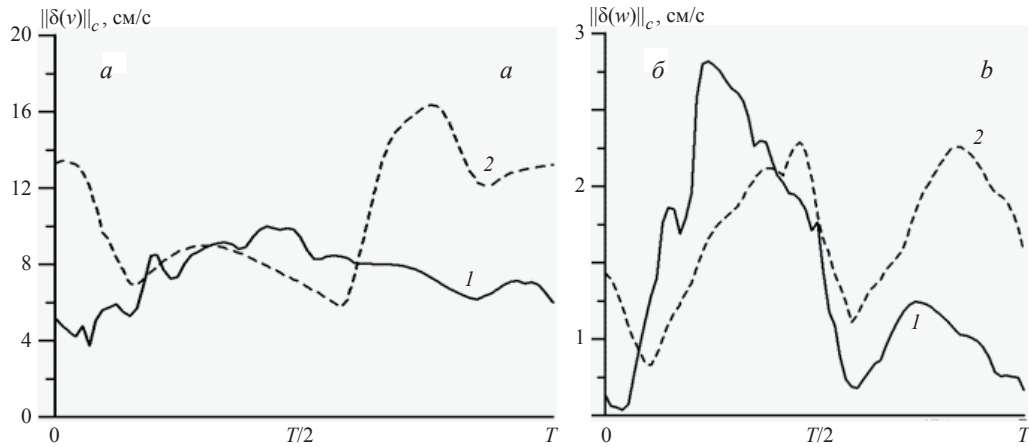


Рис. 3. Сравнение хода норм  $\|\delta(\bar{S})\|_c$ ,  $\bar{S} = (v, w)$  в приливном цикле волны  $M_2$  в Мессинском проливе при учете НГ в области пролива либо в его подобласти.  $a$  —  $v$ -компонента скорости;  $b$  —  $w$ -компонента скорости. 1 — северный склон; 2 — южный склон.

Fig. 3. Comparison of norms  $\|\delta(\bar{S})\|_c$ ,  $\bar{S} = (v, w)$  evolution during tidal cycle  $M_2$  in the Messina strait.  $a$  —  $v$ -component of velocity;  $b$  —  $w$ -component of velocity. 1 — northern slope; 2 — southern slope.

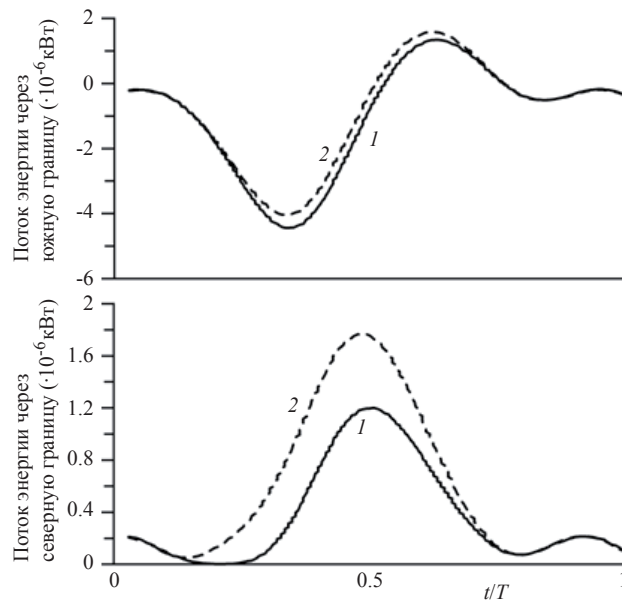


Рис. 4. Потоки энергии на открытых границах Баб-эль-Мандебского пролива. 1 — гидростатика; 2 — негидростатика.

Рис. 4. Energy fluxes at the open boundaries of the Bab-el-Mandeb strait. 1 — hydrostatic; 2 — non-hydrostatic.

вклейку) приводится распределение критерия гидростатики за приливной период волны  $M_2$  в различных зонах Гибралтарского пролива.

В работе [66] предложена НГ двухслойная модель в гранично-согласованных координатах для расчета прибрежной гидродинамики в 3D-области, генерируемой оползнем. Результаты, относящиеся к изменению физических и энергетических характеристик оползня в зависимости от угла склона при его движении, верифицируются по данным лабораторных экспериментов; модель применена для расчета аляскинского мегаоползня 1958 г.

В [67] представлена 3D НГ модель в конечно-объемной формулировке с последующим отображением элементарных объемов на равномерную сетку; модель верифицировалась на тестовых задачах дифракции, наката и разрушения волны. В [68, 69] НГ модель, использующая смешанную конечно-элементную аппроксимацию на неструктурированной сетке, применялась для расчета внутренней

динамики и циркуляции в шельфовом регионе. В [10] представлены результаты моделирования внутренних волн в Южно-Китайском море; НГ задача решалась проекционным методом при конечно-объемной дискретизации 3D-области на неструктурированной сетке по горизонтали и структурированной конечно-элементной по вертикали.

Различие решений краевой задачи в области с открытой границей в ГС и НГ постановках представлено в [41] на результатах моделирования динамики открытой подобласти океана с граничными условиями, представляемыми данными крупномасштабной модели с грубым разрешением. В ГС приближении краевая задача в области с открытой границей некорректна, и действительно решение быстро деградирует, теряя физический смысл, если ложные осцилляции в пограничной зоне не подавляются какой-либо релаксационной процедурой и дополнительной вязкостью, искажающими гидрофизические характеристики решения, тогда как НГ краевая задача устойчива на весь длительный период расчета даже без диссипативных факторов.

Влияние НГ при решении мелкомасштабных задач иллюстрируют рис. 6 и 7 (см. вклейку). Рассмотрено прохождение штормового нагона через судопропускное сооружение C-1 комплекса сооружений защиты Санкт-Петербурга от наводнений (КЗС) шириной 200 м и глубиной на пороге 16 м. Расчет выполнен по уравнениям (5), (6) в ГС и (9)—(11) в НГ с помощью ПК CARDINAL [70, 71]. При расходе равном 4380 м<sup>3</sup>/с и юго-западном ветре 12 м/с скорость течения доходит до 2 м/с. На рис. 6 вверху показано сравнение полей скорости в срединном слое при расчете в ГС (слева) и НГ (справа). Внизу — разность средних по глубине скоростей. Положительные значения соответствуют увеличению скорости в НГ. В этих экстремальных условиях разность средней по глубине скорости между НГ и ГС доходит до 14 см/с (12 %). При сохранении общего расхода через C-1 за счет НГ произошло увеличение скорости на его южной наветренной стороне и уменьшение на северной подветренной стороне. На рис. 7 сопоставлено распределение вертикальной скорости на продольном вертикальном разрезе, проходящем по оси C-1. Положительные значения соответствуют движению вверх, отрицательные — вниз. На участках, где глубина в направлении течения увеличивается, вертикальная скорость направлена вниз, и наоборот. При сохранении общей картины вертикальных движений, в НГ произошло повсеместное увеличение вертикальных скоростей: на входе в C-1 от –3 до –5 см/с, на выходе — от 5.5 до 6 см/с. ПК CARDINAL работает в оперативном режиме в СЗУГМС для прогноза наводнений и прогноза оптимального времени закрытия водо- и судопропускных сооружений КЗС в случае, если по прогнозу получено превышение уровня воды в Санкт-Петербурге отметки 160 см БС. Уточнение этих прогнозов имеет важное прикладное значение.

\*\*\*

Место НГ среди движений океана несколько неопределённое и неудобное. С одной стороны, в области мелкомасштабных волновых движений у неё нет законного места и о ней даже не слышали, а с другой — в области крупномасштабных движений о ней ничего и знать не хотят. НГ втирается между ними, неудобно располагаясь, как между двумя стульями, и старается доказать своё право на существование.

Это даётся ей нелегко. Владения тех и других надёжно охраняются законом: законом Бернулли, законом Архимеда. Нелегко существовать в среде с таким уравнением неразрывности. Чтобы НГ раскрыться, проявить себя, это уравнение требует беспрекословного выполнения. Хорошо устроилась ГС с её примитивными уравнениями, когда вертикальная скорость определяется из уравнения неразрывности и оно выполняется точно или, например, метеорология или аэродинамика, где уравнение неразрывности содержит производную плотности по времени, чего ему вполне достаточно. А тут — это жёсткое ограничение, эта лагранжева связь. К счастью для океанологии, у НГ оказался сильный союзник — уравнения Навье—Стокса несжимаемой жидкости.

Одним из наиболее популярных методов решения краевых задач для уравнений Навье—Стокса является метод расщепления или проекционный, в котором давление определяется промежуточным полем скорости в предположении, что окончательное её поле — бездивергентно. Если принять за это промежуточное поле ГС скорость, то возникает естественная конструкция гидродинамической модели, в которой статическая компонента давления дополняется его динамической компонентой, определяемой решением задачи для уравнений Навье—Стокса. Работы, сюда относящиеся, и реферируются в обзоре.

Краеугольным камнем океанологической модели НГ динамики является постановка краевой задачи для уравнений Навье—Стокса. Это прочный камень. Задача корректна [72], в отличие от 3D краевой

задачи для примитивных уравнений в области с открытой границей — за исключением одного случая: разложения решения по собственным функциям вертикального оператора, связанного с задачей [29].

Океанологические модели с проекционным модулем используют широкую совокупность методов их численной реализации при различных формах приближений: конечно-разностной, конечно-объёмной, конечно-элементной или представления в виде функции тока и векторного потенциала. При этом применение проекционного метода во всех его обликах имеет одну принципиальную особенность: поскольку выполнение уравнения неразрывности на каждом шаге постулируется, то нет гарантии его выполнения с достаточной точностью. Дело в том, что промежуточное ГС поле скорости может быть очень возмущённым в силу резких изменений рельефа, больших градиентов плотности и других гидрофизических факторов, что как раз и свойственно ГС полю. Для примитивных уравнений это не помеха, поскольку там уравнение неразрывности выполняется принудительно, а уравнения Навье—Стокса возмущений промежуточного поля не переносят и отказываются работать в таких условиях.

Их можно понять. Они согласились взаимодействовать с ГС, им это даже, может, лестно, но всему же есть мера. Хотите использовать наш проекционный метод — модифицируйте его или потрудитесь считать НГ задачу на всех этапах точнее. Работы, относящиеся к структуре этапов и точности их реализации, освещаются в обзоре.

Уровень современной вычислительной гидродинамики вполне достаточен для развития НГ моделирования, и оно развивается повсеместно и быстро. Об этом свидетельствуют и отдельные работы, и возникающие системные модели с возможностями НГ приложений: [73]; CARDINAL (Coastal ARea Dynamics INvestigation ALgorithm), [70, 71]; ROMS (Regional Oceanic Modeling System), [25]; NBfOM (Nonhydrostatic Body-fitted Oceanic Model), [26]; ICOM (Integrated Coastal Ocean Modeling) [68]; SUSTANS (Stanford Unstructured Nonhydrostatic), [69]; ADCIRC (Advanced CIRCulation Model), [74]; SELFE (Semi-implicit Euler – Lagrangian Finite – Element model), [75]; UnTRIM (Unstructured 3-D hydrodynamic model), [76]; FESOM – coastal (Finite – Element Sea – ice Ocean Model [77] — вот далеко не полный перечень системных моделей.

Сегодня НГ моделирование, выходя из своего круга явлений на конвективном масштабе  $O(10^3 \text{ м})$ , только вступает на территорию крупномасштабных процессов в подобластях регионов с резко выраженным рельефом [11, 12] и даже в подобластях открытого океана [78]. Дальнейшему его продвижению не препятствуют ни требования корректности краевых задач в 3D-области с открытой границей, ни высокие требования к численным методам реализации этих задач. Ограничение продвижения в этом направлении определяется не техническими возможностями современных суперкомпьютеров с производительностью в сотни терафлопсов и десятками тысяч процессоров, а реализацией таких возможностей для использования существующих методов вычислительной гидродинамики.

Проблема НГ моделирования Мирового океана с его шельфом, протяжёнными рифовыми зонами и огромными подводными вулканами, представляется осуществимой уже в ближайшем будущем на параллельных вычислительных системах, при адаптации для них элементов численных методов, о которых рассказывается в обзоре.

*Работа выполнена в рамках государственного задания ФАНО России (тема № 0149-2018-0014).*

## Литература

1. Стокер Д. Д. Волны на воде. М.: ИЛ, 1959. 617 с.
2. Marshall J., Hill C., Perelman L., Adcroft A. Hydrostatic, quasi-hydrostatic and non-hydrostatic ocean modeling // Geophys. Res. J. 1997. V. 102, N C.3. P. 5733—5752.
3. Jones H., Marshall J. Convection with rotation in a neutral ocean: a study of open-ocean deep convection // Phys. Oceanogr. J. 1993. V. 23. P. 1009—1039.
4. Androsov A., Rubino A., Romeiser R., Sein D. Open-ocean convection in the Greenland Sea: preconditioning through a mesoscale chimney and detectability in SAR imagery studied with hierarchy of nested numerical models // Meteorologische Zeitschrift J. 2005. V. 14, N 14. P. 693—702.
5. Mahadevan A., Olinger J., Street R. A non-hydrostatic mesoscale ocean model, part 1, 2 // Phys. Oceanogr. J. 1996. V. 26. P. 1868—1900.
6. Shapiro G. I., Hill A. E. Dynamics of dense water cascades at the shelf edge // Phys. Oceanogr. J. 1997. V. 27(1). P. 2381—2394.
7. Zhu D. Z., Lawrence G. A. Non-hydrostatic effects in layered shallow water flows // Fluid. Mech. J. 1998. V. 355(25). P. 1—16.
8. Wadzuk B. M., Hodges B. R. Hydrostatic and non-hydrostatic internal wave models // CRWR Outline Report. 2004.
9. Davis A. M., Xing J., Berntsen J. Non-hydrostatic and non-linear contributions to the internal wave energy flux in sill region // Ocean Dynamics. J. 2009. V. 59(6). P. 881—897.

10. Zhang Z., Fringer O. B., Ramp S. R. Three-dimensional, non-hydrostatic numerical simulation of non-linear internal wave generation and propagation in the South China Sea // *Geoph. Res. J.* 2011. V. 116, N C05022. P. 1—26.
11. Вольцингер Н. Е., Андросов А. А. Негидростатическое баротропно-бароклинное взаимодействие в проливе с горным рельефом // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика.* 2013. Т. 6, № 3. С. 63—77.
12. Вольцингер Н. Е., Андросов А. А. Негидростатическая динамика региона с подводной горой // *Океанология.* 2016. Т. 56, № 4. С. 537—546.
13. Ma G., Shi F., Kirby J. Shock-capturing non-hydrostatic model for fully dispersive surface wave process // *Ocean Modeling.* J. 2012. V. 43—44. P. 27—35.
14. Dutykh D., Kalish H. Boussinesq modeling of surface waves due to underwater landslides // *Nonlinear Proces. Geophys. J.* 2013. V. 20. P. 267—285.
15. Chubarov L. B., Eletsky S. V., Fedotova Z. I., Khakimzyanov G. S. Simulation of surface waves generation by an underwater landslides // *Russian Journ. Numer. Anal. Math. Model. J.* 2005. V. 20(5). P. 425—437.
16. Диденкулова И. И., Пелиновский Е. Н. Накат длинных волн на берег: влияние формы подходящей волны // *Океанология.* 2008. Т. 48, № 1. С. 5—13.
17. Didenkulova I., Nikolina I., Pelinovsky E., Zahibo N. Tsunami waves generated by submarine landslides of variable volume: analytical solutions for a basin of variable depth // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci. J.* 2010. V. 10, Iss. 11. P. 2407—2419.
18. Бейзель С. А., Хакимзянов Г. С., Чубаров Л. Б. Моделирование поверхностных волн, порождаемых подводным оползнем, движущимся по пространственно неоднородному склону // *Вычисл. Технол.* 2010. Т. 15, № 3. С. 39—51.
19. Moum J. N., Farmer D. M., Smith W. D., Armi L., Vagle S. Structure and generation of turbulence at interfaces strained by internal solitary waves propagation shoreward over the continental shelf // *Phys. Oceanogr. J.* 2003. V. 33. P. 2093—2112.
20. Nash J., Moum J. N. River plums as a source of large-amplitude internal waves in the coastal ocean // *Nature.* 2005. V. 473. P. 400—403.
21. Сафрай А. С., Ткаченко И. В. Трехмерная негидростатическая модель вода-воздух. Численный эксперимент // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика.* 2013. Т. 6, № 1. С. 14—22.
22. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991. 552 с.
23. Сафрай А. С., Ткаченко И. В., Гордеева С. М., Белевич М. Ю. Моделирование сезонной изменчивости внутренних приливных волн в Баренцевом море // *Навиг. Гидрогр.* 2006. № 22. С. 118—125.
24. Hubbard H. E., Thompson J. D. A numerical study of loop current intrusion and eddy shedding // *Phys. Oceanogr. J.* 1980. V. 10. P. 1611—1648.
25. Kanarska Y., Shchepetkin A., Mc Williams J. C. Algorithm for non-hydrostatic dynamics in the Regional Oceanic Modeling System // *Ocean Model. J.* 2007. V. 18. P. 143—147.
26. Вольцингер Н. Е., Андросов А. А. Негидростатическая динамика проливов Мирового океана // *Фунд. прикл. гидрофиз.* 2016. Т. 9, № 1. С. 26—40.
27. Вольцингер Н. Е., Андросов А. А. Расчёт энергии баротропно-бароклинного взаимодействия в Баб-эль-Мандебском проливе // *Изв. РАН, ФАО* 2010. Т. 9, № 1. С. 235—245.
28. Wadzik B. M., Hodjes B. R. // 17-th ASCE Engin. Mech. Conf. 2004. Univ. of Delaware, Newark.
29. Olinger J., Sundstrom A. Theoretical and practical aspects of some initial boundary-value problems in fluid dynamics // *SIAM J. Appl. Math.* 1978. V. 35, N 3. P. 419—445.
30. Марчук Г. И., Каган Б. А. Динамика океанских приливов. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 380 с.
31. Численные методы расчёта штормовых нагонов / Под ред. М. С. Грушевского Л.: Гидрометеиздат, 1964. 296 с.
32. Вольцингер Н. Е., Клеванный К. А., Пелиновский Е. Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 273 с.
33. Марчук Г. И., Дыминов В. П., Залесный В. Б. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеиздат, 1987. 296 с.
34. Blayo E., Debreu L. Revisiting open boundary conditions from the point of view of characteristic variables // *Ocean Modelling J.* 2007. V. 9. P. 231—252.
35. Андросов А. А., Вольцингер Н. Е., Вагер Б. Г. Спектральный метод построения гидродинамических моделей с открытой границей // *Вестн. гражд. инж.* 2012. 1(30). С. 218—223.
36. Сандстрём А., Элиус Т. Вычислительные проблемы моделирования в ограниченной области // *Численные методы, используемые в атмосферных моделях.* Л.: Гидрометеиздат, 1982. С. 274—301.
37. Palma E. D., Matano R. P. On the implementation of open boundary conditions for a general circulation model & The three-dimensional case // *Jeophys. Res. J.* 2000. V. 105, N C4. P. 8605—8627.
38. Enquist B., Maida A. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves // *Math. Comput. J.* 1977. V. 31(139). P. 629—651.
39. Marchesiello P., Mc Williams J. C., Shchepetkin A. Open boundary conditions for long-term integration of regional oceanic models // *Ocean Modelling J.* 2001. V. 3, N 1. P. 1—20.
40. Martinsen A., Egendahl H. Y. Implementation and testing of a lateral boundary scheme as an open boundary condition in a barotropic ocean model // *Coastal Eng. J.* 1987. V. 11. P. 603—627.
41. Андросов А. А., Вольцингер Н. Е. Проливы Мирового океана: Общий подход к моделированию. СПб.: Наука, 2005. 187 с.
42. Gresho P. M., Chan S. Solving the incompressible Navier-Stokes equations using consistence mass and pressure Poisson equation // *Proc. ASME Symp. Rec, Adv, Comp, Fl. Dyn. AMD.* 1988. V. 93. P. 31—74.
43. Chorin A. J. A numerical solution for solving incompressible viscous flow problem // *Comp. Phys. J.* 1967. V. 2. P. 12—26.
44. Temam R. Sur l'approximation de la solution des equations de Navier-Stokes par la methods des pas fractionnaires // *Arc. Ration. Mach. Anal.* 1969. V. 32. P. 377—385.



45. Kaniadakis G., Israeli M., Orshag S. High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations // *Comp. Phys. J.* 1991. V. 97, N 2. P. 414—443.
46. Patanca S. V., Spalding D. V. A calculation procedure for heat, mass and momentum in three dimensional parabolic flows // *Int. J. Heat Mass. Transf.* 1972. V. 19, N 10. P. 1787—1806.
47. Salery F., Gervasio P. Quarteroni Spectral approximation of Navier-Stokes equations. Università degli Studi di Milano 1998. 56 p.
48. Gottlieb D., Orshag S.A. Numerical analysis of spectral methods. Theory and applications // *NSF-CBms Monogr. SIAM J.* 1977. V. 26.
49. Fletcher K. Computational Galerkin Methods. Springer, 1984. 319 p.
50. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов 1997. М.: Мир, 1997. 349 с.
51. Wong A. K., Reizes J. A. The vector potential in the numerical solution of three-dimensional fluid dynamics problems in multiply connected regions // *Comput. Phys. J.* 1986. V. 62. P. 124—142.
52. Андросов А. А., Вольцингер Н. Е., Вагер Б. Г. Сравнение точности и эффективности метода конечных элементов и метода гранично-согласованных координат в гидродинамическом моделировании // *Вестн. Гражд. Инжен.* 2001. 2(27). С. 179—186.
53. Massman S., Androsov A., Danilov S. Intercomparison between finite-volume approaches to model North Sea tides // *Cont. Shelf Res. J.* 2010. V. 30. P. 680—691.
54. Turek S. A comparative study of time-stepping techniques for the incompressible Navier-Stokes equations: from fully implicit non-linear schemes to semi-implicit projection methods // *Int. J. for Numer. Meth. Fluids.* 1996. V. 22. P. 987—1011.
55. Briley W. K., Mc Donald H. Three-dimensional viscous flows with large secondary velocity // *Fluid Mech. J.* 1984. V. 144. P. 47—77.
56. Пейре Р., Тейлор Т. Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости Л.: Гидрометеоиздат, 1986. 351 с.
57. Kim J., Moin P. Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations // *Comp. Phys. J.* 1985. V. 59. P. 308—323.
58. Simo J. C., Armero F. Spectral stability and long-term behavior of transient algorithms for the incompressible Navier-Stokes and Euler equations // *Comp. Phys. Appl. Mech. Eng. J.* 1992. V. 111. P. 111—154.
59. Rannacher R. On Chorin projection method for incompressible Navier-Stokes equations / *The Navier-Stokes equations. II Theory and Numerical Methods.* Ed. Rautmann et al. Springer, 1982. P. 167—183.
60. Van Kan J. A second order accurate schemes for viscous incompressible flow // *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 1986. V. 7(3). P. 870—891.
61. Pinelli A., Vacca A., Quarteroni A. A spectral multidomain methods for the numerical simulation of turbulent flows // *Com. Phys. J.* 1997. V. 136. P. 546—558.
62. Ku H. C., Hirsh R. C., Taylor T. D. Pseudospectral Method for solution of the Three Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations // *Comp. Phys. J.* 1987. V. 70. P. 439—462.
63. Chen X. A fully hydrodynamic model for three-dimensional free-surface flows // *Int. J. for Numer. Meth. Fluids.* 2003. V. 43. P. 29—952.
64. Kocyigit M. B., Falconer A., Lin B. Three-dimensional numerical modelling of free-surface flows with non-hydrostatic pressure // *Int. J. for Numer. Meth. Fluids.* 2002.
65. Lin P., Li C. W. A  $\sigma$ -coordinate three-dimensional model for surface wave propagation // *Int. J. for Numer. Meth. Fluids.* 2002. V. 38. P. 1045—1068.
66. Вольцингер Н. Е., Андросов А. А. Моделирование прибрежной гидродинамики генерируемой оползнем // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика.* 2015. Т. 8, № 2. С. 10—21.
67. Gaberano F., Cannuto G., Lasoponara E., Petrelli G. A new three-dimensional finite-volume non-hydrostatic shock-capturing model for free-surface flow // *Hydrodyn. J.* 2017. V. 29, N 4. P. 552—556.
68. Ford R., Pain C. C., Pigotti M. D., Coddard A. J. H., de Olivera C. R., Umplebi A. P. A non-hydrostatic finite-element model for three dimensional stratified oceanic flows. Model formulation // *Mon. Weath. Rev. J.* 2004. V. 132. P. 2816—2831.
69. Fringer O. B., Gerritsen M., Street R. L. An unstructured grid finite-element volume, nonhydrostatic, parallel coastal ocean simulator // *Ocean. Model. J.* 2006. V. 14. P. 139—173.
70. Klevanny K. A., Matveev G. V., Voltzinger N. E. “CARDINAL” — coastal area dynamics investigation algorithm. // *Ann. Geophys. Part II — Oceans, Atm., Hydr. and non-linear Geophys.* 1992. V. 10. P. 188.
71. Klevanny K. A., Matveev G. V., Voltzinger N. E. An integrated modeling system for coastal area dynamics // *Int. J. for Numer. Meth. Fluids.* 1994. V. 19. P. 181—206.
72. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гос. изд. ф-м лит., 1961. 203 с.
73. Jankovsky J. A. A non-hydrostatic model for free-surface flows / *Univ. Yannerover*, 1999.
74. Westernik J. J., Luettich R. A., Blain C. A., Sheffner N. W. ADCLRC: An Advanced Three-dimensional Circulation Model for shelves, coasts and estuaries. Rep.2. Users manual / *Contractors report to the US Army Corps of Engin.* 1992. Wash.
75. Zhang Y., Baptista A. M. A semi-implicit Euler-Lagrangian finite-element model for cross-scale ocean circulation // *Ocean Model. J.* 2008. V. 21. P. 71—96.
76. Cassuli V., Walters R. A. An unstructured grid, three-dimensional model based on the shallow water equations // *Int. J. for Numer. Meth. Fluids* 2000. V. 32. P. 331—348.
77. Danilov S., Androsov A. Cell-vertex discretization of shallow water equations on mixed unstructured meshes // *Ocean Dyn. J.* 2015. V. 65(1). P. 33—47.
78. Mahadevan A., Archer D. Modeling a limited region of the ocean // *Comp. Phys. J.* 1998. V. 145. P. 555—574.



К статье *Вольцингер Н. Е. и др. Океанологические модели...*

*Voltzinger N. E. et al. Oceanological models...*

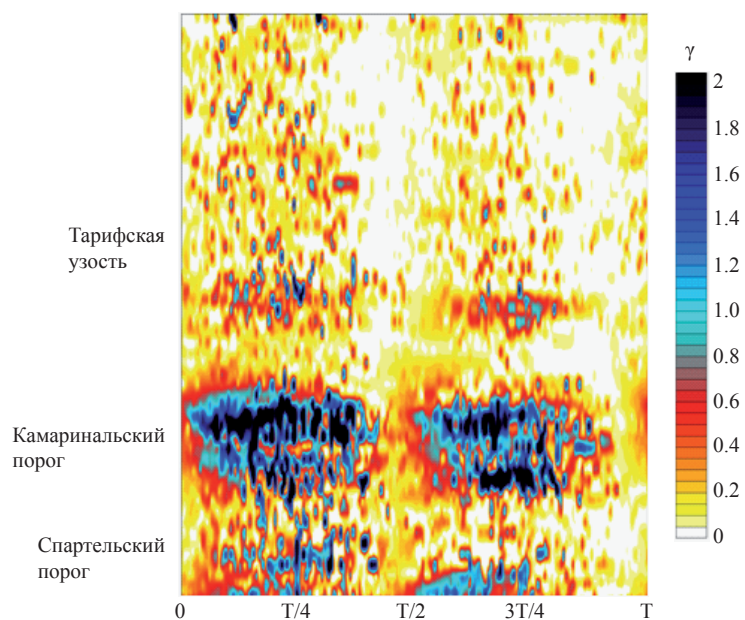


Рис. 5. Нарушение критерия гидростатики за приливной период волны  $M_2$  в различных зонах Гибралтарского пролива.

Fig. 5. Criterion of hydrostatic violation for tidal cycle  $M_2$  in the different zones of the Gibraltar Strait.

К статье Вольцингер Н. Е. и др. Океанологические модели...

Voltzinger N. E. et al. Oceanological models...

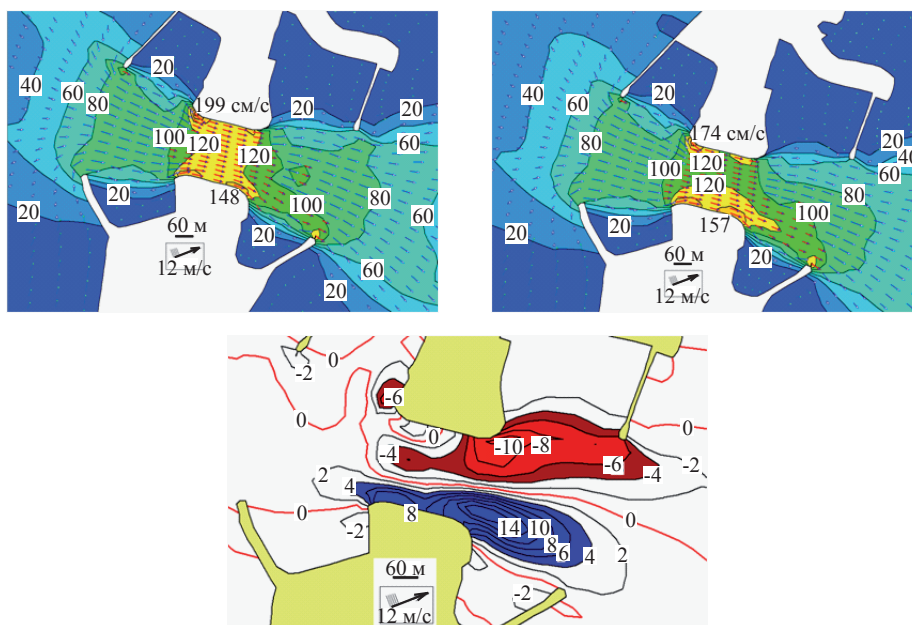


Рис. 6. Сравнение полей скорости (см/с) в срединном слое в судопропускном сооружении С-1 КЗС при расчете в ГС (слева) и НГ (справа). Внизу — разность средних по глубине скоростей. Положительные значения соответствуют увеличению скорости в НГ.

Fig. 6. Comparison of velocity fields (cm/s) in the middle layer in the navigation sluice C-1 of St.-Petersburg Flood Protection Barrier in HS (left) and NH (right). Below are differences in depth averaged velocities. Positive values denote increase of velocities.

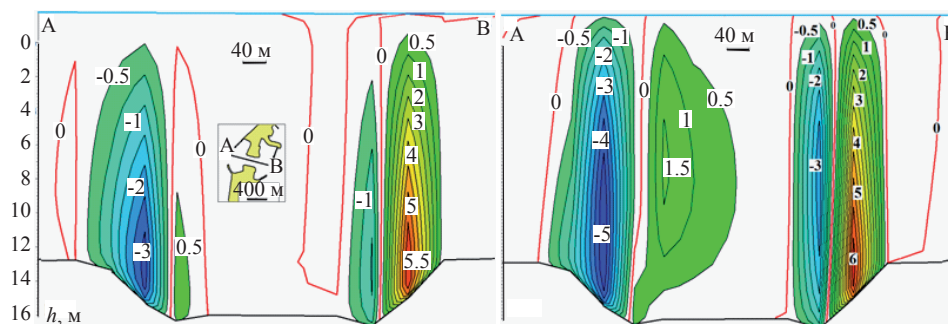


Рис. 7. Сравнение вертикальных скоростей (см/с) на вертикальном разрезе А-В, проходящем через судопропускное сооружение С-1 КЗС, при расчете в ГС (слева) и НГ (справа).

Fig. 7. The vertical velocities (cm/s) in the cross-section A-B, which passes through the navigation sluice C-1 in HS (left) and NH (right).