



DOI [https://doi.org/10.59887/2073-6673.2026.19\(2\)-7](https://doi.org/10.59887/2073-6673.2026.19(2)-7)

EDN <https://elibrary.ru/qwjpos>

УДК 535.361.2.

© В. В. Маринюк^{1,2,*}, М. А. Павлова^{2,3}, Д. Б. Rogozkin⁴, С. В. Шеберстов², 2026

¹Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 115409, Москва, Каширское шоссе, д. 31

²Институт океанологии им. П.П. Шишова РАН, 117997, Москва, Нахимовский проспект, д. 36

³Московский физико-технический институт, 141701, Московская область, Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

⁴Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова (ВНИИА), 127055, Москва, Сущевская улица, д. 22

*vmarinyuk@mail.ru

Аналитическая модель диффузного отражения света от водной среды с резкоанизотропным рассеянием

Статья поступила в редакцию 22.10.2025, после доработки 02.03.2026, принята в печать 02.06.2026

Аннотация

Цель настоящего исследования — разработка метода расчета коэффициента диффузного отражения света от сильнопоглощающей среды с резкоанизотропным рассеянием типа морской воды. Актуальность этого вопроса обусловлена широким использованием коэффициента диффузного отражения в обработке данных спектральных измерений яркости океана. Предлагаемый метод основан на разложении коэффициента отражения в ряд по кратности рассеяния на большой угол (по сравнению с характерным углом однократного рассеяния), что эквивалентно разложению в ряд по обратным степеням показателя поглощения. Для первых двух членов разложения получены явные выражения. Первый воспроизводит известный результат приближения квазиоднократного рассеяния, а второй соответствует вкладу квазидвукратного рассеяния (многократного малоуглового рассеяния до, между и после двух актов рассеяния на большой угол). Проведено сравнение найденного аналитического решения с результатами численного интегрирования уравнения переноса для индикатрисы Хенни-Гринштейна, а также для двухчленной индикатрисы Хенни-Гринштейна, моделирующей рассеяние света в морской воде. Показано, что сумма вкладов квазиоднократного и квазидвукратного рассеяний хорошо описывает дифференциальный коэффициент отражения в широком диапазоне углов падения и наблюдения.

Ключевые слова: яркость океана, коэффициент отражения, уравнение переноса излучения, квазидвукратное рассеяние

© V. V. Marinyuk^{1,2,*}, M. A. Pavlova^{2,3}, D. B. Rogozkin⁴, S. V. Sheberstov², 2026

¹Moscow Engineering Physics Institute, 31, Kashirskoe shosse, Moscow, 115409, Russia

²Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, 36, Nakhimovsky prospect, Moscow, 117997, Russia

³Moscow Institute of Physics and Technology, 9, Institutsky Lane, Moscow region, Dolgoprudny, 141701, Russia

⁴Dukhov Research Institute of Automatics (VNIIA), 22, Sushchevskaya street, Moscow, 127055, Russia

*vmarinyuk@mail.ru

Analytical model for diffuse light reflection from an aqueous highly-forward-scattering medium

Received 22.10.2025, Revised 02.03.2026, Accepted 02.06.2026

Abstract

The aim of the present study is to develop a method for calculating the diffuse component of the bidirectional reflectance of a strongly absorbing and highly-forward scattering medium like seawater. The relevance of this issue is due to the widespread use of the bidirectional reflectance in the processing of ocean color measurements. Explicit expressions for the first two terms of the

Ссылка для цитирования: Маринюк В.В., Павлова М.А., Rogozkin Д.Б., Шеберстов С.В. Аналитическая модель диффузного отражения света от водной среды с резкоанизотропным рассеянием // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2026. Т. 19, № 2. С. 77–89. EDN QWJPOS [https://doi.org/10.59887/2073-6673.2026.19\(2\)-7](https://doi.org/10.59887/2073-6673.2026.19(2)-7)

For citation: Marinyuk V.V., Pavlova M.A., Rogozkin D.B., Sheberstov S.V. Analytical model for diffuse light reflection from an aqueous highly-forward-scattering medium. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2026;19(2);77–89.

[https://doi.org/10.59887/2073-6673.2026.19\(2\)-7](https://doi.org/10.59887/2073-6673.2026.19(2)-7)

expansion are derived. The first term reproduces the well-known result of quasi-single-scattering approximation, and the second corresponds to the contribution of quasi-double scattering (the small-angle multiple scattering before, between, and after two events of large-angle scattering). To validate our analytical results, we carry out numerical integration of the radiative transfer equation for the Henyey-Greenstein phase function, as well as for the two-term Henyey-Greenstein function that models light scattering in seawater. It is shown that for optical parameters typical to seawater, the first two terms of the expansion (i. e. the sum of quasi-single- and quasi-double-scattering contributions) prove to be sufficient to describe the bidirectional reflectance with high accuracy over a wide range of illumination/viewing angles.

Keywords: Water-leaving radiance, BRDF, radiative transfer equation, quasi-double scattering

1. Введение

Исследование диффузного отражения света от морской воды привлекает значительный интерес благодаря развитию технологий измерения цвета океана [1–3]. Спектральная яркость выходящего из воды излучения содержит информацию о физических и оптических свойствах морской воды, и поэтому является важнейшей оптической характеристикой, используемой для изучения верхнего слоя океана методами дистанционного зондирования [4–12].

Основной интерес представляет зависимость коэффициента диффузного отражения от оптических параметров морской воды (показателей рассеяния и поглощения, индикатрисы рассеяния). Данная зависимость является ключевым элементом для решения обратной задачи восстановления физических и оптических параметров морской воды [2]. В современных алгоритмах [6–8, 10–14] коэффициент отражения обычно параметризуется полуэмпирической формулой [15], содержащей подгоночные параметры. Эти параметры сами зависят от углов освещения/наблюдения и индикатрисы рассеяния, и определяются путём подгонки аналитической формулы под результаты численных расчётов переноса излучения [16].

Характер многократного рассеяния света в морской воде определяется двумя основными факторами: сильно вытянутой вперед индикатрисой рассеяния ($1 - g \ll 1$, g — средний косинус угла однократного рассеяния) и сравнительно сильным поглощением, препятствующим изотропизации излучения по направлениям и переходу к режиму пространственной диффузии (показатель поглощения a много больше транспортного показателя рассеяния b_{tr} [1]; $b_{tr} = b(1 - g)$, где b — показатель рассеяния). В этих условиях обратно рассеянное излучение формируется за счет отдельных, сравнительно редких актов рассеяния на большой угол. Основной вклад в отраженный поток дает излучение, испытавшее квазиоднократное рассеяние, — малоугловое многократное рассеяние до и после единственного акта рассеяния в заднюю полусферу. Аналитическая формула для коэффициента отражения в приближении квазиоднократного рассеяния была получена в работе Гордона [17] (см. также [18–20]).

Формула Гордона определяет ведущий член разложения коэффициента отражения в ряд по малому параметру — отношению b_{tr}/a . Все попытки выйти за рамки приближения квазиоднократного рассеяния и уточнить формулу Гордона [17] основаны на полуэмпирических параметризациях коэффициента отражения, которые подгоняются под результаты численного моделирования переноса излучения [15, 21–25]. В связи с этим остается актуальной задача о разработке строгого метода решения уравнения переноса излучения для сильнопоглощающей среды ($b_{tr} \ll a < b$), который воспроизводил бы результат Гордона [17] в качестве приближения первого порядка и позволял бы вычислять члены более высокого порядка (по b_{tr}/a) без каких-либо априорных предположений. Разработка такого подхода является основной целью нашей работы.

В настоящей работе сформулирован метод вычисления коэффициента отражения R в виде разложения в ряд по кратности рассеяния на большой угол (по сравнению с характерным углом однократного рассеяния). С математической точки зрения метод заключается в разложении решения уравнения переноса излучения по степеням интеграла столкновений [26, 27]. Предлагаемый подход позволяет представить коэффициент отражения в виде разложения по обратным степеням показателя поглощения a . Параметром разложения является отношение b_{tr}/a . Для первых двух членов разложения, т. е. для вкладов квазиоднократного ($\sim 1/a$) и квазидвукратного ($\sim 1/a^2$) рассеяния, получены явные выражения. Первый член разложения воспроизводит формулу Гордона [17], второй определяет искомую поправку к ней. Для проверки полученных аналитических результатов мы провели прямое численное интегрирование уравнения переноса излучения с использованием кода DISORT, модифицированного с учетом френелевского отражения от границы раздела воздух/вода [28], и рассчитали коэффициент отражения для индикатрисы Хеньи-Гринштейна. Также проведены расчеты для индикатрисы, представляющей суперпозицию двух функций Хеньи-Гринштейна и моделирующей рассеяние света в морской воде [29–31]. Показано,

что первые два члена полученного ряда (т. е. сумма вкладов квазиоднократного и квазидвукратного рассеяний) хорошо описывают дифференциальный коэффициент отражения в широком диапазоне углов падения и наблюдения.

2. Общие соотношения

Рассмотрим отражение широкого мононаправленного пучка света от водной среды с сильным поглощением и резкоанизотропным рассеянием. Среда занимает полупространство $z > 0$, ось z направлена вглубь воды, вдоль вектора внутренней нормали к поверхности $\mathbf{n}$. Яркость излучения, падающего на границу среды нормируем как

$$I(z = -0, \mathbf{\Omega}) = \delta(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_0), \quad (\mathbf{\Omega}\mathbf{n}) > 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{\Omega}$ — единичный вектор, определяющий направление распространения излучения ($\Omega_x = \sin\theta\cos\varphi$, $\Omega_y = \sin\theta\sin\varphi$, $\Omega_z = \cos\theta$, θ и φ — полярный и азимутальный углы). Дифференциальный коэффициент диффузного отражения света определяется как отношение яркости выходящего из среды излучения $I(z = -0, \mathbf{\Omega})$ к падающему на поверхность воды потоку:

$$R(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}_0) = I(z = -0, \mathbf{\Omega})/\mu_0, \quad (\mathbf{\Omega}\mathbf{n}) < 0, \quad (2)$$

($\mu_0 = \mathbf{\Omega}_0\mathbf{z} = \cos\theta_0$). В гидрооптике используется также коэффициент яркости $\pi R(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}_0)$, представляющий собой отношение яркости выходящего из воды излучения к величине μ_0/π (т. е. к яркости излучения, отраженного от ламбертовской непоглощающей поверхности). Яркость $I(z = -0, \mathbf{\Omega})$ связана с яркостью восходящего излучения под поверхностью воды $I(z = +0, \mathbf{\Omega})$ соотношением [1]:

$$I(z = -0, \mathbf{\Omega}) = n^{-2} T_F(|\mathbf{\Omega}\mathbf{n}|) I(z = +0, \tilde{\mathbf{\Omega}}), \quad (\mathbf{\Omega}\mathbf{n}) < 0, \quad (3)$$

где n — показатель преломления воды, $T_F(\mu) = 1 - R_F(\mu)$, $R_F(\mu)$ — френелевский коэффициент отражения от поверхности воды при падении света со стороны воздуха. Единичный вектор $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ в правой части уравнения (3) обозначает направление распространения светового луча в воде, соответствующее направлению $\mathbf{\Omega}$ распространения вышедшего из воды луча, $\sin\tilde{\theta} = \sin\theta/n$, $\tilde{\varphi} = \varphi$.

Яркость под водой ($z > 0$) удовлетворяет уравнению переноса излучения:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial z} + a + b \right) I(z, \mathbf{\Omega}) = b \iint d\mathbf{\Omega}' p(\mathbf{\Omega}'\mathbf{\Omega}) I(z, \mathbf{\Omega}'), \quad (4)$$

где $\mu = \mathbf{\Omega}\mathbf{z} = \cos\theta$, a и b — показатели поглощения и рассеяния воды, $p(\mathbf{\Omega}'\mathbf{\Omega})$ — индикатриса (фазовая функция) однократного рассеяния. Все величины a , b , p , I зависят от длины волны λ . Граничное условие на поверхности воды имеет вид:

$$I(z = +0, \mathbf{\Omega}) = \frac{\mu_0}{\tilde{\mu}_0} T_F(\mu_0) \delta(\mathbf{\Omega} - \tilde{\mathbf{\Omega}}_0) + R_F^w(\mathbf{\Omega}\mathbf{n}) I(z = +0, \mathbf{\Omega} - 2\mathbf{n}(\mathbf{\Omega}\mathbf{n})), \quad (\mathbf{\Omega}\mathbf{n}) > 0, \quad (5)$$

где $\tilde{\mathbf{\Omega}}_0$ — направление распространения падающего луча в воде, $\tilde{\mu}_0 = \sqrt{n^2 - 1 + \mu_0^2}/n$, R_F^w — френелевский коэффициент отражения от границы раздела воздух/вода при падении света со стороны воды.

Коэффициент отражения $R(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}_0)$ удобно выразить, через коэффициент r , представляющий собой отношение яркости восходящего излучения к падающему потоку под поверхностью воды ($z = +0$):

$$r(\tilde{\mathbf{\Omega}}, \tilde{\mathbf{\Omega}}_0) = I(z = +0, \tilde{\mathbf{\Omega}})/(\mu_0 T_F(\mu_0)), \quad (\tilde{\mathbf{\Omega}}\mathbf{n}) < 0. \quad (6)$$

Из уравнений (2), (3) и (6) находим искомое соотношение:

$$R(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}_0) = n^{-2} T_F(\mu_0) T_F(|\mu|) r(\tilde{\mathbf{\Omega}}, \tilde{\mathbf{\Omega}}_0), \quad (7)$$

где $|\mu| = |\mathbf{\Omega}\mathbf{n}|$ — косинус угла между направлением наблюдения $\mathbf{\Omega}$ и внешней нормалью к поверхности моря (т. е. косинус зенитного угла наблюдения).

Ниже, для моделирования резко анизотропного рассеяния в морской воде мы используем индикатрису Хенби-Гринстенейна:

$$p_{HG}(\cos\vartheta; g) = \frac{1 - g^2}{4\pi(1 + g^2 - 2g\cos\vartheta)^{3/2}}, \quad (8)$$

(g — средний косинус угла однократного рассеяния, $1 - g \ll 1$), а также индикатрису, представляющую собой суперпозицию двух функций Хеньи-Гринштейна [29–31]:

$$p(\cos \vartheta) = (1 - x)p_{HG}(\cos \vartheta, g_1) + x p_{HG}(\cos \vartheta, g_2), \quad (9)$$

где средний косинус $g_2 \leq 0$, а величина g_1 близка к единице, $1 - g_1 \ll 1$. Для заданных значений g_1 и g_2 , весовой множитель x в формуле (9) определяет отношение b_b/b , где b_b — коэффициент обратного рассеяния:

$$b_b = b \int_{\pi/2}^{\pi} 2\pi \sin \vartheta p(\cos \vartheta) d\vartheta. \quad (10)$$

Угловые зависимости (8) и (9) имеют выраженный пик в направлении «вперед» с шириной порядка $\vartheta_0 \approx 1 - g$ (или $1 - g_1$). Поэтому, для рассматриваемых индикатрис величина $\vartheta_0 \approx 1 - g$ имеет смысл характерного угла однократного рассеяния. В режиме многократного рассеяния яркость излучения изменяется на масштабах много больших ϑ_0 [26, 27].

3. Разложение по кратности рассеяния на большой угол

Основная идея нашего подхода заключается в построении решения уравнения переноса излучения в виде разложения по степеням интеграла столкновений Больцмана. Сгруппируем вместе «уход» и «приход» в интеграле упругих столкновений в уравнении переноса (4):

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial z} + a \right) I(z, \Omega) = b \iint d\Omega' p(\Omega', \Omega) [I(z, \Omega') - I(z, \Omega)]. \quad (11)$$

Если не интересоваться рассеянием на предельно малые углы, сопоставимые с характерным углом однократного рассеяния ϑ_0 (т. е. считать, что угол отклонения от направления падающего луча в воде много больше ϑ_0), то вклад в интеграл будут давать углы рассеяния, значительно превышающие угол ϑ_0 . В этом случае яркость рассеянного излучения будет плавной функцией углов по сравнению с индикатрисой рассеяния (угловая зависимость яркости имеет характерный масштаб много больший ϑ_0 [26, 27]), и вклад от рассеяния вперед оказывается подавленным благодаря разности яркостей в интеграле столкновений в уравнении (11). Поэтому разложение яркости в ряд по степеням интеграла столкновений представляет собой разложение по кратности рассеяния на «большой» угол [26, 27].

Используя стандартную процедуру [32, 33] (рассматривая правую часть уравнения (11) как неоднородность), запишем уравнение (11) в интегральной форме. С учетом граничного условия (5) получим следующее уравнение для яркости излучения под водой ($z > 0$):

$$I(z, \Omega) = \frac{\mu_0}{\tilde{\mu}_0} T_F(\mu_0) \delta(\Omega - \tilde{\Omega}_0) e^{-az/\tilde{\mu}_0} + R_F^w(\mu) I(z=+0, \Omega - 2\mathbf{n}(\Omega\mathbf{n})) e^{-az/\mu} \eta(\mu) + \\ + \frac{b}{|\mu|} \int_0^\infty dz' e^{-a(z-z')/\mu} \eta\left(\frac{z-z'}{\mu}\right) \iint d\Omega' p(\Omega', \Omega) [I(z', \Omega') - I(z', \Omega)], \quad (12)$$

где $\eta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда ($\eta = 1$ при $x > 0$ и $\eta = 0$ при $x < 0$). Решая уравнение (12) методом последовательных приближений, с учетом соотношения (3), получим следующее разложение для коэффициента отражения (2):

$$R(\Omega, \Omega_0) = n^{-2} T_F(\mu_0) T_F(|\mu|) [r^{(1)} + r^{(2)} + \dots], \quad (13)$$

$$r^{(1)} = \frac{b}{a} \frac{p(\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}_0)}{\tilde{\mu}_0 + |\tilde{\mu}|}, \quad (14)$$

$$r^{(2)} = \frac{(b/a)^2}{\tilde{\mu}_0 + |\tilde{\mu}|} \left[\iint d\Omega' \frac{\mu_* p(\tilde{\Omega}, \Omega') p(\Omega', \tilde{\Omega}_0)}{\mu_* + |\mu'|} - p(\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}_0) \right] + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \iint_{\mu' > 0} d\Omega' \frac{\mu' R_F^w(\mu') p(\tilde{\Omega}, \Omega') p(\Omega' - 2\mathbf{n}(\Omega'\mathbf{n}), \tilde{\Omega}_0)}{(\tilde{\mu}_0 + \mu')(\mu' + |\tilde{\mu}|)}, \quad (15)$$

где $\mu_* = |\tilde{\mu}| \eta(\mu') + \tilde{\mu}_0 \eta(-\mu')$. Формулы (13)–(15) представляют собой первые два члена разложения $R(\Omega, \Omega_0)$ по обратным степеням показателя поглощения. Выражения (14) и (15) определяют вклады излучения, испытавшего квазиоднократное и квазидвукратное рассеяние, соответственно. Первый член разложения $R^{(1)}$ совпадает с хорошо известной формулой Гордона [15], если в знаменателе последней заменить сумму $a + b_b$ на a .

Предложенный метод решения уравнения переноса является модификацией стандартного разложения в ряд по кратности рассеяния [33]. Представление яркости излучения в виде ряда по кратности рассеяния представляет собой разложение по степеням интегрального члена в уравнении (4). В этом случае интегральное уравнение для яркости записывается в виде:

$$I(z, \Omega) = \frac{\mu_0}{\tilde{\mu}_0} T_F(\mu_0) \delta(\Omega - \tilde{\Omega}_0) e^{-(a+b)z/\tilde{\mu}_0} + R_F^w(\mu) I(z=0, \Omega - 2\mathbf{n}(\Omega\mathbf{n})) e^{-(a+b)z/\mu} \eta(\mu) + \\ + \frac{b}{|\mu|} \int_0^\infty dz' e^{-(a+b)(z-z')/\mu} \eta\left(\frac{z-z'}{\mu}\right) \iint d\Omega' p(\Omega'\Omega) I(z', \Omega'). \quad (16)$$

Решение уравнение (16) методом последовательных приближений дает разложение яркости в ряд по степеням вероятности выживания кванта ω_0 , $\omega_0 = b/(a+b)$, что соответствует разложению в ряд по кратности рассеяния. Вклад излучения, испытавшего истинное n -кратное рассеяние, в коэффициент отражения имеет вид [33]:

$$R^{\text{true}(n)} = \omega_0^n F_n[p(\Omega'\Omega)] \quad (17)$$

где F_n — интеграл, содержащий свертку n индикатрис рассеяния. Нетрудно видеть, что уравнение (12) отличается от уравнения (16) (также как и уравнение (11) отличается от уравнения переноса (4), записанного в традиционной форме) заменой показателя экстинкции на показатель поглощения, а индикатрисы рассеяния на разность индикатрисы и δ -функции:

$$a+b \rightarrow a, \quad p(\Omega'\Omega) \rightarrow p(\Omega'\Omega) - \delta(\Omega' - \Omega). \quad (18)$$

Следовательно, выражение для вклада излучения, испытавшего квази- n -кратное рассеяние будет отличаться от (17) лишь заменой (18):

$$R^{(n)} = (b/a)^n F_n[p(\Omega'\Omega) - \delta(\Omega' - \Omega)]. \quad (19)$$

Таким образом, зная явный вид функционала F_n , по формуле (19) можно рассчитать любой член разложения по кратности рассеяния на большой угол. Явный вид первых двух членов определяется выражениями (13)–(15).

Отметим, что изложенный выше метод в приближении малых углов был использован для расчета распределения излучения в узком пучке, распространяющемся в морской воде [26, 27]. Аналогичная идея о разложении по кратности рассеяния на большой угол лежит в основе представления аэрозольного вклада в яркость атмосферы в виде ряда по степеням оптической толщины аэрозоля [34].

4. Результаты численных расчетов

Для верификации аналитических выражений (13)–(15) было проведено численное интегрирование уравнения переноса (4) с помощью кода DISORT, модифицированного с учетом френелевского отражения от поверхности воды [28] (относительно модификаций метода дискретных ординат в случае резко анизотропного рассеяния см. [35]). Рассеяние света морской водой моделировалось двухчленной индикатрисой Хеньи-Гринштейна (9). Были рассчитаны зависимости коэффициента отражения от угла падения θ_0 при наблюдении в надира, а также зависимость от зенитного угла наблюдения θ_v ($\cos\theta_v = |\mu|$) при различных углах падения. Ниже приведено сравнение формул (13)–(15) с результатами численных расчетов.

4.1. Индикатриса Хеньи-Гринштейна

На рис. 1 ($a-d$) показаны результаты численного расчета коэффициента отражения (2) для индикатрисы Хеньи-Гринштейна. Расчёты были проведены для двух значений среднего косинуса угла однократного рассеяния, $g = 0,9$ и $g = 0,95$, и двух значений вероятности выживания кванта $\omega_0 = 0,7$ и $\omega_0 = 0,8$. На рисунках также показаны отдельно вклад квазиоднократного рассеяния $R^{(1)}$ и сумма вкладов квазиоднократного и квазидвукратного рассеяния $R^{(1)} + R^{(2)}$, рассчитанные по формулам (13)–(15).

Результаты расчета $R^{(1)} + R^{(2)}$ очень хорошо согласуются с численными данными. Точность аналитического выражения тем выше, чем анизотропнее рассеяние и сильнее поглощение, т. е. чем меньше отношение b_{tr}/a транспортного показателя рассеяния к показателю поглощения. Относительная погрешность выражения для $R^{(1)} + R^{(2)}$ возрастает с уменьшением угла рассеяния (т. е. угла между направлениями $\tilde{\Omega}$ и $\tilde{\Omega}_0$).

Тем не менее, в самом неблагоприятном случае, $g = 0,9$ и $\omega_0 = 0,8$ ($b_{tr}/a = 0,4$), относительная погрешность составляет менее 10 % для углов $\widehat{\Omega_0\Omega} > 120^\circ$ и достигает около 20 % для $\widehat{\Omega_0\Omega} \approx 90^\circ$. При $g = 0,95$ или $\omega_0 = 0,7$ относительная погрешность выражения для $R^{(1)} + R^{(2)}$ не превышает 10 % во всем рассматриваемом диапазоне углов.

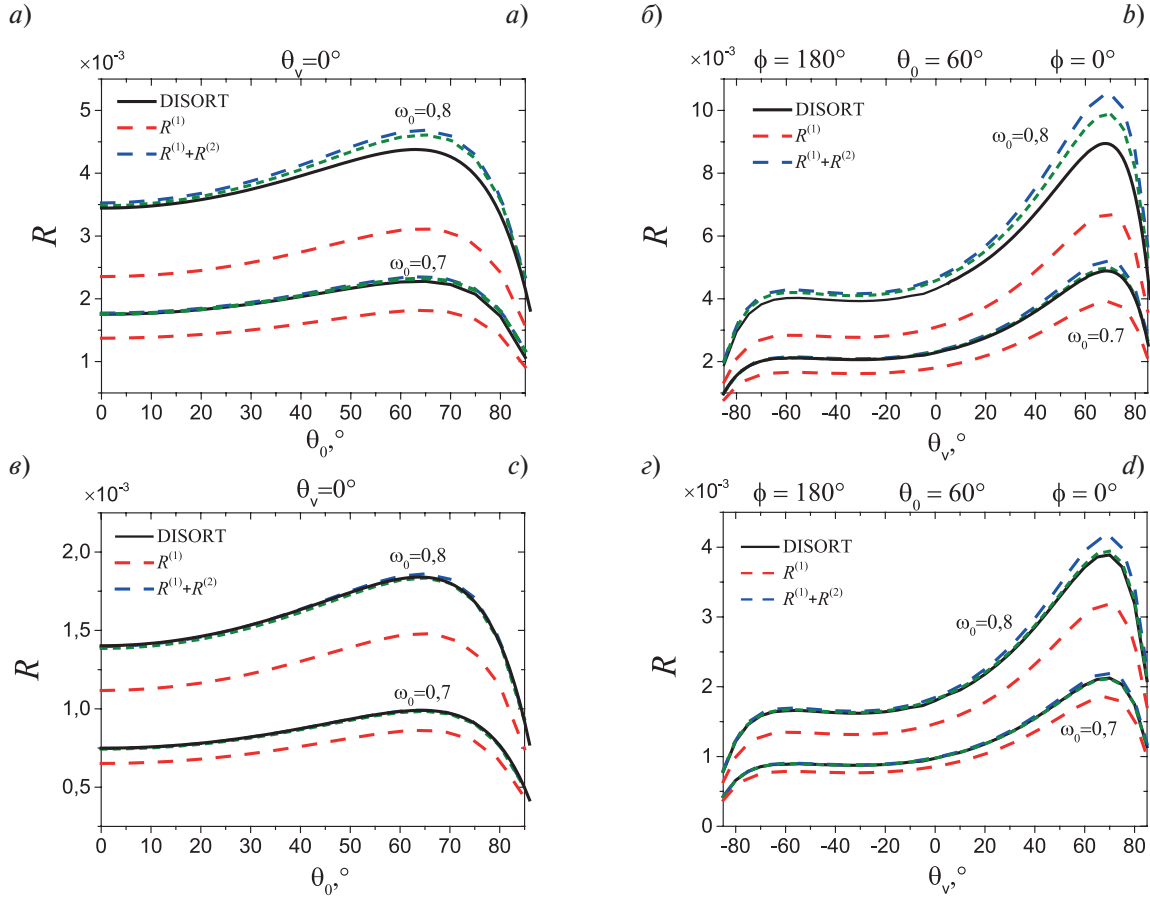


Рис. 1. Дифференциальный коэффициент отражения от среды с индикатрисой рассеяния Хеньи-Гринштейна по данным численного интегрирования уравнения переноса излучения (сплошные кривые), расчета по формулам (13)–(15) (штриховые линии) и по формуле (20) (пунктир). (а, в) Зависимость коэффициента отражения от угла падения при наблюдении в нади́р. (б, г) Зависимость коэффициента отражения от зенитного угла наблюдения в плоскости падения, угол падения 60° . Средний косинус угла однократного рассеяния (а, б) $g = 0,9$, (в, г) $g = 0,95$

Fig. 1. Bidirectional reflectance for a medium with the Henyey-Greenstein scattering phase function, based on numerical integration of the radiative transfer equation (solid curves), calculation using formulas (13)–(15) (dashed lines), and using formula (20) (dotted lines). (а, в) Dependence of the reflectance on the incidence angle for nadir observation. (б, г) Dependence of the reflectance on the observation zenith angle in the plane of incidence, incidence angle 60° . Mean cosine of the single-scattering angle (а, б) $g = 0,9$, (в, г) $g = 0,95$

Как видно из графиков, относительный вклад квазидвукратного рассеяния возрастает с увеличением отношения b_{tr}/a (т. е. с уменьшением g или увеличением ω_0). Для значений $g = 0,9$ и $\omega_0 = 0,8$ вклад квазиоднократного рассеяния в яркость отраженного излучения составляет около 70 % (см. рис. 1(а, б)). Отметим, что для индикатрисы Хеньи-Гринштейна приближение квазиоднократного рассеяния всегда даёт заниженное значение R , и вклад квазидвукратного рассеяния $R^{(2)}$ оказывается положительным.

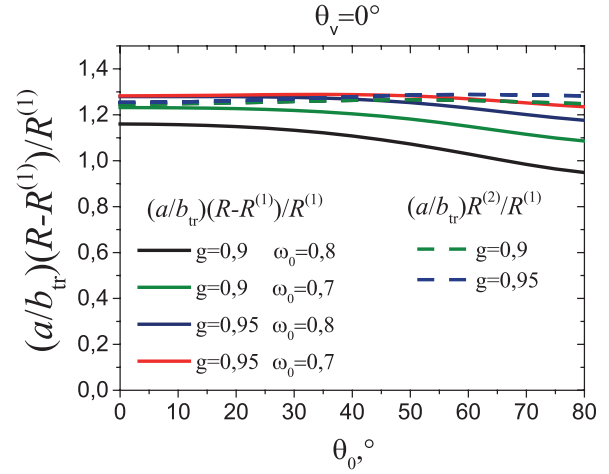
Для индикатрисы Хеньи-Гринштейна была обнаружена интересная особенность: отношение вкладов квазидвукратного и квазиоднократного рассеяния $R^{(2)}/R^{(1)}$ очень слабо зависит от углов падения и наблюдения и пропорционально отношению транспортного показателя рассеяния к показателю поглощения, $R^{(2)}/R^{(1)} = k b_{tr}/a$ (см. рис. 2). Таким образом, угловая зависимость $R(\Omega, \Omega_0)$ близка к угловой зависимости вклада квазиоднократного рассеяния $R^{(1)}(\Omega, \Omega_0)$, и коэффициент отражения можно аппроксимировать следующим простым выражением:

$$R^{HG}(\Omega, \Omega_0) \approx n^{-2} T_F(\mu_0) T_F(|\mu|) \frac{b}{a} \left(1 + k \frac{b_{tr}}{a} \right) \frac{p_{HG}(\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega}_0)}{\tilde{\mu}_0 + |\tilde{\mu}|}, \quad (20)$$

где значение коэффициента пропорциональности близко к 1,2. Точность формулы (20) проиллюстрирована на рис. 1.

Рис. 2. Отношение вкладов квазидвукратного и квазиоднократного рассеяния в коэффициент отражения для индикатрисы Хеньи-Гринштейна (*штриховые кривые*). Сплошными кривыми показана относительная разность между численным значением R и вкладом квазиоднократного рассеяния $R^{(1)}$ в единицах отношения b_{tr}/a .

Fig. 2. Ratio of the contributions of quasi-double and quasi-single scattering to the reflectance for the Henyey-Greenstein phase function (*dashed curves*). The solid curves show the relative difference between the numerical value R and the quasi-single-scattering contribution $R^{(1)}$, in units of the ratio b_{tr}/a .



4.2. Моделирование отражения от морской воды

В отличие от индикатрисы Хеньи-Гринштейна, монотонно убывающей с углом рассеяния, «морские» индикатрисы могут иметь плато или даже возрастать вблизи направления «назад», что обусловлено рассеянием на мелких частицах, взвешенных в морской воде, а также рэлеевским рассеянием в чистой воде. В этом разделе мы исследуем, как увеличение вероятности обратного рассеяния повлияет на величину вкладов квазиоднократного и квазидвукратного рассеяния. Рассеяние света в морской воде удобно моделировать с помощью индикатрисы (9), представляющей собой суперпозицию двух функций Хеньи-Гринштейна [29–31].

На рис. 3 представлены результаты численного расчета коэффициента отражения, а также результаты расчета по формулам (13)–(15), для индикатрисы (9) с параметрами $g_1 = 0,94$, $g_2 = -0,25$ и множителем x , изменяющимся в пределах от 0 до 0,1. Значения g_1 и g_2 выбраны таким образом, чтобы индикатриса (9) (при $x = 0,04$) воспроизводила одну из фазовых функций Мореля для воды первого типа (см. рис. 3, а). Как видно из рисунка, увеличение вероятности обратного рассеяния приводит к значительному увеличению вклада квазиоднократного рассеяния. При значениях $b_b/b > 0,02$ величина $R^{(1)}$ начинает превышать (в направлении точно «назад») результат численного расчета (см. рис. 3, б). В этом случае вклад квазиоднократного рассеяния завышает истинное значение R , и вклад квазидвукратного рассеяния $R^{(2)}$ становится отрицательным. При дальнейшем увеличении отношения b_b/b вклад $R^{(2)}$ становится отрицательным для всех углов (см. рис. 3, г). Учет вклада квазидвукратного рассеяния, как и ранее, значительно повышает точность аналитической формулы для коэффициента отражения. Для значений $\omega_0 = 0,7$ и $b_b/b < 0,05$, относительная погрешность аналитической формулы составляет менее 5 % для всех углов падения. Максимальная погрешность (около 7 %) достигается в обратном направлении при отношении $b_b/b = 0,08$ (весовой множитель $x = 0,1$).

Как показывает наш анализ, с увеличением отношения b_b/b , для заданного направления наблюдения/освещения, вклад квазидвукратного рассеяния $R^{(2)}$ монотонно уменьшается, переходит через ноль и затем уменьшается, оставаясь отрицательным (абсолютное значение $|R^{(2)}|$ увеличивается). При определенном значении b_b/b вклад квазидвукратного рассеяния обращается в ноль, и отличие $R^{(1)}$ от R определяется вкладом более высоких порядков рассеяния на большой угол. В этом случае, однако, вклад квазиоднократного рассеяния $R^{(1)}$ настолько хорошо аппроксимирует истинное значение R (см. кривые для $x = 0,01$ и $0,02$ на рис. 3, б, в), что нет необходимости учитывать третий член разложения $R^{(3)}$. Таким образом, уравнения (13)–(15) обеспечивают хорошее приближение для коэффициента отражения $R(\Omega, \Omega_0)$ для всех реалистичных значений отношения b_b/b .

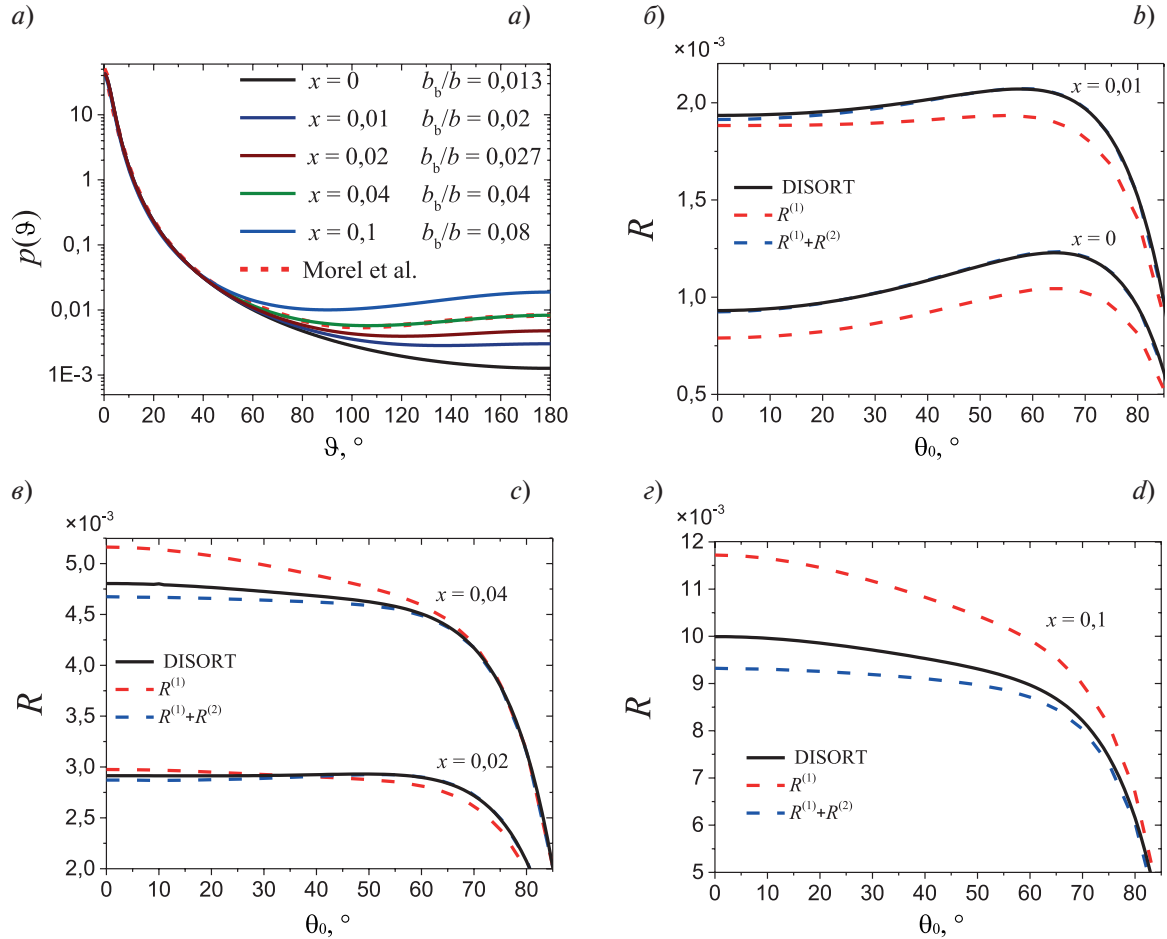


Рис. 3. Дифференциальный коэффициент отражения от среды с двухчленной индикатрисой рассеяния (9): *a* — двухчленная индикатриса рассеяния (9) с параметрами $g_1 = 0,94$, $g_2 = -0,25$. Штриховой линией показана индикатриса Мореля [9] для длины волны 500 нм и концентрации хлорофилла $0,05 \text{ мг м}^{-3}$; *b–d* — коэффициент отражения от среды с индикатрисой рассеяния (9) по данным численного интегрирования уравнения переноса излучения (сплошные кривые) и расчета по формулам (13)–(15) (штриховые линии). Вероятность выживания кванта $\omega_0 = 0,7$, наблюдение в нади́р

Fig. 3. Bidirectional reflectance for a medium with the two-term scattering phase function (9): *a* — Two-term scattering phase function (9) with parameters $g_1 = 0.94$, $g_2 = -0.25$. The dashed line shows Morel's phase function [9] for a wavelength of 500 nm and a chlorophyll concentration of 0.05 mg m^{-3} . *b–d* — bidirectional reflectance for a medium with the scattering phase function (9), based on numerical integration of the radiative transfer equation (solid curves) and calculation using formulas (13)–(15) (dashed lines). Single-scattering albedo $\omega_0 = 0.7$, nadir observation.

5. Обсуждение

Для решения обратной задачи важнейшим является вопрос о том, насколько чувствителен коэффициент отражения к форме индикатрисы рассеяния морской воды, и насколько точно можно его определить с помощью единственного параметра — показателя обратного рассеяния b_b [1], представляющего интегральную характеристику индикатрисы рассеяния. Относительно этого вопроса существует две позиции, а именно, что форма индикатрисы имеет решающее влияние на коэффициент отражения (погрешность может достигать 200 % [30]) и вторая, что при определенных углах освещения/наблюдения влияние индикатрисы на значение коэффициента отражения может быть не столь значительным [15, 36]. Полученные в нашей работе результаты дают ответ на этот вопрос.

Как следует из нашего анализа, главный вклад в коэффициент отражения дает первый член разложения $R^{(1)}$ по степеням b_b/a (см. формулу (14)). Для значений оптических параметров, типичных для морской воды, относительная погрешность $R^{(1)}$ составляет порядка 20–25 % или меньше. Поскольку $R^{(1)}$ прямо пропорционален индикатрисе рассеяния $p(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}_0)$, именно индикатриса является главным фактором, опреде-

ляющим коэффициент отражения для заданных углов освещения/наблюдения. Проиллюстрируем это следующим расчетом. Следуя идее работы [30], мы сравнили коэффициенты отражения для трех различных индикатрис рассеяния (9), имеющих одинаковое отношение b_b/b . Расчеты были проведены для двухчленной индикатрисы Хеньи-Гринстейна (9) с параметрами (g_1, g_2) равными $g_1 = 0,9, g_2 = 0$; $g_1 = 0,95, g_2 = 0$ и $g_1 = 0,95, g_2 = -0,25$. Весовой множитель подбирался так, чтобы у всех индикатрис отношение b_b/b равнялось $\approx 0,023$. Результаты расчетов показаны на рис. 4, а. Как следует из графиков, различие в значениях коэффициента отражения оказывается весьма существенным (максимальное различие составляет примерно 45 %). В то же время, если подобрать у этих индикатрис весовой множитель так, чтобы совпадали значения самих индикатрис в заданном направлении, то различие в коэффициентах отражения становится существенно меньше. На рис. 4, б показаны результаты расчеты для двухчленной индикатрисы Хеньи-Гринстейна (9) с теми же тремя наборами средних косинусов (g_1, g_2) , но с одинаковым значением индикатрисы в направлении точно назад, $p_b = p(180^\circ) = 0,005$. Как видно из рисунка, максимальное различие коэффициентов отражения в направлении точно назад уменьшилось почти в три раза (с 45 % до 17 % между нижней и верхней кривыми при $\theta_0 = 0^\circ$; при этом заметно возросло различие для других направлений освещения).

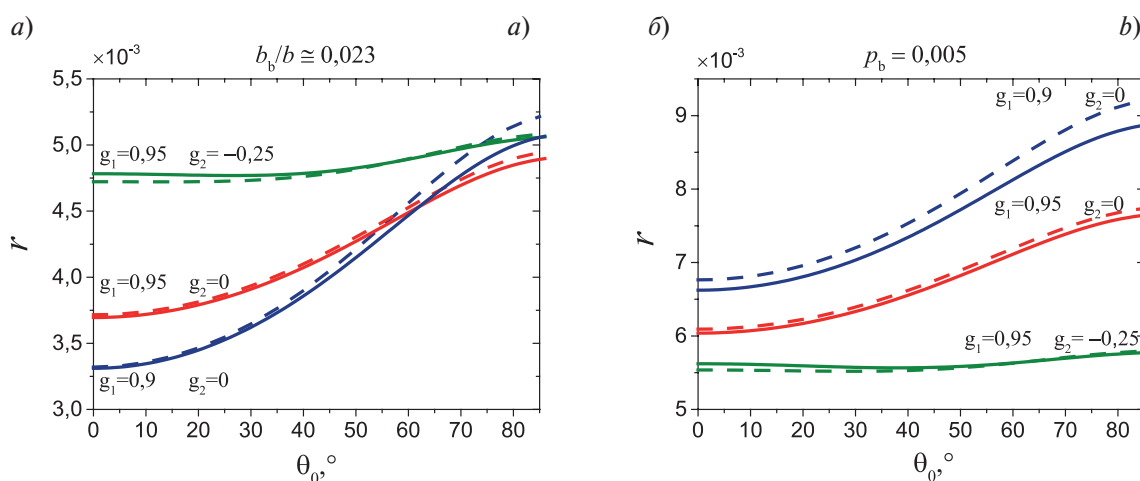


Рис. 4. Коэффициент отражения r для трех различных индикатрис (9), имеющих (а) одинаковое отношение b_b/b ; (б) одно и то же значение $p(180^\circ)$. Вероятность выживания кванта $\omega_0 = 0,7$, наблюдение в надир. Результаты численного интегрирования уравнения переноса показаны сплошными линиями, результаты расчета $r^{(1)} + r^{(2)}$ по формулам (14), (15) — штриховыми

Fig. 4. Reflection coefficient r for three different scattering phase functions (9) having (a) the same ratio b_b/b ; (b) the same value of $p(180^\circ)$. Single-scattering albedo $\omega_0 = 0.7$, nadir observation. Results of numerical integration of the radiative transfer equation are shown by solid lines, results of calculation of $r^{(1)} + r^{(2)}$ using formulas (14), (15) — by dashed lines

Таким образом, главным фактором, определяющим коэффициент отражения, является значение индикатрисы рассеяния на угол $\hat{\Omega}\hat{\Omega}_0$, соответствующий направлениям освещения и наблюдения. Более точное определение коэффициента R требует учета следующего члена разложения (15), для расчета которого необходимо знание индикатрисы рассеяния во всем диапазоне углов. Сумма вкладов квазиоднократного и квазидвукратного рассеяний, как и прежде, обеспечивает высокую точность расчета коэффициента отражения (см. штриховые кривые на рис. 4, а и б).

6. Заключение

В настоящей работе развит метод последовательных приближений для решения уравнения переноса в сильнопоглощающей среде типа морской воды, основанный на разложении яркости в ряд по кратности рассеяния на «большой» (по сравнению с углом однократного рассеяния) угол. Метод позволяет представить яркость выходящего из воды излучения в виде быстро сходящегося ряда по обратным степеням показателя поглощения, и тем самым рассчитать коэффициент отражения аналитически, с контролируемой точностью. Для первых двух членов ряда получены явные выражения, уточняющие известный результат квазиоднократного приближения. Для верификации полученных аналитических формул было проведено численное интегрирование уравнения переноса с помощью кода DISORT для индикатрисы, моделирую-

щей рассеяние света в морской воде. Сравнение с результатами численного расчета показало, что полученное аналитическое выражение хорошо описывает дифференциальный коэффициент отражения в широком диапазоне углов падения и наблюдения, что может быть полезно при решении обратной задачи — восстановлении оптических параметров морской воды из данных натурных измерений.

Финансирование

В.В. Маринюк, М.А. Павлова и С.В. Шеберстов выражают благодарность за финансовую поддержку со стороны ИО РАН (теоретическое исследование выполнено в рамках государственного задания Минобрнауки России для ИО РАН (тема № FMWE-2024-0015); численные расчеты проведены при поддержке гранта Российского научного фонда № 25-77-10065).

Funding

V.V. Marinyuk, M.A. Pavlova, and S.V. Sheberstov acknowledge financial support from IO RAS (the theoretical study has been carried out as part of the state assignment of SIO RAS, theme № FMWE-2024-0015, and the numerical computations have been performed with the support of the Russian Science Foundation, grant № 25-77-10065).

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interests

The authors declare no conflict of interests.

Литература

1. Mobley C.D. Light and water: radiative transfer in natural waters. San Diego, Calif: Academic; 1994. 592 p.
2. Werdell P.J., McKinnis L.I.W., Boss E., et al. An overview of approaches and challenges for retrieving marine inherent optical properties from ocean color remote sensing // Progress in Oceanography. 2018. Vol. 160. P. 186–212. EDN YEYMUX. <https://doi.org/10.1016/j.pocean.2018.01.001>
3. Groom S., Sathyendranath S., Ban Y., et al. Satellite Ocean Colour: Current Status and Future Perspective // Frontiers in Marine Science. 2019; Vol. 6. P. 485. <https://doi.org/10.3389/fmars.2019.00485>
4. Morel A., Gentili B. Diffuse reflectance of oceanic waters. II Bidirectional aspects // Applied Optics. 1993. Vol. 32. P. 6864–6879. <https://doi.org/10.1364/AO.32.006864>
5. Morel A., Gentili B. Diffuse reflectance of oceanic waters. III. Implication of bidirectionality for the remote-sensing problem // Applied Optics. 1996. Vol. 35. P. 4850–4862. <https://doi.org/10.1364/AO.35.004850>
6. Garver S.A., Siegel D.A. Inherent optical property inversion of ocean color spectra and its biogeochemical interpretation: 1. Time series from the Sargasso Sea // Journal of Geophysical Research. 1997. Vol. 102(C8). P. 18607–18625. <https://doi.org/10.1029/96JC03243>
7. O'Reilly J.E., Maritorena S., Mitchell B.G. et al. Ocean color chlorophyll algorithms for SeaWiFS // Journal of Geophysical Research. 1998. Vol. 103. P. 24937–24953. <https://doi.org/10.1029/98JC02160>
8. Maritorena S., Siegel D.A., Peterson A. Optimization of a semianalytical ocean color model for global-scale applications // Applied Optics. 2002. Vol. 41. P. 2705–2714. EDN LVCWIP. <https://doi.org/10.1364/AO.41.002705>
9. Morel A., Antoine D., Gentili B. Bidirectional reflectance of oceanic waters: accounting for Raman emission and varying particle scattering phase function // Applied Optics. 2002. Vol. 41. P. 6289–6306. <https://doi.org/10.1364/AO.41.006289>
10. Lee Z.P., Carder K.L., Arnone R.A. Deriving inherent optical properties from water color: a multi-band quasi-analytical algorithm for optically deep waters // Applied Optics. 2002. Vol. 41. P. 5755–5772. EDN LVCWJJ. <https://doi.org/10.1364/AO.41.005755>
11. Werdell P.J., Franz B.A., Sean W. et al. Generalized ocean color inversion model for retrieving marine inherent optical properties // Applied Optics. 2013. Vol. 52. P. 2019–2037. <https://doi.org/10.1364/AO.52.002019>
12. Lewis K.M., Arrigo K.R. Ocean color algorithms for estimating chlorophyll a, CDOM absorption, and particle backscattering in the Arctic Ocean // Journal of Geophysical Research: Oceans. 2020. Vol. 125. e2019JC015706. EDN OHWXJM. <https://doi.org/10.1029/2019JC015706>
13. Najah A., Al-Shehhi M.R. Performance of the Ocean Color Algorithms: QAA, GSM, and GIOP in Inland and Coastal Waters // Remote Sensing in Earth Systems Sciences. 2021. Vol. 4. P. 235–248. EDN MQHQVO. <https://doi.org/10.1007/s41976-022-00068-3>

14. Moore T.S., Kolluru S., Tonizzo A., Twardowski M.S. Bio-optical inversion scheme based on the radiative transfer equation // *Optics Express*. 2024. Vol. 32. P. 41270–41296. <https://doi.org/10.1364/OE.508090>
15. Gordon H.R., Brown O.B., Evans R.H. et al. A semianalytic radiance model of ocean color // *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*. 1988. Vol. 93. P. 10909–10924. <https://doi.org/10.1029/JD093iD09p10909>
16. Gordon H.R. Ocean color remote sensing: Influence of the particle phase function and the solar zenith angle // *Eos, Transactions, American Geophysical Union*. 1986. Vol. 67, No. 14 P. 1055.
17. Gordon H.R. Simple calculation of the diffuse reflectance of the ocean // *Applied Optics*. 1973. Vol. 12. P. 2803–2804. <https://doi.org/10.1364/AO.12.002803>
18. Голубицкий Б.М., Левин И.М., Танташев М.В. Коэффициент яркости полубесконечного слоя морской воды // *Известия Академии наук СССР. Физика атмосферы и океана*. 1974. Т. 10. С. 1235–1238.
19. Зеге Э.П. Коэффициент яркости света, отраженного полубесконечной средой // *Известия Академии наук СССР. Физика атмосферы и океана*. 1983. Т. 19. С. 927–936.
20. Зеге Э.П., Иванов А.П., Кацев И.Л. Перенос изображения в рассеивающей среде. Минск: Наука и техника, 1985. 327 с.
21. Zaneveld J.R.V. A theoretical derivation of the dependence of the remotely sensed reflectance of the ocean on the inherent optical properties // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 1995. Vol. 100. P. 13135–13142. <https://doi.org/10.1029/95JC00453>
22. Jerome J.H., Bukata R.P., Miller J.R. Remotesensing reflectance and its relationship to optical properties of natural waters // *International Journal of Remote Sensing*. 1996. Vol. 17. P. 3135–3155. <https://doi.org/10.1080/01431169608949135>
23. Albert A., Mobley C.D. An analytical model for subsurface irradiance and remote sensing reflectance in deep and shallow case-2 waters // *Optics Express*. 2003. Vol. 11. P. 2873–2890. EDN MEKHSX. <https://doi.org/10.1364/OE.11.002873>
24. Park Y.-J., Ruddick K. Model of remote-sensing reflectance including bidirectional effects for case 1 and case 2 waters // *Applied Optics*. 2005. Vol. 44. P. 1236–1249. <https://doi.org/10.1364/AO.44.001236>
25. Twardowski M., Tonizzo A. Ocean Color Analytical Model Explicitly Dependent on the Volume Scattering Function // *Applied Sciences*. 2018. Vol. 8(12). P. 2684. <https://doi.org/10.3390/app8122684>
26. Маринюк В.В., Rogozkin D.B., Шеберстов С.В. Распространение пучка света в поглощающей среде с крупномасштабными неоднородностями // *Оптика и спектроскопия*. 2014. Т. 117. С. 106–114. EDN SGVVHL. <https://doi.org/10.7868/S0030403414070150>
27. Marinyuk V.V., Rogozkin D.B., Sheberstov S.V. Optical beam spread in seawater // *Optics Communications*. 2025. Vol. 574. 131098. EDN SORGZD. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2024.131098>
28. Jin Z., Stamnes K. Radiative transfer in nonuniformly refracting layered media: atmosphere-ocean system // *Applied Optics*. 1994. Vol. 33. P. 431–442. <https://doi.org/10.1364/AO.33.000431>
29. Kattawar G.W. A three-parameter analytic phase function for multiple scattering calculations // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 1975. Vol. 15. P. 839–849. [https://doi.org/10.1016/0022-4073\(75\)90095-3](https://doi.org/10.1016/0022-4073(75)90095-3)
30. Plass G.N., Kattawar G.W., Humphreys T.J. Influence of the oceanic scattering phase function on the radiance // *Journal of Geophysical Research*. 1985. Vol. 90(C2). P. 3347–3351. <https://doi.org/10.1029/JC090iC02p03347>
31. Haltrin V.I. One-parameter two-term Henyey-Greenstein phase function for light scattering in seawater // *Applied Optics*. 2002. Vol. 41. P. 1022–1028. EDN LWXKXZ. <https://doi.org/10.1364/AO.41.001022>
32. Case K.M., Zweifel P.F. Linear Transport Theory. Addison-Wesley, 1967. 342 p.
33. Ishimaru A. Wave Propagation and Scattering in Random Media. IEEE/OUP series on electromagnetic wave theory. New York: Academic Press, 1978. 267 p. EDN YFXUWL. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-374701-3.X5001-7>
34. Marinyuk V.V., Pavlova M.A., Rogozkin D.B., Sheberstov S.V. Characterization of the aerosol contribution to the top-of-atmosphere radiance for satellite ocean color retrievals // *Applied Optics*. 2024. Vol. 63. P. 7212–7224. EDN HTBUJP. <https://doi.org/10.1364/AO.528718>
35. Budak V.P., Klyuykov D.A., Korkin S.V. Convergence acceleration of radiative transfer equation solution at strongly anisotropic scattering. In: Kokhanovsky, A. (eds) *Light Scattering Reviews 5*. Springer Praxis Books. Springer, Berlin, Heidelberg. 2010. P. 147–203. https://doi.org/10.1007/978-3-642-10336-0_5
36. Mobley C.D., Sundman L.K., Boss E. Phase function effects on oceanic light fields // *Applied Optics*. 2002. Vol. 41. P. 1035–1050. <https://doi.org/10.1364/AO.41.001035>

References

1. Mobley C.D. *Light and Water: Radiative Transfer in Natural Waters*. San Diego, Calif: Academic; 1994. 592 p.
2. Werdell P.J., McKinnis L.W., Boss E., et al. An overview of approaches and challenges for retrieving marine inherent optical properties from ocean color remote sensing. *Progress in Oceanography*. 2018;160:186–212. <https://doi.org/10.1016/j.pocean.2018.01.001>

3. Groom S, Sathyendranath S, Ban Y, et al. Satellite ocean colour: current status and future perspective. *Frontiers in Marine Science*. 2019;6:485. <https://doi.org/10.3389/fmars.2019.00485>
4. Morel A, Gentili B. Diffuse reflectance of oceanic waters. II. Bidirectional aspects. *Applied Optics*. 1993;32:6864–6879. <https://doi.org/10.1364/AO.32.006864>
5. Morel A, Gentili B. Diffuse reflectance of oceanic waters. III. Implication of bidirectionality for the remote-sensing problem. *Applied Optics*. 1996;35:4850–4862.
6. Garver SA, Siegel DA. Inherent optical property inversion of ocean color spectra and its biogeochemical interpretation: 1. Time series from the Sargasso Sea. *Journal of Geophysical Research*. 1997;102(C8):18607–18625. <https://doi.org/10.1029/96JC03243>
7. O'Reilly JE, Maritorena S, Mitchell BG, et al. Ocean color chlorophyll algorithms for SeaWiFS. *Journal of Geophysical Research*. 1998;103:24937–24953. <https://doi.org/10.1029/98JC02160>
8. Maritorena S, Siegel DA, Peterson A. Optimization of a semianalytical ocean color model for global-scale applications. *Applied Optics*. 2002;41:2705–2714. <https://doi.org/10.1364/AO.41.002705>
9. Morel A, Antoine D, Gentili B. Bidirectional reflectance of oceanic waters: accounting for Raman emission and varying particle scattering phase function. *Applied Optics*. 2002;41:6289–6306. <https://doi.org/10.1364/AO.41.006289>
10. Lee ZP, Carder KL, Arnone RA. Deriving inherent optical properties from water color: a multi-band quasi-analytical algorithm for optically deep waters. *Applied Optics*. 2002;41:5755–5772. <https://doi.org/10.1364/AO.41.005755>
11. Werdell PJ, Franz BA, Sean W, et al. Generalized ocean color inversion model for retrieving marine inherent optical properties. *Applied Optics*. 2013;52:2019–2037. <https://doi.org/10.1364/AO.52.002019>
12. Lewis KM, Arrigo KR. Ocean color algorithms for estimating chlorophyll a, CDOM absorption, and particle backscattering in the Arctic Ocean. *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2020;125: e2019JC015706. <https://doi.org/10.1029/2019JC015706>
13. Najah A, Al-Shehhi MR. Performance of the ocean color algorithms: QAA, GSM, and GIOP in inland and coastal waters. *Remote Sensing in Earth Systems Sciences*. 2021;4:235–248. <https://doi.org/10.1007/s41976-022-00068-3>
14. Moore TS, Kolluru S, Tonizzo A, Twardowski MS. Bio-optical inversion scheme based on the radiative transfer equation. *Optics Express*. 2024;32:41270–41296. <https://doi.org/10.1364/OE.508090>
15. Gordon HR, Brown OB, Evans RH, et al. A semianalytic radiance model of ocean color. *Journal of Geophysical Research: Atmospheres*. 1988;93:10909–10924. <https://doi.org/10.1029/JD093iD09p10909>
16. Gordon HR. Ocean color remote sensing: influence of the particle phase function and the solar zenith angle. *EOS Transactions, American Geophysical Union*. 1986;67(14):1055.
17. Gordon HR. Simple calculation of the diffuse reflectance of the ocean. *Applied Optics*. 1973;12:2803–2804. <https://doi.org/10.1364/AO.12.002803>
18. Golubitsky BM, Levin IM, Tantashev MV. Luminosity coefficient of a semi-infinite layer of seawater. *Izvestiya: Atmospheric and Oceanic Physics*. 1974;10:1235–1238. (In Russ.)
19. Zege EP. Luminosity coefficient of light reflected by a semi-infinite medium. *Izvestiya: Atmospheric and Oceanic Physics*. 1983;19:927–936. (In Russ.).
20. Zege EP, Ivanov AP, Katsev IL. *Image Transfer Through a Scattering Medium*. Berlin: Springer-Verlag; 1991. 349 p.
21. Zaneveld JR.V. A theoretical derivation of the dependence of the remotely sensed reflectance of the ocean on the inherent optical properties. *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 1995;100:13135–13142. <https://doi.org/10.1029/95JC00453>
22. Jerome JH, Bukata RP, Miller JR. Remote sensing reflectance and its relationship to optical properties of natural waters. *International Journal of Remote Sensing*. 1996;17:3135–3155. <https://doi.org/10.1080/01431169608949135>
23. Albert A, Mobley CD. An analytical model for subsurface irradiance and remote sensing reflectance in deep and shallow case-2 waters. *Optics Express*. 2003;11:2873–2890. <https://doi.org/10.1364/OE.11.002873>
24. Park Y-J, Ruddick K. Model of remote-sensing reflectance including bidirectional effects for case 1 and case 2 waters. *Applied Optics*. 2005;44:1236–1249. <https://doi.org/10.1364/AO.44.001236>
25. Twardowski M, Tonizzo A. Ocean color analytical model explicitly dependent on the volume scattering function. *Applied Sciences*. 2018;8(12):2684. <https://doi.org/10.3390/app8122684>
26. Marinyuk VV, Rogozkin DB, Sheberstov SV. Propagation of a light beam in an absorbing medium with large-scale inhomogeneities. *Optics and Spectroscopy*. 2014;117:102–110. <https://doi.org/10.1134/S0030400X14070157>
27. Marinyuk VV, Rogozkin DB, Sheberstov SV. Optical beam spread in seawater. *Optics Communications*. 2025;574:131098. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2024.131098>
28. Jin Z, Stamnes K. Radiative transfer in nonuniformly refracting layered media: atmosphere–ocean system. *Applied Optics*. 1994;33:431–442. <https://doi.org/10.1364/AO.33.000431>
29. Kattawar GW. A three-parameter analytic phase function for multiple scattering calculations. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 1975;15:839–849. [https://doi.org/10.1016/0022-4073\(75\)90095-3](https://doi.org/10.1016/0022-4073(75)90095-3)

30. Plass GN, Kattawar GW, Humphreys TJ. Influence of the oceanic scattering phase function on the radiance. *Journal of Geophysical Research*. 1985;90(C2):3347–3351. <https://doi.org/10.1029/JC090iC02p03347>
31. Haltrin VI. One-parameter two-term Henyey–Greenstein phase function for light scattering in seawater. *Applied Optics*. 2002;41:1022–1028. <https://doi.org/10.1364/AO.41.001022>
32. Case KM, Zweifel PF. *Linear Transport Theory*. Addison-Wesley; 1967. 342 p.
33. Ishimaru A. *Wave Propagation and Scattering in Random Media*. New York: Academic Press; 1978. 267 p. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-374701-3.X5001-7>
34. Marinyuk VV, Pavlova MA, Rogozkin DB, Sheberstov SV. Characterization of the aerosol contribution to the top-of-atmosphere radiance for satellite ocean color retrievals. *Applied Optics*. 2024;63:7212–7224. <https://doi.org/10.1364/AO.528718>
35. Budak VP, Klyuykov DA, Korkin SV. Convergence acceleration of radiative transfer equation solution at strongly anisotropic scattering. In: Kokhanovsky A, editor. *Light Scattering Reviews 5*. Berlin, Heidelberg: Springer; 2010. p. 147–203. https://doi.org/10.1007/978-3-642-10336-0_5
36. Mobley CD, Sundman LK, Boss E. Phase function effects on oceanic light fields. *Applied Optics*. 2002;41:1035–1050. <https://doi.org/10.1364/AO.41.001035>

Об авторах

МАРИНЮК Виталий Владиславович, кандидат физико-математических наук, доцент МИФИ, старший научный сотрудник ИО РАН, ORCID: 0000-0003-0707-8604, e-mail: vmarinyuk@mail.ru

ПАВЛОВА Мария Александровна, младший научный сотрудник ИО РАН, ORCID: 0009-0007-5117-0877, SPIN-код (РИНЦ): 6623-8493, e-mail: pavlova.ma@phystech.edu

РОГОЗКИН Дмитрий Борисович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник ВНИИА, e-mail: dmrogozkin@gmail.com

ШЕБЕРСТОВ Сергей Валентинович, старший научный сотрудник ИО РАН, ORCID: 0000-0001-8489-2859, WoS ResearcherID: G-1566-2014, Scopus Author ID: 6602841753, SPIN-код (РИНЦ): 6493-8190, e-mail: sheberst@yandex.ru