



DOI [https://doi.org/10.59887/2073-6673.2026.19\(2\)-2](https://doi.org/10.59887/2073-6673.2026.19(2)-2)

EDN <https://elibrary.ru/cbixlg>

УДК 532.529.2: 532.51: 536.25: 551.463: 66.06: 66.08

© Л. Х. Ингель^{1,2*}, 2026

¹Научно-производственное объединение «Тайфун», 249038, Калужская обл., г. Обнинск, ул. Победы, 4

²Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, 119017, Москва, Пыжевский пер., 3

*lev.ingel@gmail.com

Об эффекте обращения направления конвекции при турбулизации двухкомпонентной жидкости

Статья поступила в редакцию 13.12.2025, после доработки 26.04.2026, принята в печать 29.04.2026

Аннотация

Теоретически исследуется нестационарная конвекция в двухкомпонентной среде с существенно различающимися коэффициентами переноса (например, в соленой воде). В качестве конкретного примера рассматриваются течения, возникающие в нейтрально стратифицированной среде у наклонной стенки (над наклонной поверхностью), с которой в среду поступают постоянные (после включения) потоки тепла и примеси. Используется известное точное решение нестационарной задачи о конвекции у вертикальной стенки с граничными условиями второго рода, которое обобщается на случай течения над наклонной стенкой.

Полная система уравнений гидротермодинамики и переноса примеси сводится к линейной системе за счет симметрии задачи, без каких-либо предположений о малости амплитуд возмущений. Линейность системы позволяет использовать принцип суперпозиции — независимо рассматривать и суммировать динамические эффекты двух компонент среды, от которых зависят отклонения ее плотности. Решение выражается через кратные интегралы вероятностей.

Результаты, в частности, направление возникающих течений существенно зависят от соотношения значений коэффициентов обмена для разных субстанций. Возможны, например, нетривиальные ситуации, когда положительные притоки плавучести приводят к возникновению нисходящих течений. Турбулизация течений, приводя к резким изменениям эффективных коэффициентов обмена, может менять направление конвективных течений.

Ключевые слова: конвекция, двухкомпонентная среда, дифференциальная диффузия, аналитическая модель, турбулентность

© L. Kh. Ingel^{1,2}, 2026

¹Research and Production Association “Typhoon”, 4, Pobeda Str., Obninsk, Kaluga Region, 249038, Russia

²A.M. Obukhov Institute of Atmospheric Physics of Russian Academy of Sciences, 3, Pyzhevsky Lane, Moscow, 119017, Russia

*lev.ingel@gmail.com

On the effect of convection reversal during turbulation of a two-component fluid

Received 13.12.2025, Revised 26.04.2026, Accepted 29.04.2026

Abstract

Unsteady convection in a two-component medium with significantly different transfer coefficients (e. g., in salt water) is theoretically studied. As a specific example, flows arising in a neutrally stratified medium over a flat inclined surface, from which constant (after switching on) heat and admixture fluxes enter the medium, are considered. A well-known exact solution to the unsteady convection problem near a vertical wall with boundary conditions of the second kind is used, which is generalized to the case of a sloping lower boundary.

Ссылка для цитирования Ингель Л.Х. Об эффекте обращения направления конвекции при турбулизации двухкомпонентной жидкости // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2026. Т. 19, № 2. С. 19–25. EDN CBIXLG. [https://doi.org/10.59887/2073-6673.2026.19\(2\)-2](https://doi.org/10.59887/2073-6673.2026.19(2)-2)

For citation Ingel L. Kh. On the effect of convection reversal during turbulation of a two-component fluid. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2026:19(2);19–25. [https://doi.org/10.59887/2073-6673.2026.19\(2\)-2](https://doi.org/10.59887/2073-6673.2026.19(2)-2)

The complete system of hydrothermodynamic and admixture transport equations is reduced to a linear system due to the symmetry of the problem, without any assumptions about the smallness of the perturbation amplitudes. The linearity of the system allows for the use of the superposition principle — independently considering and summing the dynamic effects of the two components of the medium, which determine the deviations in its density. The solution is expressed in terms of repeated probability integrals.

The results, in particular, the direction of the resulting flows, depend significantly on the ratio of the exchange coefficients for different substances. For example, nontrivial situations are possible where positive buoyancy influxes nevertheless lead to the emergence of downward currents. Flow turbulence, leading to abrupt changes in effective exchange coefficients, can, in particular, change the direction of convective flows.

Keywords: convection, two-component medium, differential diffusion, analytical model, turbulence

1. Введение

Как хорошо известно, гидротермодинамике двухкомпонентных жидких/газообразных сред (таких как, например, соленая морская вода) присущ целый ряд нетривиальных особенностей (см., например, [1–4] и библиографию в этих изданиях). В настоящей работе обращается внимание на еще один эффект, возникающий при турбулизации течений таких сред.

Ряд нетривиальных свойств двухкомпонентных сред связан с различием значений коэффициентов обмена двух субстанций. Например, коэффициент переноса тепла на два порядка больше, чем соли, вследствие чего возникают специфические классы конвективной неустойчивости двухкомпонентной среды [1–3]. Ниже рассматривается ситуация, когда развитие конвективного течения постепенно приводит к его турбулизации. Идея настоящей работы заключается в том, что турбулизация резко меняет эффективность переноса двух субстанций — соотношение между эффективными коэффициентами переноса двух субстанций существенно меняется. Тем самым, резко меняются условия развития двухкомпонентной конвекции, например, конвекция может менять направление.

2. Постановка задачи

В качестве примера рассмотрим модель развития конвекции в соленой воде над бесконечной плоской наклонной стенкой, на которой задаются стационарные (после включения в начальный момент времени $t = 0$) отклонения потоков тепла и концентрации примеси (соли).

Пусть s — координата вдоль склона, ось n направлена нормально к склону (рис. 1).

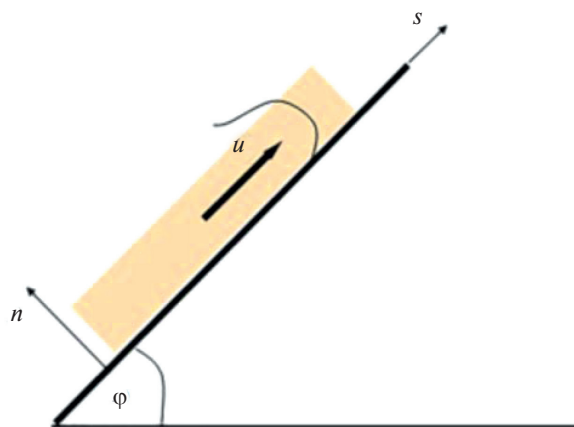


Рис. 1. Схематическое изображение течения у наклонной стенки в области положительного отклонения плавучести (упомянутая область затушевана)

Fig. 1. Schematic representation of the flow near an inclined wall in the region of positive buoyancy deviation (the mentioned region is shaded)

Рассматривается полуограниченный объем среды в области $n > 0$. Отклонение плотности среды ρ в обычно используемом приближении [1–4] линейно зависит от возмущений температуры T и концентрации примеси (солености) s :

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha T + \beta S], \quad (1)$$

где ρ_0 — средняя (отсчетная) плотность среды; α — термический коэффициент расширения среды; коэффициент β определяет зависимость плотности среды от концентрации примеси (в океанологии его называют коэффициентом соленостного сжатия).

Для простоты рассматривается случай отсутствия фоновых стратификаций температуры и концентрации примеси. Иными словами, в начальный момент среда не только находится в состоянии покоя, но и однородна по температуре, солености и плотности. Исследуются конвективные течения, вызываемые в такой среде постоянными (после «включения» в момент $t = 0$) отклонениями потоков тепла и примеси на нижней границе $n = 0$. Поскольку задаваемые на границе возмущения не зависят от координаты вдоль склона s , будем искать не зависящие от s решения.

Такая постановка близка ко многим известным задачам о склоновых течениях для однокомпонентной среды [5], но наличие второй компоненты, как будет видно, может приводить к качественно новым результатам. Система уравнений гидродинамики, переноса тепла и примеси в приближении Буссинеска при отсутствии фоновой стратификации и без учета перекрестных кинетических эффектов (термодиффузии и диффузионной теплопроводности [6]) для данной геометрии задачи имеет вид [1–4]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + g(\alpha T - \beta S) \sin \varphi = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + gb \sin \varphi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial n^2}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 S}{\partial n^2}. \quad (3)$$

Здесь u — скорость течения вдоль склона (другие компоненты скорости в данной задаче отсутствуют), t — время; ν , κ , χ — коэффициенты переноса, φ — угол наклона нижней границы к горизонту, g — ускорение силы тяжести;

$$b = \alpha T - \beta S \quad (4)$$

— безразмерная плавучесть. Подчеркнем, что полная система уравнений гидротермодинамики и переноса примеси свелась к линейной системе (2)–(3) только за счет симметрии задачи, без каких-либо предположений о малости амплитуд возмущений.

В качестве краевых условий предполагается, прежде всего, затухание возмущений вдали от нижней границы:

$$u, T, S \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

На границе $n = 0$ выполняется условие прилипания $u = 0$. Для температуры и концентрации примеси рассматриваются краевые условия второго рода:

$$c\rho_0\kappa\frac{\partial T}{\partial n} = Q\eta(t), \quad \rho_0\chi\frac{\partial S}{\partial n} = \Theta\eta(t) \text{ при } n = 0, \quad (6)$$

где c — теплоемкость среды, $\eta(t)$ — единичная функция Хевисайда; Q , Θ — соответствующие амплитуды.

3. Решение

Решения уравнений (3) имеют вид ([7] с. 440, 441):

$$T = -\frac{2Q}{c\rho_0\kappa} \sqrt{\frac{t}{\kappa}} i \operatorname{erfc} \left(\frac{n}{\sqrt{4\kappa t}} \right), \quad S = -\frac{2\Theta}{\rho_0\chi} \sqrt{\frac{t}{\chi}} i \operatorname{erfc} \left(\frac{n}{\sqrt{4\chi t}} \right). \quad (7)$$

Здесь кратный интеграл вероятностей [8] определяется равенством:

$$i^k \operatorname{erfc} X = \int_X^\infty i^{k-1} \operatorname{erfc} X' dX', \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (8)$$

$$i \operatorname{erfc} X \equiv i^1 \operatorname{erfc} X = \int_X^\infty i^0 \operatorname{erfc} X' dX'; \quad (9)$$

$$i^0 \operatorname{erfc} X = \operatorname{erfc} X, \quad i^{-1} \operatorname{erfc} X = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-X^2). \quad (10)$$

Области с отклонениями плавучести расширяются $\sim \sqrt{t}$; по такому же закону возрастает и амплитуда этих отклонений.

В книге [7] (с. 440, 441) приведено решение для скорости возникающего течения у вертикальной границы. Его нетрудно обобщить на случай наклонной границы. Приведем сначала решение для относительно простого случая одинаковых значений всех коэффициентов обмена ($\nu = \kappa = \chi = K$):

$$u(n, t) = -\frac{2g \sin \varphi}{\rho_0 K} \left(\frac{\alpha Q}{c} - \beta \Theta \right) n t \cdot i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{n}{\sqrt{4Kt}} \right). \quad (11)$$

Для расчетов удобно воспользоваться рекуррентным соотношением [8]:

$$i^k \operatorname{erfc} X = -\frac{X}{n} i^{k-1} \operatorname{erfc} X + \frac{1}{2n} i^{k-2} \operatorname{erfc} X. \quad (12)$$

На рис. 2 приведены графики ряда функций, которые фигурируют в настоящей работе. Толстая сплошная линия описывает в безразмерном виде зависимость решения (11) от переменной $X = n / \sqrt{4Kt}$.

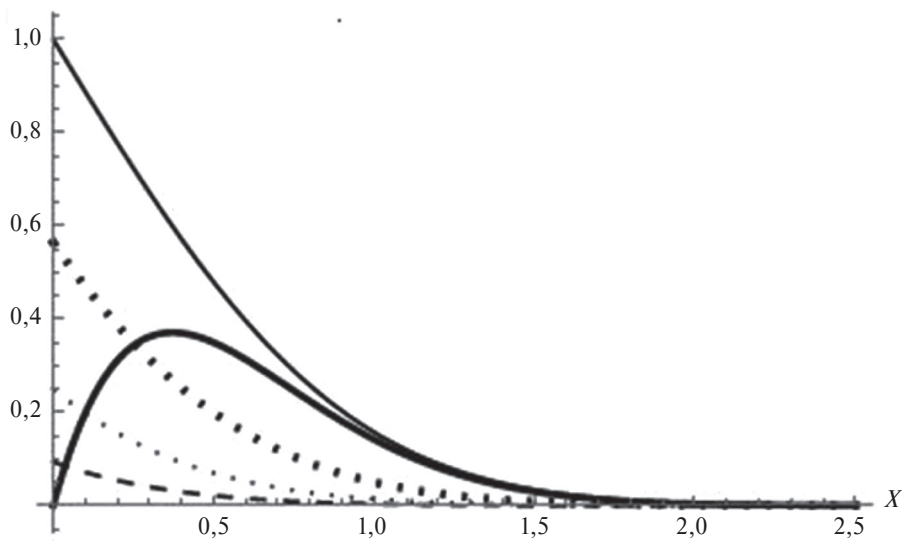


Рис. 2. Графики функций $\operatorname{erfc} X$ (тонкая сплошная линия), $i \operatorname{erfc} X$ (крупный пунктир), $i^2 \operatorname{erfc} X$ (мелкий пунктир), $i^3 \operatorname{erfc} X$ (штриховая линия), $10X i^2 \operatorname{erfc} X$ (толстая сплошная линия)

Fig. 2. Graphs of functions $\operatorname{erfc} X$ (thin solid line), $i \operatorname{erfc} X$ (large dotted line), $i^2 \operatorname{erfc} X$ (small dotted line), $i^3 \operatorname{erfc} X$ (dashed line), $10X i^2 \operatorname{erfc} X$ (thick solid line)

Существенно, что вклады в плавучесть от источников тепла и примеси, согласно (11), влияют на динамику с одинаковым весом. Иначе обстоит дело, когда значения коэффициентов обмена сильно различаются. Решение для скорости в этом, более общем, случае можно выразить, используя решение [7] (с. 440, 441) для однокомпонентной среды и принцип суперпозиции (поскольку уравнение линейное, можно суммировать рассчитанные по отдельности эффекты двух субстанций). В наших обозначениях это решение можно представить в виде:

$$u = \frac{8g\beta\Theta \sin \varphi (\chi t^3)^{1/2}}{\rho_0 (\nu - \chi)} \left\{ \left[i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{n}{2(\nu t)^{1/2}} \right) - i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{n}{2(\chi t)^{1/2}} \right) \right] - \Lambda \left[i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{n}{2(\nu t)^{1/2}} \right) - i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{n}{2(\kappa t)^{1/2}} \right) \right] \right\}, \quad (13)$$

где безразмерный параметр

$$\Lambda = \frac{\alpha Q (\nu - \chi)}{c\beta\Theta (\nu - \kappa)} \left(\frac{\kappa}{\chi} \right)^{1/2}. \quad (14)$$

4. Анализ решения

В качестве примера, остановимся на случае, когда соленая вода охлаждается и одновременно распресняется от нижней границы, чему соответствуют положительные значения параметров Q и Θ . Фактор охлаждения добавляет в среду отрицательную плавучесть, распреснение — положительную. Предположим, что второй фактор существенно преобладает по абсолютной величине: положительной плавучести вносится значительно больше, чем отрицательной, чему соответствует неравенство $\beta\Theta \gg \alpha Q / c$. На первый взгляд, в итоге в среде должно возникать восходящее течение вдоль склона. Но, как показано в работе [4], многое зависит и от соотношения коэффициентов переноса для разных субстанций. Поскольку коэффициент обмена для соли относительно мал ($\chi \ll \kappa$), распресненная область медленно проникает в среду по сравнению с расширением охлажденного слоя. Будучи более тонким, распресненный слой сильно подвержен вязкости. Поэтому связанные с ним восходящие движения сильно тормозятся вязкостью, в отличие от нисходящих движений в относительно толстом охлажденном слое. Это обстоятельство действует в сторону, противоположную соотношению притоков плавучести.

Две квадратные скобки в (13) отвечают вкладом соответственно примеси и тепла в возникающее склоновое течение. Но, в отличие от (11), «вес» этих вкладов в данном случае может сильно различаться — он определяется значением безразмерного параметра Λ , которое может сильно отличаться от единицы.

Примем следующие значения коэффициентов обмена, характерные для соленой морской воды [3]: $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, $\kappa = 1,4 \times 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $\chi = 1,5 \times 10^{-9} \text{ м}^2/\text{с}$. Тогда $\Lambda \approx 11\alpha Q / c\beta\Theta = 11\lambda$, где $\lambda \equiv \alpha Q / c\beta\Theta$ — отношение абсолютных значений двух компонент притоков плавучести. Таким образом, приток плавучести, связанный с теплообменом, благодаря большей скорости теплообмена, при прочих равных условиях, значительно эффективнее влияет на возникающее течение.

На рис. 3 представлены примеры безразмерных профилей скорости для двух относительно малых значений параметра λ , т. е., для ситуаций, когда интенсивное распреснение приводит к положительному в целом притоку плавучести в среду. Но, вследствие медленности диффузии соли, восходящие движения возникают только вблизи нижней границы (при достаточно малых значениях координаты n). Вдали от этой границы преобладает влияние слабого, но более быстро распространяющегося охлаждения, так что в целом преобладает нисходящее течение. При увеличении значения λ (т. е., при увеличении доли вклада охлаждения в отклонение плавучести) нисходящее движение усиливается, несмотря на сохраняющееся при $\beta\Theta \gg \alpha Q / c$ существенное преобладание положительного притока плавучести.

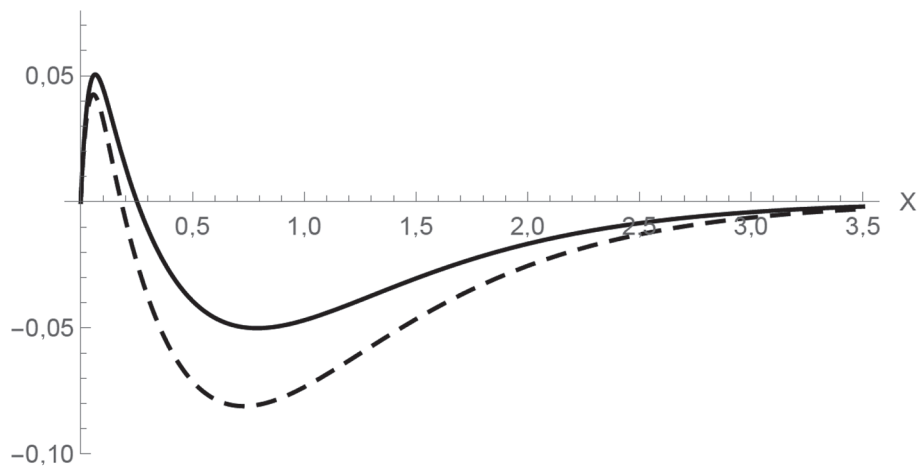


Рис. 3. Примеры профилей скорости склонового течения, нормированных на коэффициент при фигурных скобках в (13) при $\lambda = 1/4$ (сплошная кривая) и $\lambda = 1/3$ (штриховая линия). По оси абсцисс отложена переменная $X \equiv n / 2(\kappa t)^{1/2}$

Fig. 3. Examples of slope flow velocity profiles normalized by the coefficient at the curly brackets in (13) for $\lambda = 1/4$ (solid curve) and $\lambda = 1/3$ (dashed line). The variable $X \equiv n / 2(\kappa t)^{1/2}$ is plotted on the abscissa axis

С течением времени увеличиваются как толщина слоя, охваченного течением (пропорционально $t^{1/2}$), так и амплитуда возмущений. Следовательно, число Рейнольдса возрастает, и неизбежно возникновение

турбулентности. Турбулентный обмен гораздо эффективнее молекулярного, причем, если пользоваться эффективными коэффициентами турбулентного обмена, то их значения обычно можно считать приблизительно равными для всех субстанций. Тем самым, при переходе к турбулентному режиму радикально меняется значение безразмерного параметра Λ . Коэффициент при λ , который при молекулярном обмене был приближенно равен 11, при турбулентном обмене становится порядка единицы. Все субстанции при этом диффундируют примерно с одинаковой скоростью, и исчезает упоминавшийся фактор, обеспечивавший большое влияние слабого, но быстро распространяющегося охлаждения. Решение при одинаковых значениях коэффициентов обмена было рассмотрено выше и описывается выражением (11). В это решение, в отличие от (13), притоки плавучести от двух субстанций, пропорциональные соответственно $\alpha Q/c$ и $\beta \Theta$, входят с одинаковым весом. Поэтому если $\beta \Theta$ преобладает (малое значение λ), то решение (11) положительно: всюду преобладают восходящие течения, связанные с интенсивным положительным притоком плавучести за счет распреснения. Этому соответствует толстая сплошная линия на рис. 2. Иными словами, при турбулизации течения, направление конвекции может меняться на противоположное. В особом случае близких значений $\alpha Q/c$ и $\beta \Theta$ (равенстве положительного и отрицательного притоков плавучести) выражение (11) может обращаться в ноль: притоки плавучести компенсируют друг друга; после турбулизации упорядоченное течение останавливается (или, по меньшей мере, резко ослабевает), и турбулентность затухает.

5. Заключение

В литературе уже отмечалось нетривиальное свойство естественной конвекции в двухкомпонентных средах: поступление в среду положительной плавучести может приводить к возникновению нисходящих движений, и наоборот — восходящие движения могут возникать несмотря на приток отрицательной плавучести. Это существенно зависит от соотношения коэффициентов обмена разных субстанций. Такими свойствами обладает и рассмотренное выше склоновое течение. Из представленного выше анализа следует еще одно свойство: направление конвективного течения может радикально меняться при турбулизации этого течения, поскольку меняется соотношение эффективных коэффициентов обмена.

Найденные и проанализированные выше решения формально справедливы и при сколь угодно малых углах наклона нижней границы к горизонту. Но при рассмотрении малых углов к горизонту возникают дополнительные вопросы об устойчивости найденных решений. Например, если в рассматриваемую среду снизу поступает положительная плавучесть, то выглядит реальной возможность возникновения неустойчивостей типа Рэлея-Бенара. Правда, если поступление положительной плавучести обусловлено медленно диффундирующей компонентой (распреснение снизу), то толщина слоя пониженной плотности у границы возрастает медленно, и в течение какого-то времени число Рэлея не достигает критического значения. В целом, анализ устойчивости возникающих сдвиговых течений с возникающей вертикальной стратификацией двухкомпонентной среды является весьма серьезной задачей, которая выходит за рамки настоящей работы. Напомним, что вопрос об устойчивости даже значительно более простых течений (например, течения Пуазейля) нередко решается десятилетиями. Но основной эффект, на который обращается внимание в настоящей работе, в этой связи не вызывает сомнений — он определенно существует, по меньшей мере, для вертикальных течений.

Благодарности

Автор признателен рецензенту за полезные замечания, способствовавшие уточнению содержания.

Acknowledgements

The author is grateful to the reviewer for the helpful comments that contributed to clarifying the content.

Финансирование

Работа выполнена без финансовой поддержки.

Funding

The work was completed without financial support.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interests

The author declares no conflict of interests.

Литература

1. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
2. Radko T. *Double-Diffusive Convection*. Cambridge University Press, 2013. 344 p. EDN URUTZN. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139034173>
3. Ингель Л.Х., Калашник М.В. Нетривиальные особенности гидротермодинамики морской воды и других стратифицированных растворов // Успехи физических наук. 2012. Т. 182, № 4. С. 379–406. EDN TLOZFX. <https://doi.org/10.3367/UFNe.0182.201204b.0379>
4. Ингель Л.Х. Об одном эффекте дифференциальной диффузии в двухкомпонентных средах. Инженерно-физический журнал. 2017. Т. 90, № 2. С. 465–470. EDN YFWGTN.
5. Farina S., Zardi D. Understanding thermally driven slope winds: recent advances and open questions // *Boundary-Layer Meteorology*. 2023. Vol. 189. P. 5–52. EDN MZYBGC. <https://doi.org/10.1007/s10546-023-00821-1>
6. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с. EDN TGSKNN.
7. Гибхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. М.: Мир, 1991. Кн.1. 464 с.
8. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.

References

1. Turner JS. *Buoyancy Effects in Fluids*. Cambridge: Cambridge University Press; 1973. 367 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511608827>
2. Radko T. *Double-Diffusive Convection*. Cambridge: Cambridge University Press; 2013. 344 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139034173>
3. Ingel LKh, Kalashnik MV. Nontrivial features in the hydrodynamics of seawater and other stratified solutions. *Physics–Uspekhi*. 2012;55(4):356–381. <https://doi.org/10.3367/UFNe.0182.201204b.0379>
4. Ingel' LKh. Effect of differential diffusion in two-component media. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2017;90(2):437–441. <https://doi.org/10.1007/s10891-017-1583-0>
5. Farina S, Zardi D. Understanding thermally driven slope winds: recent advances and open questions. *Boundary-Layer Meteorology*. 2023;189:5–52. 1/<https://doi.org/10.1007/s10546-023-00821-1>
6. Gershuni GZ, Zhukhovitskii EM. *Convective Stability of Incompressible Liquid*. Moscow: Nauka; 1972. 372 p. (In Russ)
7. Gebhart B, Jaluria Y, Mahajan RL, Sammakia B. *Buoyancy-Induced Flows and Transport*. Berlin: Springer; 1988. 1001 p.
8. Abramowitz M, Stegun IA, editors. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Washington: US Government Printing Office; 1964. 832 p.

Об авторе

ИНГЕЛЬ Лев Ханаанович, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник ФГБУ «НПО Тайфун», ORCID: 0000-0002-6669-8021, Scopus AuthorID: 56097483100, WoS ResearcherID: QDN-1151-2026, SPIN-код (РИНЦ): 1023-1769, e-mail: lev.ingel@gmail.com