



DOI [https://doi.org/10.59887/2073-6673.2025.18\(4\)-3](https://doi.org/10.59887/2073-6673.2025.18(4)-3)

EDN <https://elibrary.ru/duluya>

УДК 551.466.2, 551.466.3

© A. B. Слюняев<sup>1,2\*</sup>, 2025

<sup>1</sup>Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грекова РАН, 603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 603155, Нижний Новгород,  
ул. Большая Печерская, д. 25/12

\*slunyaev@ipfran.ru

## Использование псевдоспектрального метода высокого порядка HOSM для моделирования нелинейных волн на поверхности воды конечной глубины

Статья поступила в редакцию 19.09.2025, после доработки 10.11.2025, принята в печать 19.11.2025

### Аннотация

Исследованы режимы и ограничения метода численного решения уравнений гидродинамики, использующего аппроксимацию приповерхностного потенциала скорости разложением Тейлора высокого порядка (High Order Spectral Method, HOSM). Этот подход рассматривается в контексте моделирования больших ансамблей полей смещения морской поверхности в условиях конечной глубины. Основное внимание уделено описанию сильно нелинейных волн и волн с широким частотным спектром. Исследование выполнено в планарной геометрии.

**Ключевые слова:** потенциальные гравитационные волны на поверхности воды, поверхностные морские волны, нелинейные волны, численное моделирование

© A. V. Slunyaev<sup>1,2\*</sup>, 2025

<sup>1</sup>A.V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics RAS, 46 Ulyanova Str., Nizhny Novgorod 603950, Russia

<sup>2</sup>HSE University, 25/12 Str. Bolshaya Pecherskaya, Nizhny Novgorod, 603155 Russia

\*slunyaev@ipfran.ru

## The use of pseudo-spectral high order method HOSM for simulations of nonlinear waves on the surface of finite depth water

Received 19.09.2025, Revised 10.11.2025, Accepted 19.11.2025

### Abstract

Regimes and limitations of the numerical solution method for hydrodynamic equations using the approximation of the near-surface velocity potential by the high-order Taylor expansion (High Order Spectral Method, HOSM) are investigated. This approach is considered in the context of simulation of large ensembles of sea surface displacement fields under finite-depth conditions. The main attention is paid to the description of strongly nonlinear waves and waves with a wide frequency spectrum. The study is performed in planar geometry.

**Keywords:** potential gravity waves on the water surface, sea surface waves, nonlinear waves, numerical simulation

### 1. Введение

Задачи описания и прогноза динамики ветровых морских волн нацелены, в конечном итоге, на обеспечение безопасности судоходства и использования прибрежных акваторий, а также являются составной частью проблемы моделирования климата. В частности, нормативы строительства судов и морских плавучих и стационарных сооружений основаны на представлениях о вероятностных распределениях волновых

---

**Ссылка для цитирования:** Слюняев А.В. Использование псевдоспектрального метода высокого порядка HOSM для моделирования нелинейных волн на поверхности воды конечной глубины // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2025. Т. 18, № 4. С. 28–49. EDN DULUYA. [https://doi.org/10.59887/2073-6673.2025.18\(4\)-3](https://doi.org/10.59887/2073-6673.2025.18(4)-3)

**For citation:** Slunyaev A.V. The use of pseudo-spectral high order method HOSM for simulations of nonlinear waves on the surface of finite depth water. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2025;18(4):28–49.

[https://doi.org/10.59887/2073-6673.2025.18\(4\)-3](https://doi.org/10.59887/2073-6673.2025.18(4)-3)

нагрузок. Из-за относительно небольшого числа надежных данных прямых измерений для построения вероятностной картины ветровых волн, особенно экстремальных, полученные экспериментальные зависимости часто экстраполируются в область редких событий, либо используются теоретические модели.

Возникшая возможность моделировать нерегулярные морские волны и накапливать статистические данные посредством численного моделирования динамических уравнений гидродинамики взамен усредненных по фазам кинетических уравнений подчеркивалась в работах [1, 2]. Она стала не только результатом совершенствования компьютерной техники, но и следствием возникновения новых способов решения «почти полных» уравнений потенциальной гидродинамики. В частности, псевдоспектральный метод High Order Spectral Method (HOSM), формально способный учитывать нелинейные волновые взаимодействия сколь угодно высокого (но конечного) порядка, был сформулирован сразу в двух появившихся в один год публикациях [3, 4]. Последующее сравнение этих двух версий подхода показало преимущество второй: она соответствует разложению исходного гамильтониана системы, согласованному по асимптотическому порядку в предположении слабой нелинейности, тем самым сохраняя гамильтоновую структуру уравнений [1]. В настоящей работе использован именно второй подход, предложенный в [4]. В [1, 5] было показано, что метод HOSM совпадает по формулировке с динамическими спектральными уравнениями Захарова [6] (когда оба подхода записаны с учетом не выше 4-волновых взаимодействий), но существенно превосходит их по вычислительной эффективности из-за расчета нелинейной части в физическом пространстве. Для моделирования поверхности океана принципиально описание трехмерной задачи (двумерная поверхность), потому схемы решения планарных уравнений гидродинамики в конформных переменных для таких нужд не годятся.

Известна проблема неустойчивости коротковолновых гармоник при расчете методом HOSM. Для аккуратного описания необходима сходимость рядов Тейлора, используемых для аппроксимации потенциала скорости вблизи взволнованной поверхности. Хотя формально при записи схемы решения уравнений предположений об узости спектра волн не используется, сходимость ряда Тейлора зависит от длины волны, потому в случае существования волн разных масштабов точность описания коротких волн будет заведомо ниже, особенно если они распространяются на фоне длинной волны [7, 8].

Более радикальными способами быстрого решения уравнений потенциальной гидродинамики, применимыми для описания двумерной поверхности, можно назвать схемы, предложенные в [9] и [7, 10], которые на каждом шаге по времени решают уравнение Лапласа с использованием дополнительной дискретной сетки по вертикальной координате. В фактически полном по нелинейности подходе [9] горизонтальные слои расположены в приповерхностной области под границей между водой и воздухом, и источником неточности численного решения является степень дискретизации по вертикали. В схеме пересчет потенциала скорости с поверхности на постоянный уровень и с одной на другую границу слоев происходит с машинной точностью. Утверждается, что для хорошей точности описания сильно нелинейных волн достаточно порядка 1–2 десятков слоев.

В полнонелинейной схеме [10] используется сопровождающая поверхность криволинейная система координат, в которой уравнение Лапласа записано в виде суммы линейной части (для которой используется аналитическое решение) и поправки к ней. Поправка к решению находится итерационным образом как решение уравнения Пуассона в области у поверхности жидкости. Кроме дискретизации по вертикальной координате, источником ошибок здесь является конечное число итераций (в [10] говорится о типичном числе итераций, равном 5–15).

Несмотря на существующую критику HOSM, этот подход в настоящее время очень популярен. Он реализован несколькими исследовательскими группами за рубежом для решения модельных задач, включая расчет больших ансамблей нерегулярных волн. Отметим открытый для использования код HOSM, разработанный и постоянно улучшаемый группой из г. Нант (Франция) [11]. В литературе можно найти множественные сравнения результатов численного моделирования методом HOSM с лабораторными измерениями, которые демонстрируют очень хорошее соответствие. Эффекты обрушения волн не могут описываться в рамках модели HOSM напрямую, но могут учитываться посредством параметризации (см., например, в [12–15]). Затухание волн и воздействие ветра могут описываться с помощью введения в уравнения неконсервативных членов (например, в [16]).

В большинстве публикаций модель HOSM использовалась для расчета в условиях большой глубины, в то время как ее обобщение на случай постоянной конечной глубины формально не вызывает трудностей и заключается лишь в модификации вертикальной структуры мод для потенциала скорости [3, 4]. В условиях малой глубины для расчетов на больших пространственных областях, включая переменную топографию,

наиболее популярны уравнения нелинейной мелкой воды и различные обобщения уравнений Буссинесковского типа, которые явно учитывают особенности гидродинамической задачи на мелководье и позволяют, в том числе решать полную по нелинейности задачу. Модель HOSM является более общей и вряд ли способна конкурировать с вышеперечисленными моделями мелкой воды. Вместе с тем, ее преимуществом является универсальность (для разных глубин), а также контролируемость учитываемой степени нелинейности уравнений через нелинейный параметр  $M$  (см. описание ниже в разделе 2). Последнее свойство позволяет использовать модель HOSM в качестве теоретического «полигона», позволяющего различить вклады эффектов нелинейных волновых взаимодействий разного порядка (как это было сделано, например, в [17, 18]).

Мотивацией настоящей работы является использование кода HOSM для моделирования нелинейной эволюции ансамблей нерегулярных волн в условиях т. н. промежуточной глубины  $kh = O(1)$ , где безразмерный параметр глубины состоит из произведения характерного волнового числа  $k$  и глубины  $h$ , с заданным начальным спектром. Результаты такого моделирования используются для определения вероятностных свойств волн (статистических моментов, функций распределения вероятности высот и т. д.) и для определения условий, благоприятных для появления т. н. «волн-убийц», связанных с «тяжелыми хвостами» вероятностных распределений высот волн [19]. Интерес к наиболее экстремальным волнам вступает в противоречие с невозможностью точного моделирования очень крутых и опрокидывающихся волн. Физический процесс обрушения волн лежит вне рамок потенциальной теории. Кроме того, основанный на разложениях по малому порядку нелинейности код HOSM не способен описывать очень крутые волны (численный счет «разваливается»). Поэтому условия расчетов выбираются такими, чтобы обрушений не было вовсе или чтобы они были редкими и слабыми (в смысле нарушений физических законов сохранения). Дополнительно, стандартным подходом является введение гипервязкости или подавляющего фильтра в области мелких пространственных масштабов, стабилизирующих вычисления (см. обзор и обсуждение в [14]). В соответствии с вышесказанным, при расчетах ансамблей волн нами используется стратегия выбора наиболее интенсивного волнения, но пока процессы обрушений (в т. ч. микрообрушений) и стабилизирующие эффекты проявляются в динамике волн пренебрежимо слабо. (Под микрообрушением здесь и далее подразумевается возникновение очень больших уклонов волн небольших масштабов.)

Структура настоящей работы следующая. В разделе 2 кратко приводится описание псевдоспектрального метода высокого порядка HOSM и некоторых особенностей его численной реализации, включая способ купирования обрушений и стабилизации кода. Вопрос о достаточной степени дискретизации волн в физическом и Фурье пространствах рассматривается в разделе 3 на примере точных решений нелинейных уравнений гидродинамики для стационарных волн заданной амплитуды. Общепризнанным «узким местом» подхода HOSM является вычисление вертикальной компоненты скорости на поверхности по заданному поверхностному потенциалу. Точность этой процедуры рассматривается в разделе 4 на модельных примерах монохроматических, бихроматических гармонических волн, а также сильно нелинейных волн Стокса. Условия расчета распространения сильно нелинейных однородных волн обсуждаются в разделе 5. Основные выводы работы сформулированы в завершающем разделе 6.

## 2. Псевдоспектральный метод высокого порядка расчета уравнений гидродинамики для потенциальных потоков

Уравнения гидродинамики для потенциального движения идеальной однородной жидкости в слое воды поверх горизонтального дна под действием силы тяжести формулируются в виде, предложенном в [6]. В настоящей работе рассмотрена плоская постановка задачи с горизонтальной осью  $Ox$  в направлении движения волны и вертикальной осью  $Oz$ , направленной вверх. Система уравнений состоит из двух граничных условий (1) и (2) на свободной поверхности  $z = \eta(x, t)$ , уравнения Лапласа (3) в толще воды  $-h \leq z \leq \eta(x, t)$  и условия непротекания на дне  $z = -h$  (4):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left( 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right) W, \quad z = \eta, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -g\eta - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} W^2 \left[ 1 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] - P_a, \quad z = \eta, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad -h \leq z \leq \eta, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (4)$$

Здесь  $\phi(x, z, t)$  — потенциал скорости движения жидкости. Его значения на поверхности описываются поверхностным потенциалом  $\Phi(x, t) = \phi(x, z = \eta, t)$ , а вертикальная компонента скорости на поверхности представлена членом  $W(x, t) = \partial \phi / \partial z|_{z=\eta}$ ;  $g$  — ускорение свободного падения. Нормированное на плотность жидкости давление атмосферы на поверхности выбирается равным нулю,  $P_a(x, t) = 0$ .

В методе HOSM для вычисления  $W(x, t)$  на каждом шаге по времени  $t$  используется разложение потенциала скорости в ряд Тейлора относительно невозмущенной поверхности воды  $z = 0$  (см. детали далее в разд. 4), что позволяет свести переменную область, занятую жидкостью,  $-h \leq z \leq \eta$ , к неизменной,  $-h \leq z \leq 0$ , и воспользоваться аналитическим решением для уравнения Лапласа (3) с граничным условием на дне (4) в слое с горизонтальной верхней границей  $z = 0$ , на которой задан потенциал  $\phi(x, z = 0, t)$ . Для применения преобразования Фурье по горизонтальной координате накладываются периодические граничные условия по  $Ox$ .

HOSM не является точным по нелинейности подходом; он позволяет учитывать до  $M+1$  нелинейных волновых взаимодействий, где  $M$  — параметр нелинейности схемы, соответствующий порядку разложения Тейлора (см. разд. 4). Для расчета волн на глубокой воде чаще всего ограничиваются порядком  $M = 3$ , что позволяет учитывать доминирующие четырехволновые нелинейные процессы, включая модуляционную неустойчивость. Выбор параметров вычислений (степень пространственной дискретизации, размер шага по времени и т. п.), позволяющих моделировать эволюцию нерегулярных максимально интенсивных волн с заданным спектром JONSWAP в течение  $O(10^2)$  периодов, был ранее произведен в нашей работе [14], но ограничивался случаем бесконечно большой глубины.

В некоторых численных экспериментах для купирования обрушений волн, в т. ч. микрообрушений, на каждом временном шаге вычисления величин  $\eta$  и  $\Phi$  использовался предложенный в [12] спектральный фильтр, который для приращений Фурье-компонент может быть записан в виде

$$\hat{\eta}_k \rightarrow e^{-\beta_k} \hat{\eta}_k, \quad \hat{\Phi}_k \rightarrow e^{-\beta_k} \hat{\Phi}_k, \quad \beta_k = \left[ \frac{k}{mk_0} \right]^q, \quad (5)$$

где  $k$  — волновое число,  $k_0$  — доминирующее волновое число. Наиболее часто использовались параметры  $m = 16$  и  $q = 30$ , обеспечивающие подавление коротковолновых компонент Фурье выше примерно 16-й гармоники. Также использовалась процедура деалиазинга (de-aliasing) с увеличением размера расчетной области в пространстве Фурье вдвое, что обеспечивает отсутствие перекрытия спектров при вычислении нелинейных частей уравнений до порядка  $M = 3$  включительно. Для некоторых тестов использовалось 4- и 8-кратное увеличение пространства Фурье, обеспечивающие отсутствие перекрытия спектров до, соответственно,  $M = 7$  и  $M = 15$  включительно.

### 3. Решение уравнений гидродинамики в виде однородной нелинейной волны Стокса

В литературе описано значительное количество процедур построения решений уравнений гидродинамики в виде однородных волн (см., например, обзор в [20], а также другие примеры в [9, 21–28]). Такие решения, соответствующие моменту  $t = 0$ , будут использоваться в качестве начальных условий для задачи моделирования эволюции волн, рассматриваемой далее в разд. 5.

В настоящей работе смещение поверхности  $\eta(x, 0)$  и поверхностный потенциал  $\Phi(x, 0)$  для однородной волны в жидкости заданной глубины строятся численно как решения стационарных уравнений гидродинамики идеальной жидкости по работе [20]. Система уравнений для смещения поверхности и мод Фурье для функции тока, заданных в узлах дискретной пространственной сетки, а также среднего горизонтального течения, глубины, потока жидкости и константы Бернулли решается итерационно методом Ньютона, начиная с затравочного (линейного) решения для малой амплитуды волны. В полученных решениях допускимая невязка каждого из условий в безразмерных переменных составляла не более  $1 \cdot 10^{-14}$ . Использованный в настоящем исследовании численный код построения стационарной волны был написан на основе общедоступного кода [29].

В работе рассматриваются глубины от умеренно большой  $k_0 h = 2$  до малой  $k_0 h = 0,1$ , где  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  — доминирующее волновое число,  $\lambda_0$  — длина волны,  $h$  — глубина. В пределе очень большой глубины  $k_0 h \gg 1$  обсуждаемые в работе характеристики должны быть близки к случаю  $k_0 h = 2$ . Высоты волн  $H$  (т. е., расстояние по вертикали от самой нижней до самой высокой точки смещения поверхности) выбирались в долях от предельного значения обрушения  $H_{br}$ : от  $H/H_{br} = 0,5$  и более. Для оценки порога обрушения волн

на разной глубине использована зависимость, предложенная в работе [30]. Для предела бесконечно большой глубины она дает критерий обрушения  $k_0 H/2 \approx 0.44$ , а для предела мелкой воды  $H/h = 5/6$ . Линейная циклическая частота  $\omega_0$  связана с волновым числом  $k_0$  дисперсионным соотношением:

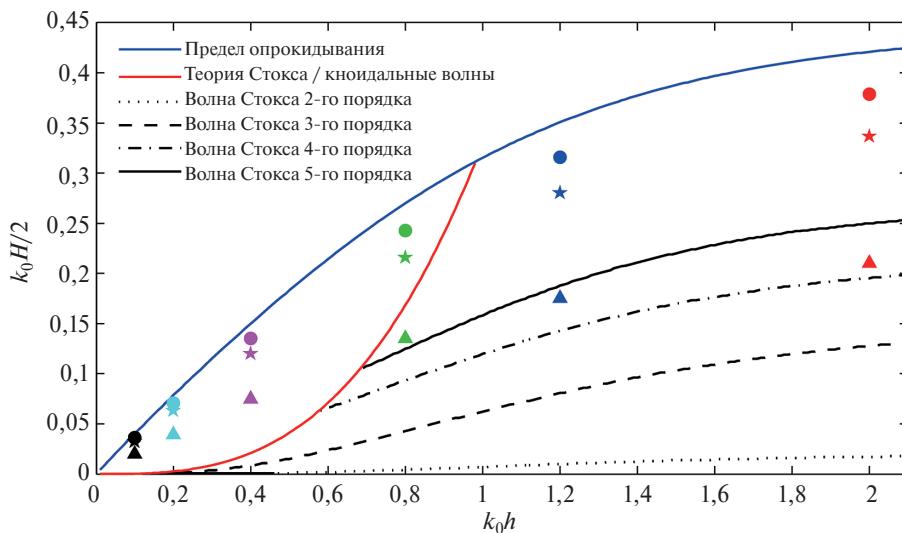
$$\omega_0^2 = gk_0 \tanh(k_0 h). \quad (6)$$

Параметры рассматриваемых в настоящей работе волн отложены в осях нормированной глубины и нормированной высоты на рис. 1 — в стиле классической картины волновых теорий [31, 32]. Кроме синей кривой, соответствующей значениям высоты обрушения  $H_{br}$ , плоскость параметров разделяет красная линия, демонстрирующая условные области применения разложений по гармоническим функциям Стокса (справа) и представления в виде кноидальных волн (слева). Эта линия соответствует критерию  $Ur = 26$ , где параметр Урселя  $Ur$  определен по формуле  $Ur = H/\lambda_0/(h/\lambda_0)^3$  (детали можно найти в [32]). Черными линиями обозначены условные области применения разных порядков нелинейной теории Стокса: ниже пунктирной линии поправка к высоте гребня волны от членов второго порядка составляет менее 1 %. Аналогичный критерий 1 % погрешности использован и для построения других черных линий, соответствующих разным порядкам решения. Выше сплошной черной линии более 1 % дают поправки 5-го порядка. Из рис. 1 следует, что разные примеры рассматриваемых волн относятся как к Стоксовым, так и к кноидальным сильно нелинейным волнам.

На рис. 2 приведены графики, характеризующие, соответственно, точность описания всего профиля волн  $\Delta\eta$  (левая колонка) и высоты гребня волны  $\Delta Cr$  (правая колонка) по формулам:

$$\Delta\eta(n) = \sqrt{\frac{\sum(\eta_{cut} - \eta)^2}{\sum \eta^2}}, \quad \Delta Cr(n) = \frac{\max \eta_{cut} - \max \eta}{\max \eta}, \quad (7)$$

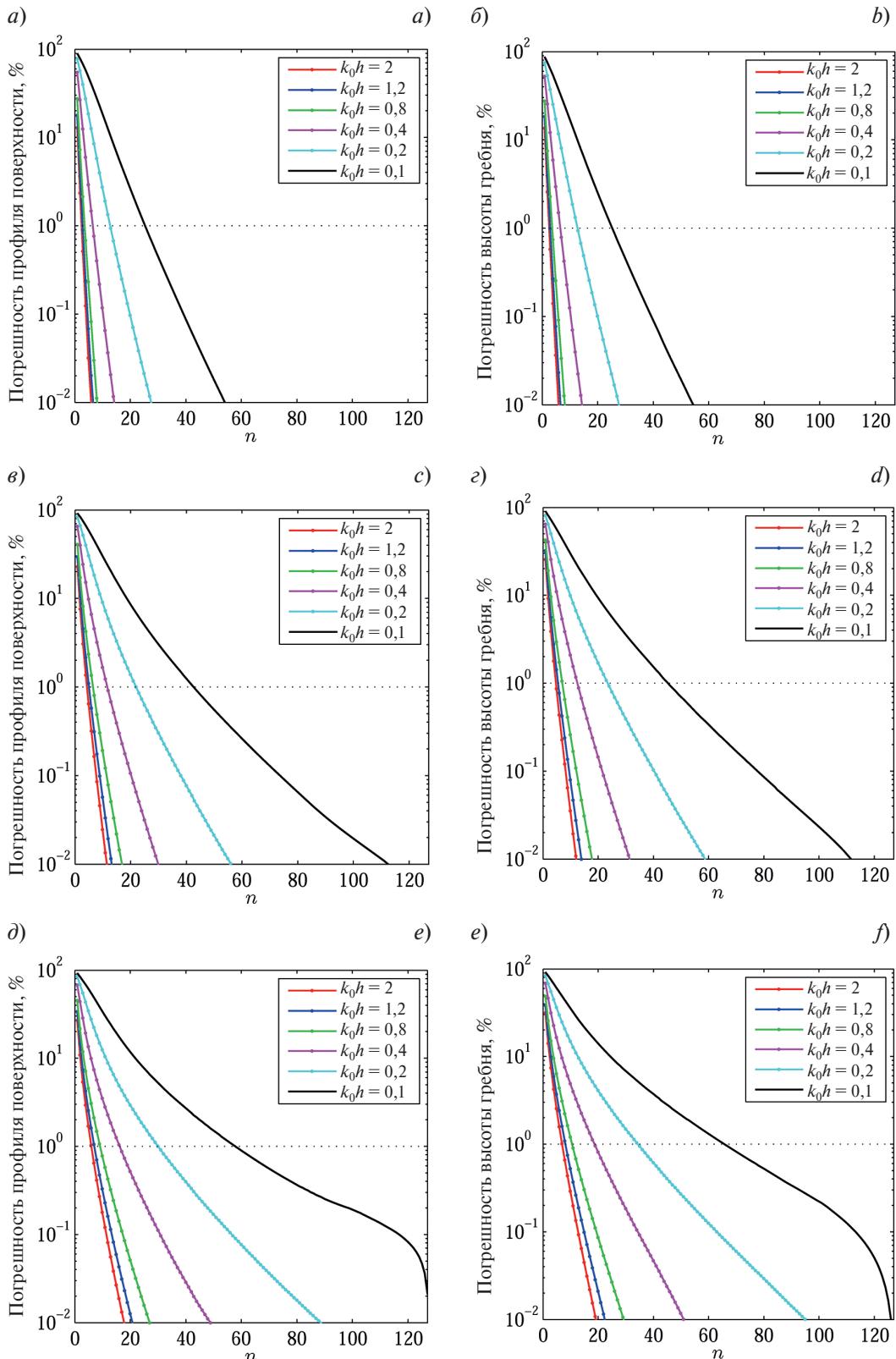
где  $\eta$  — полное численное решение для смещения поверхности, а  $\eta_{cut}(n)$  — смещение поверхности, полученное из  $\eta$  после принудительного обнуления амплитуд Фурье выше номера  $n$ . Суммирование в (7) происходит по всем пространственным точкам, на которых задано смещение поверхности.



**Рис. 1.** Параметры однородных волн с отношениями  $H/H_{br}=0,5$  ( $\blacktriangle$ ),  $H/H_{br}=0,8$  ( $\star$ ) и  $H/H_{br}=0,9$  ( $\bullet$ ) на диаграмме нормированных глубин и высот. Линиями построены границы применимости различных теорий, см. описание в тексте

**Fig. 1.** Parameters of regular waves with ratios  $H/H_{br}=0,5$  ( $\blacktriangle$ ),  $H/H_{br}=0,8$  ( $\star$ ), and  $H/H_{br}=0,9$  ( $\bullet$ ) on the diagram of normalized depths and heights. The lines plot the applicability limits of various theories; see description in the text

На рис. 2 показаны ошибки от 0,01 % и выше. Можно видеть, что оценки ошибок для величин  $\Delta\eta$  и  $\Delta Cr$  оказались очень близкими, в т. ч. количественно, хотя гребень волны предполагался наиболее требовательным к числу описывающих его мод Фурье. Если в качестве критерия допустимости ошибки принять 1 % (как и в случае разделения на теории Стокса разного порядка на классической диаграмме на рис. 1), то для



**Рис. 2.** Среднеквадратичная ошибка описания профиля волны  $\Delta\eta$  (левая колонка) и относительная ошибка высоты гребня волны  $\Delta Cr$  (правая колонка) в случае обнуления мод Фурье выше номера  $n$  для случаев высот волн  $H = 0,5 H_{br}$  (а, б),  $H = 0,8 H_{br}$  (в, г) и  $H = 0,9 H_{br}$  (д, е) и разных глубин

**Fig. 2.** The root-mean-square error in describing the wave profile  $\Delta\eta$  (left column) and the relative error in the wave crest height  $\Delta Cr$  (right column) in the case of zeroing of the Fourier modes above the number  $n$  for cases of wave heights  $H=0,5 H_{br}$  (a, b),  $H=0,8 H_{br}$  (c, d), and  $H=0,9 H_{br}$  (e, f) and different depths

глубин  $k_0 h \geq 0,4$  достаточно от 10 мод (для  $H = 0,5H_{br}$ ) до 20 мод Фурье (для  $H = 0,9H_{br}$ ), что соответствует 20 и 40 разрешающим точкам на 1 период волны. Для более глубокой воды  $k_0 h \geq 0,8$  требование на минимальное число мод Фурье (и число разрешающих точек в пространстве) ослабляется примерно вдвое. Для столь же качественного описания профилей волн в условиях мелкой воды требуется значительно большее число мод: для  $k_0 h = 0,1$  их число должно быть от 30 мод при  $H = 0,5H_{br}$  до 60–70 мод при  $H = 0,9H_{br}$ .

#### 4. Вычисление вертикальной компоненты скорости на поверхности

Для решения граничных условий на поверхности (1)–(2) требуется знание вертикальной компоненты скорости  $W(x, t) = \partial\phi/\partial z|_{z=\eta}$  на каждом временном шаге численной схемы. Для этого необходимо решить уравнение Лапласа для потенциала  $\phi(x, z, t)$  в слое с периодическими условиями по горизонтали  $\phi(x + L, z, t) = \phi(x, z, t)$ , заданной поверхностью  $z = \eta(x, t)$  и дном  $z = -h$ . На дне задано граничное условие (4); на поверхности задано значение потенциала,  $\phi(x, z = \eta, t) = \Phi(x, t)$ .

В стандартной формулировке подхода HOSM потенциал скорости ищется в виде ряда из членов разных порядков малости  $\phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \dots$ . Вертикальная структура функций  $\phi^{(m)}(x, z, t)$  определяется решением уравнения Лапласа в области с постоянной верхней границей  $z = 0$  и не изменяется на каждом шаге интегрирования, что делает код быстрым. Аналогично раскладывается в ряд и функция вертикальной скорости на поверхности,  $\partial\phi/\partial z|_{z=\eta} = W^{(1)} + W^{(2)} + \dots$ . Слагаемые в (1) и (2), включающие вертикальную производную от потенциала скорости на поверхности воды, определяются в соответствии со следующими формулами:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} \left( 1 + \left( \frac{\partial\eta}{\partial x} \right)^2 \right) = SW^{(M)} + \left( \frac{\partial\eta}{\partial x} \right)^2 SW^{(M-2)}, \quad SW^{(m)} \equiv \sum_{k=1}^m W^{(k)}, \quad (8)$$

$$\left( \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \left( 1 + \left( \frac{\partial\eta}{\partial x} \right)^2 \right) = \sum_{m=1}^{M-1} W^{(m)} SW^{(M-m)} + \left( \frac{\partial\eta}{\partial x} \right)^2 \sum_{m=1}^{M-3} W^{(m)} SW^{(M-m-2)}. \quad (9)$$

Следующие формулы позволяют итерационным способом находить компоненты потенциала  $\phi^{(m)}$  на невозмущенном уровне  $z = 0$  по заданному потенциальну на поверхности  $\Phi$  и затем компоненты вертикальной скорости  $W^{(m)}$  на поверхности:

$$\phi^{(1)} \Big|_{z=0} = \Phi, \quad \phi^{(m)} \Big|_{z=0} = - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\eta^j}{j!} \frac{\partial^j \phi^{(m-j)}}{\partial z^j} \Bigg|_{z=0}, \quad m = 2, \dots, M, \quad (10)$$

$$W^{(1)} = 0, \quad W^{(m)} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\eta^j}{j!} \frac{\partial^{j+1}}{\partial z^{j+1}} \phi^{(m-j)} \Bigg|_{z=0}, \quad m = 2, \dots, M. \quad (11)$$

В работе [4] эта процедура, сохраняющая свойство гамильтоновости системы, приводится со ссылкой на [33].

Отметим, что рассматриваемая задача линейна по отношению к потенциальну (но не смещению  $\eta$ ). Если имеется два решения уравнения Лапласа (3)  $\phi_1(x, z)$  и  $\phi_2(x, z)$ , каждое удовлетворяющее условию на дне (4), условию периодичности по горизонтали и условиям  $\phi_1(x, z = \eta) = \Phi_1(x)$  и  $\phi_2(x, z = \eta) = \Phi_2(x)$ , то функция  $\phi = \phi_1 + \phi_2$  также удовлетворяет уравнению Лапласа с теми же граничными условиями, для которой  $\phi_1(x, z = \eta) + \phi_2(x, z = \eta) = \Phi_1 + \Phi_2$ . (Далее в настоящем разделе переменную времени отображать не будем.) В частности, можно разложить функцию  $\Phi(x)$  в ряд Фурье и решить обсуждаемую задачу для каждой из гармоник, а затем решение исходной задачи получить сложением решений для гармоник. Отметим, что рассматриваемая задача не делает различия между нелинейными связанными компонентами и свободными волнами такой же длины, которые принципиально разные по физике.

Сходимость используемых разложений для модельных профилей волн Стокса на бесконечно глубокой воде исследовалась в самой первой работе [3], где было показано, что для волн круче  $k_0 H/2 = 0,35$  (80 % от предельной высоты обрушения) сходимость начинает нарушаться, так что конструктивным подходом является использование невысоких порядков разложения. В той же работе были проведены тесты восстановления вертикальной скорости на поверхности для случая существования двух волн на примере сум-перпозиции линейных волн с различными волновыми числами  $k_1$  и  $k_2$  и амплитудами  $a_1$  и  $a_2$ . Для каждой из волн потенциал на невозмущенном уровне  $\phi(x, z = 0)$  записывается гармонической функцией:

$$\phi(x, z = 0) = a_1 \frac{g}{\omega_1} \sin(k_1 x) + a_2 \frac{g}{\omega_2} \sin(k_2 x), \quad (12)$$

здесь  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — циклические частоты в соответствии с дисперсионным соотношением (6) для  $k_1$  и  $k_2$ . Соответственно, функции  $\Phi(x)$  и  $W(x)$  вычисляются с помощью аналитического решения уравнения Лапласа на поверхности

$$\eta(x) = a_1 \cos(k_1 x) + a_2 \cos(k_2 x), \quad (13)$$

и сравниваются с численным решением  $W(x)$  по заданному  $\Phi(x)$ , находимым согласно процедуре (10)–(11). В [3] сообщается, что для выбора волновых чисел  $k_2/k_1 = 10$  в случае  $k_1 a_1 = k_2 a_2 = 0,1$  вертикальная скорость  $W(x)$  определяется не хуже чем с точностью до 6 значащих цифр при  $M = 8$  и  $N_x = 2^7$ . При двукратном увеличении крутизны,  $k_1 a_1 = k_2 a_2 = 0,2$ , точность снижается до 3 значащих цифр. Подобные тесты были проведены и в работе [4], также только для предела глубокой воды.

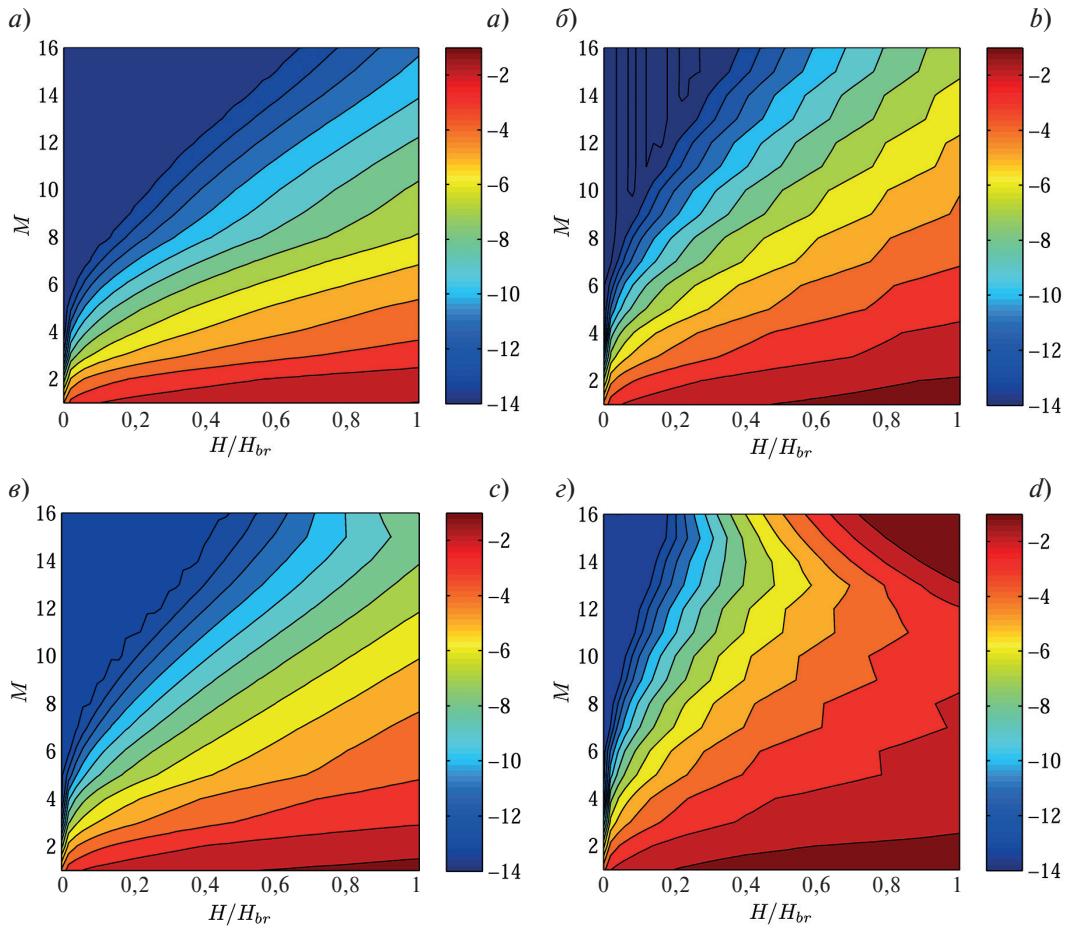
В настоящей работе проанализирована точность определения вертикальной скорости на поверхности для широкого диапазона глубин. Рассмотрены случаи одной волны ( $a_2 = 0$ ) и существования двух гармонических волн (12) и (13). Распределения максимальной относительной ошибки вычисления функции  $W(x)$  были построены на диаграммах типа приведенной на рис. 1в в осях глубины и амплитуды волн. Отметим, что для решаемой усеченной задачи (только уравнение Лапласа) высоты обрушения волн  $H_{br}$  ничем не выделены. Из анализа распределений можно сделать вывод, что для области  $k_1 h > 1$  погрешность главным образом зависит от параметра крутизны. Максимальное значение ошибки, соответствующее формальному порогу обрушения волн на глубокой воде  $k_1 a_1 = 0,44$ , составляет порядка 1 % при выборе  $M = 3$  и  $N_x = 2^6$ . В области более мелкой воды  $k_1 h < 1$  точность восстановления вертикальной скорости  $W(x)$  несколько повышается. При существовании гармоник с очень отличающимися длинами функция  $W(x)$  определяется со значительно большей погрешностью.

Точность реконструкции вертикальной скорости на поверхности можно повысить, используя больший порядок схемы  $M$ , как показано на рис. 3. На нем показаны два случая глубины,  $k_0 h = 0,4$  и  $k_0 h = 2$ , и диапазон амплитуд вплоть до обрушения  $H = H_{br}$ . На панелях рис. 3, *a*, *b* проиллюстрирован случай одной гармоники. Видно, что на мелкой воде решение ведет себя лучше: даже при выборе  $M = 1$  (линейное представление) результат описывается с точностью не хуже нескольких процентов вплоть до максимальной высоты. При использовании  $M = 16$  на глубине  $k_0 h = 0,4$  для волны, близкой к обрушению, вертикальная скорость восстанавливается практически с машинной точностью. На глубине  $k_0 h = 2$  при  $M = 16$  точность не хуже порядка  $O(10^{-7})$ . Рассматривать использование еще больших значений параметра  $M > 16$ , видимо, не имеет практического смысла, т. к. в этом случае более выигрышным представляется использование схем с дополнительной сеткой по вертикальной координате, которые упоминались во введении. Пространственного разрешения  $N_x = 2^6$  оказывается достаточно для случаев одной гармоники на глубине  $k_0 h = 2$ ; его увеличение не ведет к заметному улучшению результата реконструкции  $W(x)$ . Для меньшей глубины  $k_0 h = 0,4$  картина на рис. 3, *a* практически не изменяется и при худшем пространственном разрешении  $N_x = 2^4 \dots 2^5$ .

В ситуации очень широкого спектра  $k_2/k_1 = 10$  для аккуратного описания мелких волн, очевидно, требуется значительно лучшее пространственное разрешение (из соотношения  $k_2/k_1 = 10$  можно ожидать, что в 10 раз лучшее). На рис. 3, *в*, *г* построены диаграммы при использовании разрешения  $N_x = 2^8$ . При меньшем пространственном разрешении увеличение  $M$  более некоторого не приводит к повышению точности, а то и ведет к ее понижению. Подобный эффект проявляется и на рис. 3в, г: видно, что использование  $M > 15$  приводит к большей погрешности. При уменьшении  $N_x$  (а также и при еще большем увеличении разрешения) этот порог по параметру  $M$  понижается, а также уменьшается и максимальная амплитуда волны, для которой процедура определения  $W(x)$  остается аккуратной. Таким образом, имеется некоторый оптимум пространственного разрешения.

В случае еще меньшей глубины  $k_0 h = 0,1$  для одной гармоники восстановление вертикальной скорости с почти машинной точностью происходит во всем диапазоне амплитуд при  $M > 12$ , для этого достаточно разрешения  $N_x = 2^4$ . При суперпозиции волн максимальной крутизны  $k_1 a_1 = k_2 a_2 = H_{br}/2$  с отношением  $k_2/k_1 = 10$  при  $M = 16$  и  $N_x = 2^7$  погрешность составляет  $O(10^{-9})$ . Так что в смысле решения этой модельной задачи условия мелкой воды менее требовательны к разрешению схемы и степени параметра нелинейности  $M$ .

На рис. 4 проиллюстрирован результат расчета «сложного» случая  $k_2/k_1 = 10$ , сильной нелинейности  $2a_1 \approx 0,95H_{br}$  ( $k_1 a_1 = k_2 a_2 = 0,4$ ), сравнительно большой глубины  $k_1 h = 2$  и относительно большого параметра нелинейности схемы  $M = 6$ . На рис. 4, *б* построен спектр Фурье функции  $W(x)$  (красные кресты) в сравнении с точным решением уравнения Лапласа (зеленая линия с кружками). Видно отличие численного решения от эталонного в области высоких мод  $k > 40$ , приводящее к ошибке 2,6 %. При этом профили вертикальной скорости, приведенные на рис. 4, *а*, неотличимы на глаз. При увеличении параметра  $M > 10$  хвост преобразования Фурье начинает спадать медленнее, что приводит к росту ошибок. Аналогичный



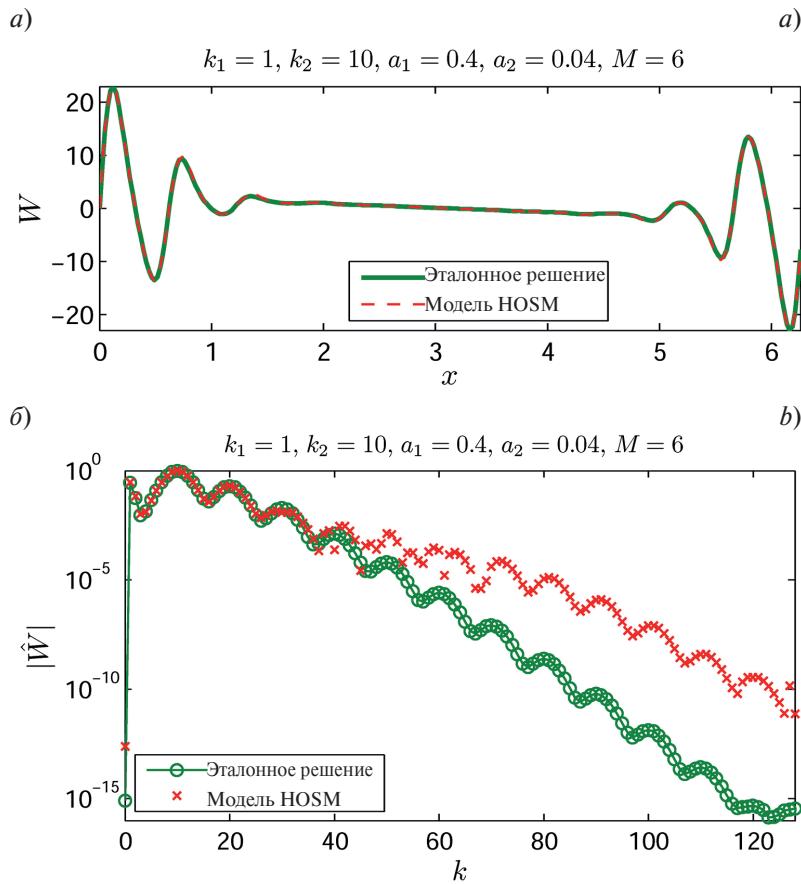
**Рис. 3.** Максимальная относительная ошибка реконструкции вертикальной скорости на поверхности  $W(x)$  (цветом показан ее десятичный логарифм) для условий одной волны при  $k_0h = 0,4$  (а) и  $k_0h = 2$  (б), а также двух гармоник с соотношениями  $k_2/k_1 = 10$ ,  $k_1a_1 = k_2a_2$  при  $k_1h = 0,4$  (в) и  $k_1h = 2$  (г). Для случаев (а) и (б)  $N_x = 2^6$ , для (в) и (г)  $N_x = 2^8$

**Fig. 3.** Maximum relative error in reconstructing the vertical velocity on the surface  $W(x)$  (its decimal logarithm is shown in color) for the conditions of one wave with  $k_0h = 0.4$  (a) and  $k_0h = 2$  (b), as well as two harmonics with ratios  $k_2/k_1 = 10$ ,  $k_1a_1 = k_2a_2$  with  $k_1h = 0.4$  (c) and  $k_1h = 2$  (d). For cases (a) and (b)  $N_x = 2^6$ , for (c) and (d)  $N_x = 2^8$

расчет для  $k_1a_1 = k_2a_2 = 0,4$  при  $M = 8$  имеет погрешность  $2,1 \cdot 10^{-4}$  (лучше чем у [3] за счет большего  $N_x$ ) и дает минимальную ошибку  $8,7 \cdot 10^{-7}$  при выборе  $M = 13$ . Таким образом, при выборе достаточного пространственного разрешения и высокого порядка нелинейности  $M$  даже в модельном случае широкого спектра восстановление вертикальной скорости может происходить довольно аккуратно.

На рис. 5 приведены результаты определения точности восстановления вертикальной скорости на поверхности для нелинейных волн Стокса, построенных численно с высокой точностью, как это описано в разд. 3. Как и ранее, функции  $W(x)$  восстанавливались по заданным потенциалам на поверхности  $\Phi(x)$  и профилям поверхности  $\eta(x)$ . Примеры приведены для двух условий глубины:  $k_0h = 0,4$  (левая колонка) и  $k_0h = 2$  (правая колонка) и разной интенсивности: 50 % от высоты обрушения (верхний ряд), 80 % (средний ряд) и 90 % (нижний ряд). Максимальные относительные погрешности определены для разной степени пространственного разрешения  $N_x$  (точек на одну длину волны) и разной степени нелинейности  $M$ .

Из приведенных примеров можно заключить, что картина эффективности процедуры определения  $W(x)$  качественно подобна для обоих случаев глубины. Наблюдается оптимум выбора пространственного разрешения для больших значений  $M$ : слишком высокое разрешение (более  $2^7 \dots 2^8$  точек на длину волны) приводит к большей погрешности. Для фиксированных небольших значений  $M$  повышение пространственного разрешения выше некоторого не повышает точность. Так, для  $M=3, 4$  и  $H = 0,5H_{br}$  на глубокой воде



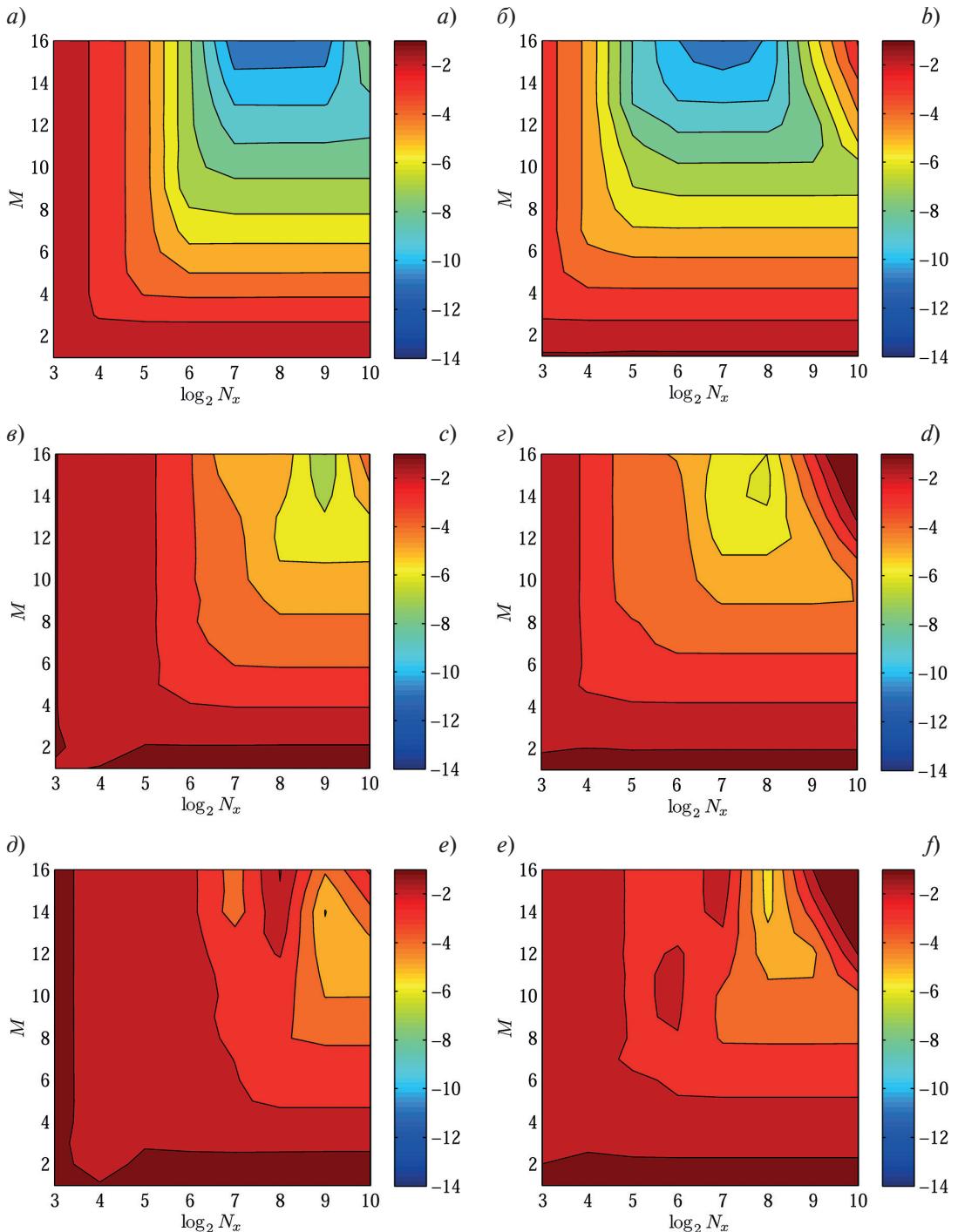
**Рис. 4.** Реконструированная вертикальная скорость на поверхности  $W(x)$  (a) и ее нормированные амплитуды Фурье (б) для случая  $k_2/k_1 = 10$ ,  $k_1 a_1 = k_2 a_2 = 0.4$ ,  $k_1 h = 2$ ,  $N_x = 2^8$ . «Reference» — аналитическое решение, «HOSM» — численное решение

**Fig. 4.** Reconstructed vertical velocity on the surface  $W(x)$  (a) and its normalized Fourier amplitudes (b) for the case  $k_2/k_1 = 10$ ,  $k_1 a_1 = k_2 a_2 = 0.4$ ,  $k_1 h = 2$ ,  $N_x = 2^8$ . The legend “Reference” corresponds to the analytical solution, “HOSM” is the numerical solution

разрешение  $N_x > 2^3$  не приводит к повышению точности лучше  $O(10^{-3})$  (рис. 5, б); на мелкой воде для такой же точности и значений  $M$  желательно более высокое разрешение  $N_x = 2^4$  точек на одну волну (рис. 5, а). Для случаев еще меньшей глубины  $k_0 h$  диаграммы выглядят подобным же образом, но сдвинуты вправо, так что требуется еще большее число разрешающих точек.

Для случаев  $H \geq 0.8H_{br}$  (рис. 5, в-е) очевиден рост величины ошибки и нарушение сходимости процедуры определения  $W(x)$  при увеличении разрешения и степени нелинейности. В то же время остается справедливым вывод, что для небольших значений  $M = 3, 4$  увеличение пространственного разрешения выше  $N_x > 2^4$  не приводит к лучшему результату.

Таким образом, если в модельной задаче одной или двух заданных гармоник для восстановления компоненты скорости  $W(x)$  условия мелкой воды были менее требовательными, то для примера стационарной нелинейной волны ситуация обратная: на мелкой воде для аккуратного восстановления  $W(x)$  требуется лучшее пространственное разрешение. Этот результат, вероятно, связан с более широким спектром волн на мелкой воде, как обсуждалось в разд. 3. Оценки требуемого пространственного разрешения для определения  $W(x)$  с точностью не хуже 1 % также согласуются с требованиями на необходимое разрешение, приведенными в разд. 3. Вместе с тем, для волн Стокса большой крутизны точность восстановления вертикальной скорости ограничена. Для  $H \geq 0.9H_{br}$  и глубин  $k_0 h \geq 0.4$  она не выше  $O(10^{-5})$  при любом выборе  $M$  и  $N_x$  (рис. 5, д, е).



**Рис. 5.** Максимальная относительная ошибка реконструкции вертикальной скорости  $W(x)$  (цветом показан ее десятичный логарифм) для регулярной волны Стокса на глубине  $k_0 h = 0,4$  (левая колонка) и  $k_0 h = 2$  (правая колонка) с высотами 50 % (a, б), 80 % (в, г) и 90 % (д, е) от предельной

**Fig. 5.** Maximum relative error in reconstructing the vertical velocity  $W(x)$  (its decimal logarithm is shown in color) for a regular Stokes wave at a depth of  $k_0 h = 0.4$  (left column) and  $k_0 h = 2$  (right column) with heights of 50 % (a, b), 80 % (c, d) and 90 % (e, f) of the breaking limit

Пересчет потенциала скорости в представлении мод Фурье с возмущенной поверхности на уровень  $z = 0$  возможен и без использования приближений, решая систему алгебраических уравнений [34], но этот путь требует больших вычислительных затрат и также может приводить к собственной неустойчивости решения. В работе [35] в контексте задачи построения гидродинамических полей под крутыми волнами было предложено разбивать процедуру пересчета потенциала скорости на уровень невозмущенной жидкости

с использованием разложений Тейлора (10)–(11) на несколько последовательных шагов (порядка  $O(10)$ , метод  $H_2$ -оператора). Отмечалось, что такой подход позволил значительно улучшить описание в сравнении со стандартным решением задачи за один шаг (метод  $H$ -оператора). Этот путь используется при расчете гидродинамических полей в жидкости, в т. ч. вблизи поверхности под крутыми волнами, и другими авторами [36]. Без его использования погрешности вычисления потенциала на уровне  $z = 0$  могут приводить к расходимости решений вблизи поверхности, вычисленных с использованием аналитического решения уравнения Лапласа в прямоугольной области.

В рамках настоящего исследования был проанализирован результат реконструкции  $W(x)$  по заданным  $\Phi(x)$  и  $\eta(x)$  посредством пересчета потенциала на уровень  $z = 0$  за 10 последовательных шагов (метод  $H_2$ -оператора). Действительно, в ряде случаев использование этой схемы позволяло более аккуратно определить величину  $\varphi(x, z=0)$  (при этом стандартный подход в случае волн большой крутизны мог давать сильно неверное или даже сингулярное решение для  $\varphi(x, z = 0)$ ), но всегда давало худшую оценку функции  $W(x)$ . Таким образом, в случае плохой сходимости разложений Тейлора (10)–(11) они приводят к большой (в т. ч. фатальной) погрешности восстановления потенциала на невозмущенном уровне поверхности, но при этом обеспечивают удовлетворительное восстановление вертикальной компоненты скорости на поверхности.

## 5. Моделирование распространения волн

В настоящем разделе представлены тесты по расчету распространения регулярных волн в рамках псевдоспектральной модели HOSM. В качестве модельных случаев используются однородные волны Стокса заданной высоты на постоянной глубине, построенные численно, как описано в разд. 3. Поскольку начальные условия задаются с высокой точностью, то степень сохранения формы волны в процессе ее распространения может рассматриваться как показатель аккуратности моделирования уравнений гидродинамики. В качестве объективных индикаторов точности расчета эволюции волн использовались: 1) длительность расчета до наступления численной неустойчивости, 2) ошибка сохранения полной механической энергии  $\Delta E/E(0)$ , 3) отличие наблюдаемой скорости движения волны (и связанной с ней частоты) от теоретической, 4,5) погрешности описания профиля смещения и максимальной высоты гребня. Результаты тестирования для выбранных условий приведены в табл. 1. В ней  $N_x$  обозначает число разрешающих точек на длину волны,  $T_0/\Delta t$  — число шагов по времени  $\Delta t$  на один линейный период волны  $T_0$ ,  $T_{tot}$  — общее время расчета.

Для полного исключения ошибки перекрытия спектров Фурье в результате нелинейных операций требуется уширение спектральных областей в  $(M + 1)/2$  раз (процедура деалиазинга, de-aliasing), где  $M$  — нелинейный параметр схемы HOSM. В обсуждаемых экспериментах использовалась процедура деалиазинга с 2-кратным уширением спектральных областей, достаточным для порядка  $M = 3$ . Для расчетов с большим порядком нелинейности  $M$  заметного эффекта от дальнейшего уширения спектральных областей замечено не было.

Наблюданная в эксперименте частота  $\omega_S$ , используемая для определения скорости волны  $C_S = \omega_S/k_0$ , определялась на основании временной зависимости фазы  $\theta_0(t)$  пространственной Фурье гармоники несущей волны через усреднение за все расчетное время. Также определялся набор моментальных значений частоты по измеренному времени между последовательными прохождениями фазой значений, кратных  $2\pi$ . Величина  $Dev \omega$  в табл. 1 соответствует максимальному относительному отклонению фактической частоты от теоретической. Профиль распространяющейся волны отслеживался в системе отсчета, движущейся со скоростью  $C_S$ . Его неизменность оценивается величиной  $Dev \eta$ , равной максимальному относительному среднеквадратичному отклонению от начального. Максимальное относительное отклонение высоты гребня волны от начального значения, определенное для профиля в сопровождающей системе отсчета, представлено в табл. 1 величиной  $Dev Cr$ . Численные эксперименты кодируются по следующей форме: первая буква (A-D) отражает крутизну волны, последующая цифра — номер эксперимента в серии, нижний индекс — безразмерную глубину.

Численный эксперимент A1<sub>0.8</sub> для глубины  $k_0 h = 0.8$  и умеренной высоты волны в половину высоты обрушения соответствует высокому разрешению в пространстве (64 точек на длину волны), учету  $M = 16$  членов разложения Тейлора и маленькому шагу итераций по времени (более 600 шагов на период). В эксперименте происходит неустойчивый рост амплитуд высоких мод Фурье, приводящий к аварийной остановке расчета через примерно 100 периодов. Из-за этого на финальной стадии расчета профиль волны претерпевает значительные искажения при довольно высокой точности воспроизведения частоты волны. Результаты эксперимента проиллюстрированы на рис. 6. Коротковолновые биения профиля хорошо видны на рис. 6, a. Рассматриваемый случай уже соответствует существенной нелинейности волн, что следует из сильной асимметрии профиля по отношению к невозмущенному уровню. На рис. 6, b показана общая

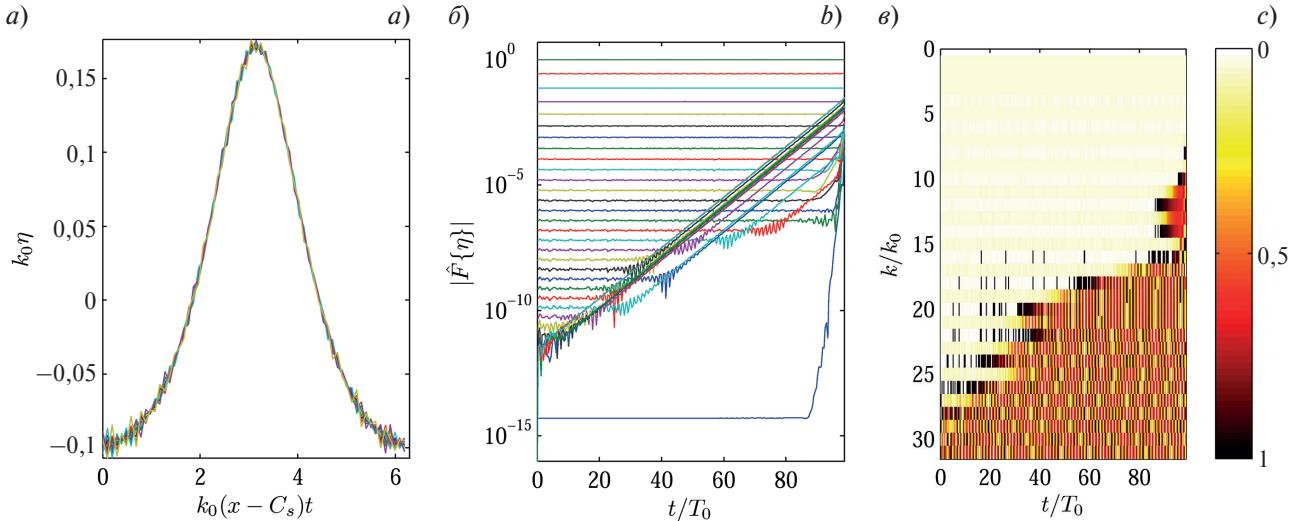
Таблица 1  
Table 1

**Параметры и результаты моделирования регулярных волн Стокса**  
**Parameters and results of the simulation of regular Stokes waves**

	$k_0 h$	$H/H_{br}$	$N_x$	$T_0/\Delta t$	$M$	$m$	$T_{tot}/T_0$	$\Delta E/E(0),\%$	Dev $\omega,\%$	Dev $\eta,\%$	Dev $Cr,\%$
A1 <sub>0,8</sub>	0,8	0,5	$2^6$	630	16	—	100	$8 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	6,0	2,6
A2 <sub>0,8</sub>	0,8	0,5	$2^6$	630	16	16	> 400	$6 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-2}$
A3 <sub>0,8</sub>	0,8	0,5	$2^5$	630	6	—	> 400	$1 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-2}$
A4 <sub>0,8</sub>	0,8	0,5	$2^6$	630	16	32	> 400	$6 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$9 \cdot 10^{-2}$
A5 <sub>0,8</sub>	0,8	0,5	$2^5$	158	6	—	> 400	$1 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-1}$
A6 <sub>0,8</sub>	0,8	0,5	$2^4$	79	3	—	> 400	$3 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-1}$
B1 <sub>0,8</sub>	0,8	0,8	$2^4$	79	3	—	> 400	$3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-1}$	3,1	3,8
B2 <sub>0,8</sub>	0,8	0,8	$2^5$	315	16	—	35	$8 \cdot 10^{-2}$	2,2	34	14
C1 <sub>0,8</sub>	0,8	0,9	$2^4$	79	3	—	> 400	$3 \cdot 10^{-1}$	1,1	21	23
D1 <sub>0,8</sub>	0,8	0,95	$2^4$	79	3	—	> 400	$6 \cdot 10^{-1}$	2,2	33	34
A1 <sub>0,4</sub>	0,4	0,5	$2^4$	79	3	—	> 300	$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-1}$	2,6	2,5
A2 <sub>0,4</sub>	0,4	0,5	$2^5$	79	3	—	> 300	$3 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-1}$	1,4	1,1
A3 <sub>0,4</sub>	0,4	0,5	$2^6$	79	6	—	> 300	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-2}$	1,2	$7 \cdot 10^{-1}$
B1 <sub>0,4</sub>	0,4	0,8	$2^6$	79	6	—	> 300	$6 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$	2,3	1,7
B2 <sub>0,4</sub>	0,4	0,8	$2^6$	79	3	—	250	$6 \cdot 10^{-1}$	1,0	26	14
C1 <sub>0,4</sub>	0,4	0,9	$2^4$	79	3	—	> 300	1,7	3,5	50	40
C2 <sub>0,4</sub>	0,4	0,9	$2^6$	79	6	—	30	3,7	1,1	23	8,9

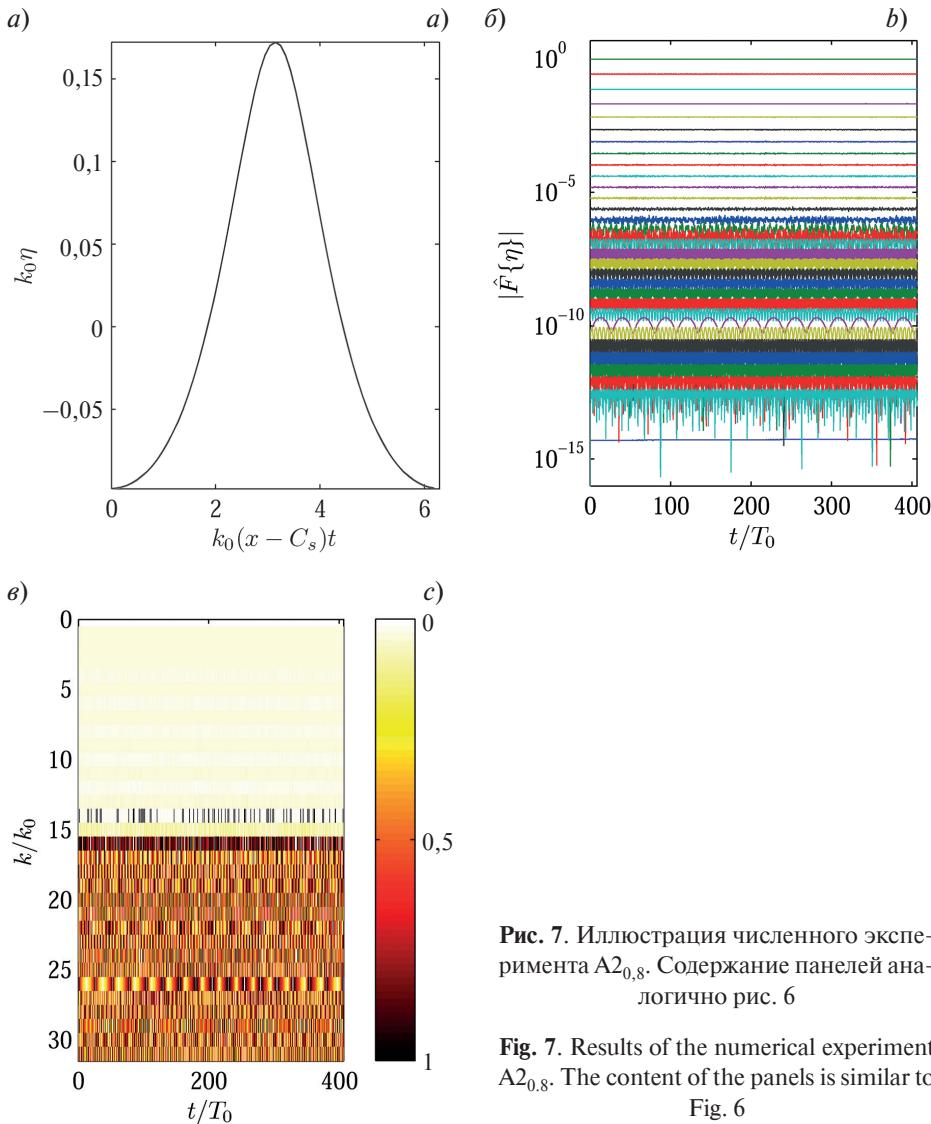
картина нарастающей неустойчивости коротких масштабов для всех 32 мод Фурье. Можно констатировать сохранение энергии модами Фурье до некоторого времени, но процесс экспоненциального роста амплитуд высоких мод Фурье со временем затрагивает гармоники со все меньшими номерами. Самая нижняя линия на рис. 6, б соответствует нулевой моде (среднее смещение поверхности, которое должно оставаться неизменным), которая «взрывается» в течение последних 10 периодов волн. На рис. 6, в построена картина соответствия фаз мод Фурье. Цветом для разных мод и моментов времени показано отличие фазы от фазы несущей волны  $k_0$ : белые области соответствуют их совпадению, черный цвет — противофазе. Точное решение в виде распространяющейся волны постоянного профиля должно демонстрировать софазность всех мод Фурье, что соответствовало бы полностью светлой картине на рисунке. На самом деле, в начале расчета софазными являются лишь первые два десятка мод (что примерно соответствует ожидаемому количеству при выборе  $M = 16$ ). Со временем число высоких мод в фазе сокращается; в последние 10 периодов эволюции их остается не более десяти.

Расчет A1<sub>0,8</sub> был проведен без использования фильтра (5) для приращений Фурье компонент. Эксперимент A2<sub>0,8</sub> выполнен при полностью аналогичных параметрах, но с использованием фильтра (5) с выбором параметра  $m = 16$ . Эта симуляция оказалась устойчивой в течение 400 периодов (далее расчет не проводился), не демонстрирует признаков неустойчивости (см. рис. 7) и обеспечивает высокую точность сохранения энергии (относительная погрешность  $6 \cdot 10^{-7}$ ) и воспроизведения профиля волны и ее скорости (не хуже долей процента, см. табл. 1). Тысяча профилей волн, построенных на рис. 7, а, неотличимы друг от друга. В то же время, согласно рис. 7, б сохраняют свою амплитуду неизменной в процессе эволюции только около 13 низших мод Фурье. Фазовая диаграмма на рис. 7, в подтверждает, что гармоники, начиная с 16-й, не связаны с основной волной, т. е. фактически шумовые.



**Рис. 6.** Иллюстрация численного эксперимента А1<sub>0.8</sub>: а — профили смещения поверхности в сопровождающей системе координат, б — эволюция амплитуд Фурье, в — эволюция фаз пространственных гармоник Фурье относительно фазы несущей гармоники

**Fig. 6.** Results of the numerical experiment A1<sub>0.8</sub>: a — surface displacement profiles in the commoving coordinate system, b — evolution of Fourier amplitudes, c — evolution of phases of spatial Fourier harmonics relative to the phase of the carrier harmonic

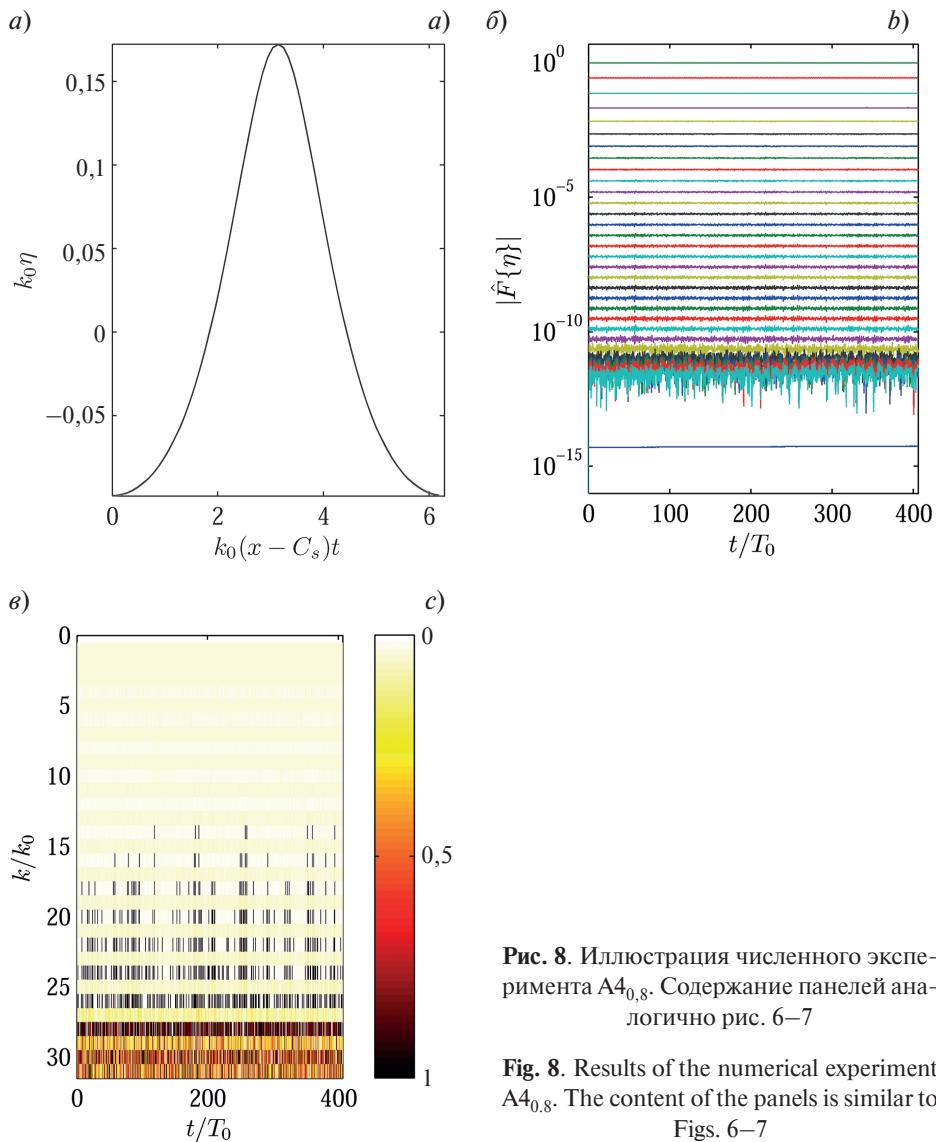


**Рис. 7.** Иллюстрация численного эксперимента А2<sub>0.8</sub>. Содержание панелей аналогично рис. 6

**Fig. 7.** Results of the numerical experiment A2<sub>0.8</sub>. The content of the panels is similar to Fig. 6

Отметим, что фильтр (5) при выборе  $m = 16$  обеспечивает сильное подавление эволюции Фурье гармоник именно в области выше 16-й. Новый эксперимент  $A3_{0,8}$  выполнен для пространственного разрешения  $N_x = 32$  вдвое хуже, чем в предыдущих случаях, и без использования фильтра (5). Также уменьшен порядок численной схемы до  $M = 6$ , см. табл. 1. Этот расчет оказывается устойчивым не менее 400 периодов волн и демонстрирует точность воспроизведения волны Стокса не хуже предыдущего случая  $A2_{0,8}$  (хотя и с заметной потерей точности сохранения энергии). Сохранение энергии и полную софазность в течение всего эксперимента демонстрируют 13 мод Фурье, хотя нелинейный порядок схемы всего лишь  $M = 6$ . Амплитуда самой высокой из них порядка  $10^{-6}$  амплитуды первой (доминирующей) гармоники. Хотя при разрешении 32 точек на длину волны можно заметить негладкость ее формы вблизи пика, все 1000 профилей на рисунке неразличимы подобно рис. 7, a. Таким образом, вместо использования фильтра (5) для стабилизации вычисления можно просто уменьшить пространственное разрешение.

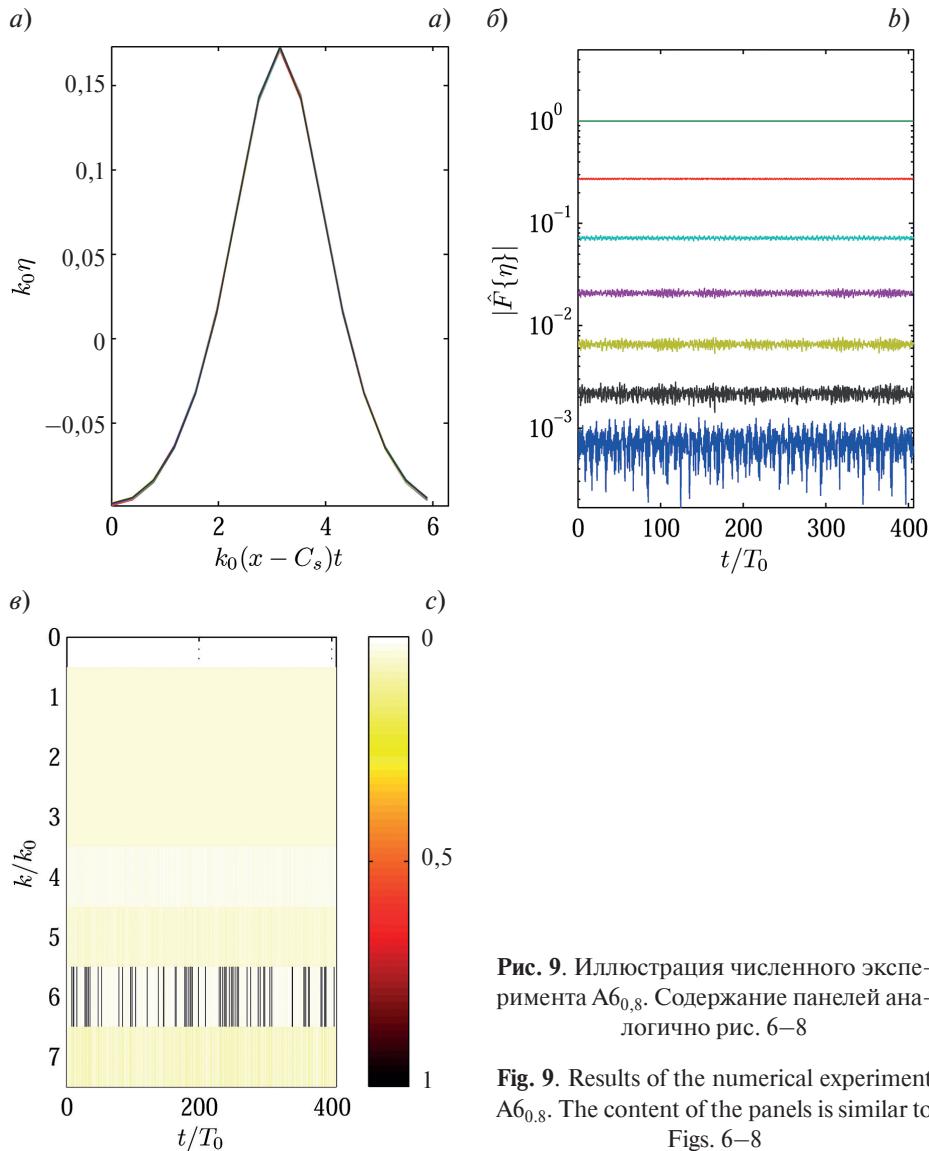
Использование фильтра (5) фактически исключает нормальную эволюцию Фурье гармоник с волновыми числами более  $mk_0$ . На рис. 8 приведен результат расчета  $A4_{0,8}$  с измененным по сравнению с  $A2_{0,8}$  параметром фильтра  $m = 32$  для подавления более высоких гармоник. Сравнивая результаты на рис. 6, рис. 7 и рис. 8, можно заключить, что перемещение фильтра в область более мелких масштабов позволило стабилизировать численную схему и при этом обеспечить относительно физичное поведение высоких гармоник Фурье до амплитуд порядка  $10^{-10}$  от величины доминирующей гармоники (25 мод). Вместе с тем, видно, что амплитуды высоких мод не вполне постоянны и фазы мод выше 15-й во время эволюции могут претерпевать заметные отклонения.



**Рис. 8.** Иллюстрация численного эксперимента  $A4_{0,8}$ . Содержание панелей аналогично рис. 6–7

**Fig. 8.** Results of the numerical experiment  $A4_{0,8}$ . The content of the panels is similar to Figs. 6–7

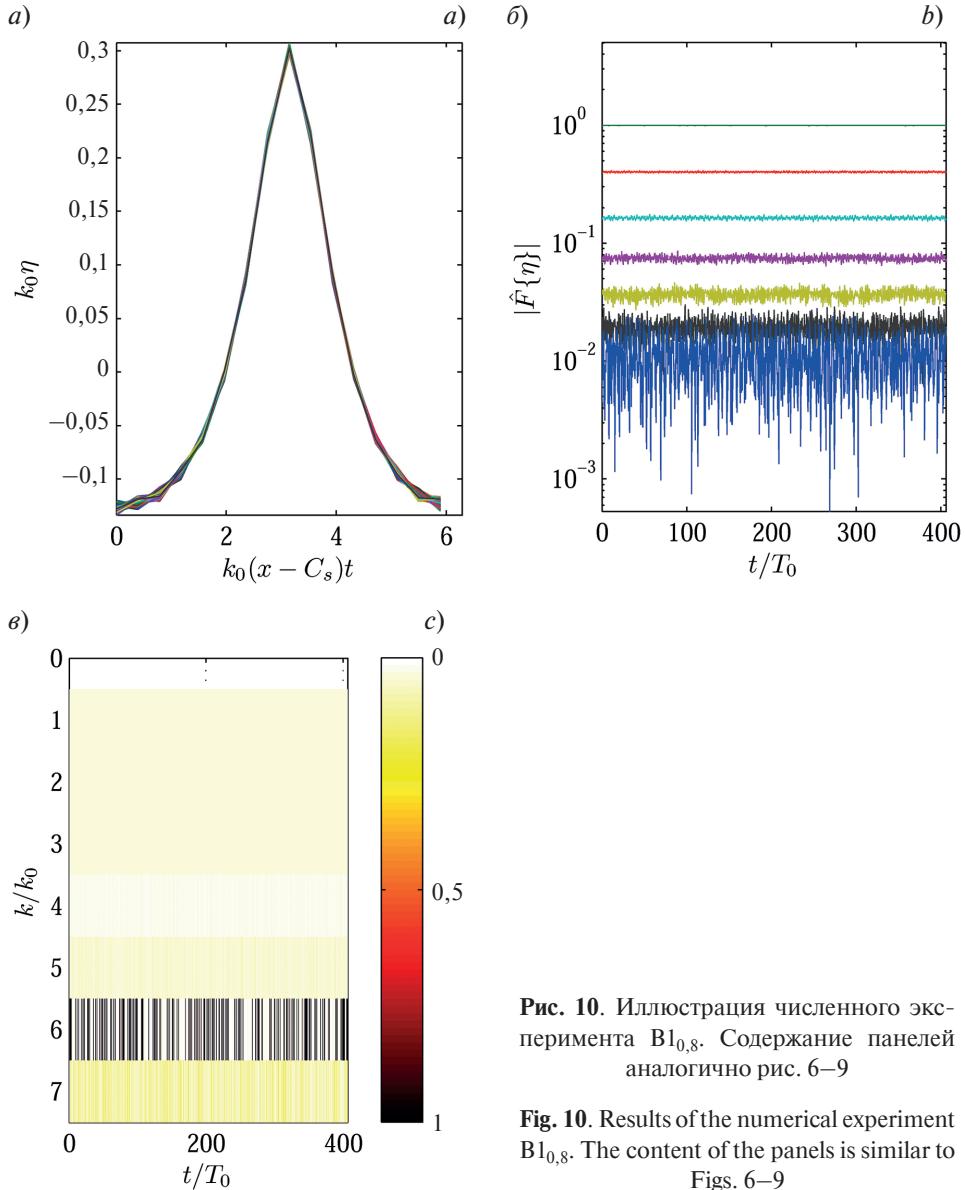
В табл. 1 приводятся данные еще двух симуляций, которые в сравнении с А3<sub>0,8</sub> характеризуются худшим разрешением по времени (А5<sub>0,8</sub>), а также по пространству и с меньшим значением нелинейного параметра схемы  $M = 3$  (А6<sub>0,8</sub>). Расчет А6<sub>0,8</sub> проиллюстрирован на рис. 9; условия этого эксперимента представляются как наиболее грубые, но все еще приемлемые. Расчет оставался устойчивым в течение не менее 400 периодов. За это время погрешность воспроизведения частоты волны и отклонение её профиля от начальной формы не превысили долей процента. Амплитуду и фазу волны сохраняют 4–5 гармоник Фурье; амплитуда самой высокой из них порядка  $10^{-3}$  от амплитуды доминирующей гармоники. Несколько ломаный профиль волны на рис. 9, *a* при необходимости может быть сглажен с помощью Фурье- или сплайн-интерполяции при постобработке.



**Рис. 9.** Иллюстрация численного эксперимента А6<sub>0,8</sub>. Содержание панелей аналогично рис. 6–8

**Fig. 9.** Results of the numerical experiment A6<sub>0,8</sub>. The content of the panels is similar to Figs. 6–8

Эксперимент с большей крутизной волны 80 % от порога обрушения В1<sub>0,8</sub> проведен для того же набора минимальных значений параметров, что и случай А6<sub>0,8</sub>. Результаты выглядят качественно похоже на случай А6<sub>0,8</sub> (см. на рис. 10), хотя количественные показатели стали хуже. Это объясняется более медленным спаданием амплитуд Фурье гармоник, так что самая высокая нешумовая мода характеризуется уровнем порядка  $10^{-2}$  от амплитуды доминирующей гармоники. Профиль волны (рис. 10, *a*) не очень хорошо разрешен при такой дискретизации, но довольно стабильно сохраняется в разные моменты времени. Симуляция с лучшим разрешением В2<sub>0,8</sub> на начальной стадии демонстрирует более аккуратное описание, но оказывается неустойчивой в области коротких волн, что приводит к остановке расчета через 35 периодов (схоже с примером А1<sub>0,8</sub>, приведенным на рис. 6).



**Рис. 10.** Иллюстрация численного эксперимента  $B1_{0,8}$ . Содержание панелей аналогично рис. 6–9

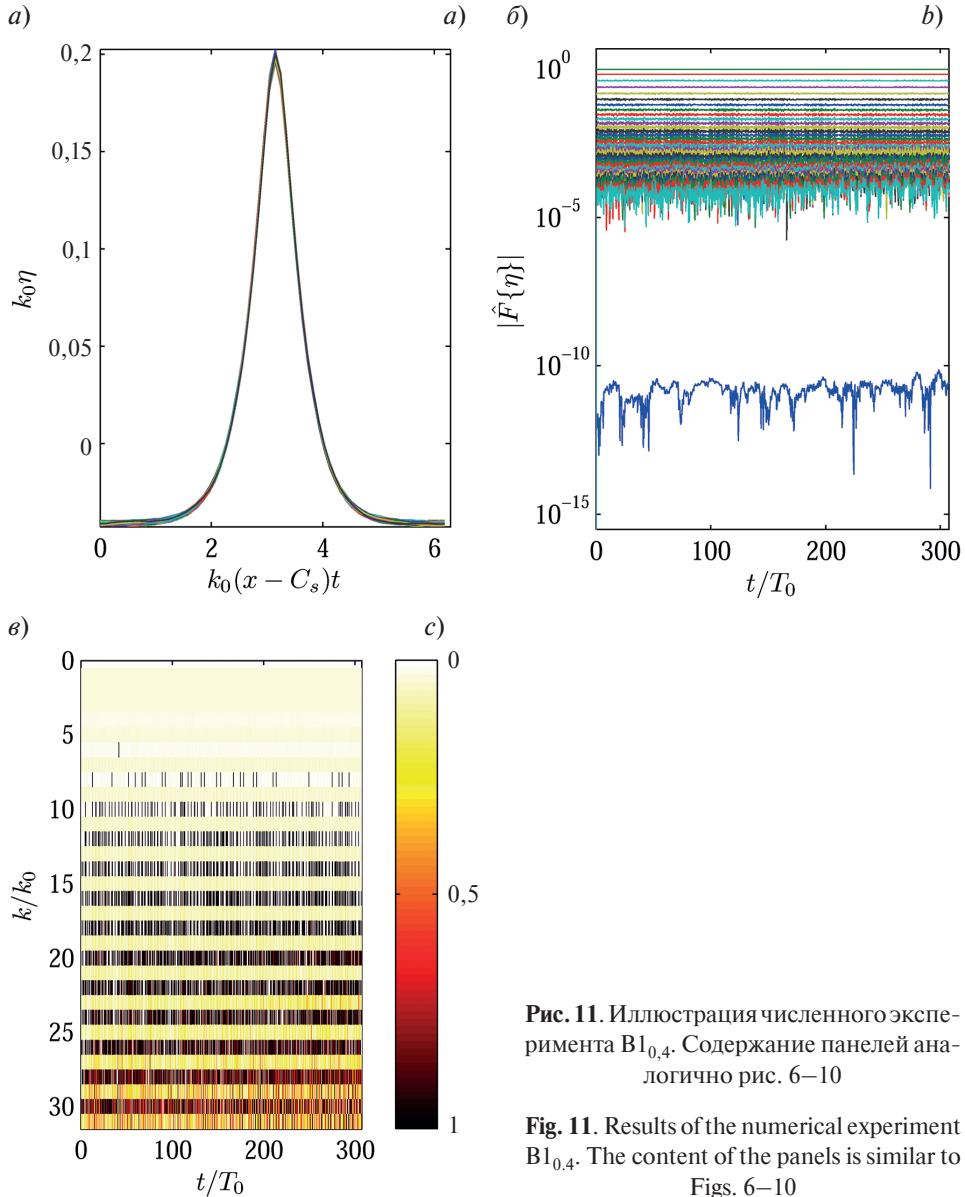
**Fig. 10.** Results of the numerical experiment  $B1_{0,8}$ . The content of the panels is similar to Figs. 6–9

Для еще большей крутизны волн при разрешении 16 точек на длину волны и 80 шагов на период волны расчет также остается устойчивым в течение не менее 400 периодов, но расходжение с точным решением становится неприемлемо большим (см. эксперименты  $C1_{0,8}$  и  $D1_{0,8}$  в табл. 1).

Как обсуждалось в разд. 3, 4, для меньших глубин требование на пространственное разрешение становится жестче. В табл. 1 приведено несколько примеров расчета волн с высотой 50 % от предела обрушения для случая  $k_0h = 0,4$  (эксперименты  $A1_{0,4}$  —  $A3_{0,4}$ ). Можно отметить, что расчеты остаются устойчивыми для большего пространственного разрешения  $N_x = 32$ ,  $N_x = 64$  и в т. ч. для более высокого параметра нелинейности схемы  $M = 6$  чем в случае  $k_0h = 0,8$ .

Для волн с высотой 80 % от предела обрушения на глубине  $k_0h = 0,4$  при лучшем пространственном разрешении требуется и большее значение нелинейного параметра схемы  $M$ . Этот вывод, совпадающий с заключением разд. 4, следует и из экспериментов по моделированию эволюции волн. При выборе  $M = 3$  наблюдается неустойчивость высоких гармоник Фурье (эксперимент  $B1_{0,4}$ ), а при  $M = 6$  счет устойчив не менее 300 периодов (эксперимент  $B2_{0,4}$ , расчеты проводились только до времен  $300T_0$ ). Последний эксперимент представлен на рис. 11.

Для еще более высоких волн на этой глубине (эксперименты  $C1_{0,4}$ ,  $C2_{0,4}$ ) устойчивым оказывается расчет  $C1_{0,4}$  с низким разрешением  $N_x = 16$ , но в нем волна Стокса воспроизводится с очень большой погрешностью. При использовании высокого разрешения быстро развивается коротковолновая неустойчивость, и расчет разваливается ( $C2_{0,4}$ ). Использование фильтра (5) с параметрами  $m = 64$  или  $m = 32$ , уменьшение шага по времени не помогает стабилизировать расчет.



**Рис. 11.** Иллюстрация численного эксперимента  $B1_{0,4}$ . Содержание панелей аналогично рис. 6–10

**Fig. 11.** Results of the numerical experiment  $B1_{0,4}$ . The content of the panels is similar to Figs. 6–10

В качестве выводов настоящего раздела можно заключить, что требования по достаточному пространственному разрешению согласуются с результатами разд. 3 и 4. Для удовлетворительного описания нелинейной частоты и профиля смещения поверхности (в пределах одного-нескольких процентов) для волн высотой 50 % от предела обрушения на промежуточной глубине  $k_0 h \geq 0,4$  достаточно 16–32 точек на длину волны. Для меньшей глубины и большей высоты волны требуется лучшее пространственное разрешение. Фильтр для высоких гармоник Фурье в форме (5) фактически подавляет динамику гармоник выше  $mk_0$ , поэтому использование слишком высокого пространственного разрешения  $N_x > 2m$  не имеет смысла. Для всех расчетов достаточным оказывается временной шаг порядка 80 шагов на период. Использование параметра нелинейности численной схемы  $M > 3$  повышает точность вычислений и может улучшить устойчивость схемы, что проявилось для условий относительно мелкой воды  $k_0 h = 0,4$ .

## 6. Заключение

Настоящее исследование посвящено анализу возможностей псевдоспектрального метода высокого порядка (HOSM) по описанию интенсивных гравитационных волн (в том числе с широким спектром) в условиях промежуточной глубины. Метод HOSM является, по сути, приближенным, и параметр нелинейности  $M$  определяет степень точности описания нелинейных взаимодействий волн. Этот параметр участвует в определении как точности вычислений с точки зрения воспроизведимой физики, так и картины возникновения численных неустойчивостей. Для обеспечения наиболее интересных приложений кода HOSM

для быстрых вычислений ансамблей нелинейных волн должны использоваться небольшие величины  $M$  и по возможности грубые пространственная и временная дискретные сетки; на них и сделан акцент исследования. Абсолютное большинство опубликованных работ посвящено применению HOSM для условий бесконечно большой глубины. В данной статье наиболее подробно рассмотрен диапазон безразмерных глубин  $0,4 \leq kh \leq 2$ . Случай  $kh = 2$  должен хорошо соответствовать пределу большой глубины. Для более мелких условий  $0,1 \leq kh \leq 0,4$  сформулированы выводы на качественном уровне.

Определенные по результатам тестов минимальные приемлемые условия моделирования, обеспечивающие устойчивую эволюцию в течение сотен периодов волн, выделены в табл. 1 цветом. Они соответствуют волнам высотой не более 80 % от предела обрушения. Для волн большей амплитуды вычисления с удовлетворительной точностью также возможны, но на небольших временах и с использованием более высокого разрешения. Поскольку интерес для нас представляют именно условия, когда схема HOSM может обеспечивать быстрые вычисления, дальнейший поиск параметров для расчета более крутых волн не проводился. В целом, для расчета волн на меньшей глубине требуется лучшее разрешение по пространству и более высокий порядок нелинейности  $M$ .

Использование фильтра мелких масштабов, предложенного в [12], оказывает стабилизирующий эффект, но фактически делает поведение попадающих под его действие мод физически неверным. Поэтому лучшей стратегией для подавления мелкомасштабной неустойчивости может быть использование более грубой дискретизации по пространству.

Представляется интересным вывод исследования, что степень неявного ограничения метода на ширину спектра, являющегося предметом критики метода HOSM, кажется не столь сильной. В частности, посредством увеличения пространственного разрешения и повышения степени нелинейности схемы можно обеспечить относительную точность вычисления вертикальной компоненты скорости на поверхности для волн с высотой 90 % от предела обрушения до порядка  $10^{-5}$ .

Пересчет потенциала скорости с поверхности  $\Phi(x) = \phi(x, z = \eta)$  на невозмущенный уровень  $z = 0$  за несколько последовательных шагов (метод  $H_2$ -оператора) не продемонстрировал существенного преимущества в широкой области параметров. Отметим что вместо  $H_2$ -оператора конструктивным подходом к построению гидродинамических полей вблизи взволнованной поверхности при высокой погрешности функции  $\phi(x, z = 0)$  может быть использование разложения Тейлора вблизи  $z = 0$  (того же порядка  $M$ , что и процедура вычисления  $\phi(x, z = 0)$ ). Такой метод был нами ранее успешно использован для построения полей давления под поверхностью крутых волн.

По всей видимости, для расчета очень крутых волн упомянутые во введении полные по нелинейности подходы [7, 9] могут оказаться более выигрышными, чем HOSM с большим значением параметра нелинейности схемы  $M$ , и заведомо более быстрыми по сравнению с расчетом в рамках объемных конечноразностных моделей (типа Finite Volume Method) или методами граничных элементов (Boundary Integral Element Methods). В то же время, для моделирования нерегулярных волн это означает большую частоту обрушений волн, которые не могут быть рассчитаны в рамках потенциальной модели. Поскольку расчет уравнений не-потенциальной гидродинамики требует слишком больших вычислительных затрат, то для учета обрушений необходимо использование параметризаций. Последние по определению являются неточными, что в значительной степени снижает пользу от применения модели высокой точности. Таким образом, как минимум для расчета волн на двумерной поверхности с умеренной степенью нелинейности модель HOSM представляется эффективной и очень удобной.

Подчеркнем, что приведенные в работе выводы касаются частного модельного случая одного периода однородной волны. Общий случай волн, неоднородных по двум горизонтальным координатам и нестационарных, характеризуемых неузким сплошным спектром, может представлять собой более требовательную к условиям моделирования задачу.

### Финансирование

Исследование поддержано проектом Российского научного фонда № 22-17-00153.

### Funding

The research is supported by the Russian Science Foundation under the grant № 22-17-00153.

### Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

### Conflict of interests

The author declares no conflict of interests.

## Литература

1. *Tanaka M.* A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation // Fluid Dynamics Research. 2001a. Vol. 28. P. 41–60. EDN LNNKKR. [https://doi.org/10.1016/S0169-5983\(00\)00011-3](https://doi.org/10.1016/S0169-5983(00)00011-3)
2. *Tanaka M.* Verification of Hasselmann's energy transfer among surface gravity waves by direct numerical simulations of primitive equations // Journal of Fluid Mechanics. 2001. Vol. 444. P. 199–221. EDN MBJCXR. <https://doi.org/10.1017/S0022112001005389>
3. *Dommermuth D., Yue D.K.P.* A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves // Journal of Fluid Mechanics. 1987. Vol. 184. P. 267–288. <https://doi.org/10.1017/S002211208700288X>
4. *West B.J., Brueckner K.A., Janda R.S., Milder D.M., Milton R.L.* A new numerical method for surface hydrodynamics // Journal of Geophysical Research. 1987. Vol. 92. P. 11803–11824. <https://doi.org/10.1029/JC092iC11p11803>
5. *Onorato M., Osborne A.R., Serio M.* On the relation between two numerical methods for the computation of random surface gravity waves // European Journal of Mechanics — B/Fluids. 2007. Vol. 26. P. 43–48. EDN MJGBQZ. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2006.05.001>
6. *Захаров В.Е.* Устойчивость периодических волн на поверхности глубокой жидкости // Журнал прикладной механики и технической физики. 1968. Т. 9. С. 86–94.
7. *Chalikov D.* Numerical modeling of sea waves. Springer. 2016. 330 p.  
URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-32916-1> (дата обращения: 18.03.2025)
8. *Chalikov D.V.* Different approaches to numerical modeling of sea waves // Fundamental and Applied Hydrophysics. 2022. Vol. 15, N 1. P. 19–32. EDN QLLODA. <https://doi.org/10.59887/fpg/u1df-m1x7-1bxg>
9. *Klahn M., Madsen P.A., Fuhrman D.R.* Simulation of three-dimensional nonlinear water waves using a pseudospectral volumetric method with an artificial boundary condition // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2021. Vol. 93. P. 1843–1870. EDN NKGOF. <https://doi.org/10.1002/fld.4956>
10. *Чаликов Д.В.* Численное моделирование трехмерных потенциальных волн // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2014. Т. 7, № 1. С. 7–31. URL: <https://hydrophysics.spbrc.ru/jour/article/view/996> (дата обращения: 18.03.2025). EDN SCDDL.R.
11. *Ducrozet G., Bonnefoy F., Touzé D. Le, Ferrant P.* HOS-ocean: Open-source solver for nonlinear waves in open ocean based on High-Order Spectral method // Computer Physics Communications. 2016. Vol. 203. P. 245–254. EDN CFQDZO. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2016.02.017>
12. *Xiao W., Liu Y., Wu G., Yue D.K.P.* Rogue wave occurrence and dynamics by direct simulations of nonlinear wave-field evolution // Journal of Fluid Mechanics. 2013. Vol. 720. P. 357–392. EDN RGYKQB. <https://doi.org/10.1017/jfm.2013.37>
13. *Seiffert B.R., Ducrozet G., Bonnefoy F.* Simulation of breaking waves using the High-Order Spectral method with laboratory experiments: Wave-breaking onset // Ocean Modelling. 2017. Vol. 119. P. 94–104. EDN VDWLCD. <https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2017.09.006>
14. *Slunyaev A., Kokorina A.* Account of occasional wave breaking in numerical simulations of irregular water waves in the focus of the rogue wave problem // Water Waves. 2019. Vol. 2. P. 243–262. <https://doi.org/10.1007/s42286-019-00014-9>
15. *Canard M., Ducrozet G., Bouscasse B.* Experimental reproduction of an extreme sea state in two wave tanks at various generation scales / OCEANS2022. Chennai, Chennai, India. 2022. P. 1–6. EDN WAJXLE. <https://doi.org/10.1109/OCEANSChennai45887.2022.9775216>
16. *Touboul J., Kharif C.* Nonlinear evolution of the modulational instability under weak forcing and damping // Natural Hazards and Earth System Sciences. 2010. Vol. 10. P. 2589–2597. EDN OLRKFR. <https://doi.org/10.5194/nhess-10-2589-2010>
17. *Fujimoto W., Waseda T., Webb A.* Impact of the four-wave quasi-resonance on freak wave shapes in the ocean // Ocean Dynamics. 2019. Vol. 69. P. 101–121. EDN WZHDWX. <https://doi.org/10.1007/s10236-018-1234-9>
18. *Слоняев А.В.* Вклады компонент волн на поверхности глубокой воды в распределения вероятностей аномально высоких волн по результатам прямого численного моделирования уравнений Эйлера // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2023. Т. 59. С. 793–814. EDN ORXADF. <https://doi.org/10.31857/S000235152306010X>
19. *Слоняев А.В., Пелиновский Д.Е., Пелиновский Е.Н.* Морские волны-убийцы: наблюдения, физика и математика// Успехи физических наук. 2023. Т. 193. С. 155–181. EDN AUNDMZ. <https://doi.org/10.3367/UFNr.2021.08.039038>
20. *Fenton J.D.* Numerical Methods for Nonlinear Waves // Advances in Coastal and Ocean Engineering/ Edited by: Philip L-F Liu. Vol. 5. Cornell University, USA, 1999. P. 241–324. <https://doi.org/10.1142/4086>
21. *Чаликов Д.В., Булгаков К.Ю.* Волны Стокса на конечной глубине // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2014. Т. 7, № 4. С. 3–15. URL: <https://hydrophysics.spbrc.ru/jour/article/view/964> (дата обращения: 18.03.2025). EDN TAQWMZ.
22. *Clamond D.* Cnoidal-type surface waves in deep water // Journal of Fluid Mechanics. 2003. Vol. 489. P. 101–120. EDN XOOJAT. <https://doi.org/10.1017/S0022112003005111>
23. *Lukomsky V.P., Gandzha I.S.* Fractional Fourier approximations for potential gravity waves on deep water // Nonlinear Processes in Geophysics. 2003. Vol. 10. P. 599–614. EDN XJRVHH. <https://doi.org/10.5194/npg-10-599-2003>

24. Chang H.K., Liou J.-C. Fixed-frequency Stokes wave expansion // Ocean Engineering. 2006. Vol. 33. P. 417–424. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2005.04.020>
25. Rainey R.C.T., Longuet-Higgins M.S. A close one-term approximation to the highest Stokes wave on deep water // Ocean Engineering. 2006. Vol. 33. P. 2012–2024. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2005.09.014>
26. Dyachenko S.A., Lushnikov P.M., Korotkevich A.O. The complex singularity of a Stokes wave // JETP Letters. 2013. Vol. 98. P. 767–771. EDN RVWHMF.
27. Dyachenko S.A., Lushnikov P.M., Korotkevich A.O. Branch cuts of Stokes wave on deep water. Part I: Numerical solution and Padé approximation // Studies in Applied Mathematics. 2016. Vol. 137. P. 419–472. EDN UWYDAA. <https://doi.org/10.1111/sapm.12128>
28. Shin J.R. A Fourier series approximation for deep-water waves // Journal of Ocean Engineering and Technology. 2022. Vol. 36. P. 101–107. EDN VBBIXL. <https://doi.org/10.26748/ksoe.2021.092>
29. Roenby J. FentonWave — A stream function wave boundary condition for OpenFOAM. 2012. <https://github.com/roenby/fentonWave/tree/master>
30. Fenton J.D. Nonlinear wave theories // The Sea. 1990. Vol. 9. P. 3–25.
31. Le Méhauté B. An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves. Springer Science & Business Media. 1976.
32. Zhao K., Wang Y., Liu P.L.-F. A guide for selecting periodic water wave theories — Le Méhauté (1976)'s graph revisited // Coastal Engineering. 2024. Vol. 188. P. 104432. EDN IUFJOI. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2023.104432>
33. Watson K.M., West B.J. A transport-equation description of nonlinear ocean surface wave interactions // Journal of Fluid Mechanics. 1975. Vol. 70. P. 815–826. <https://doi.org/10.1017/S0022112075002364>
34. Fenton J.D., Riemecker M.M. A Fourier method for solving nonlinear water-wave problems: application to solitary-wave interactions // Journal of Fluid Mechanics. 1982. Vol. 118. P. 411–443. <https://doi.org/10.1017/S0022112082001141>
35. Bateman W.J.D., Swan C., Taylor P.H. On the calculation of the water particle kinematics arising in a directionally spread wavefield // Journal of Computational Physics. 2003. Vol. 186. P. 70–92. EDN MTSQRH. [https://doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00012-3](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00012-3)
36. Ducrozet G. Modélisation des processus non-linéaires de génération et de propagation d'états de mer par une approche spectral. Thèse de Doctorat. 2007. (In French).

## References

1. Tanaka M. A method of studying nonlinear random field of surface gravity waves by direct numerical simulation. *Fluid Dynamics Research*. 2001;28:41–60. [https://doi.org/10.1016/S0169-5983\(00\)00011-3](https://doi.org/10.1016/S0169-5983(00)00011-3)
2. Tanaka M. Verification of Hasselmann's energy transfer among surface gravity waves by direct numerical simulations of primitive equations. *Journal of Fluid Mechanics*. 2001;444:199–221. <https://doi.org/10.1017/S0022112001005389>
3. Dommermuth D, Yue DKP. A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*. 1987;184:267–288. <https://doi.org/10.1017/S002211208700288X>
4. West BJ, Brueckner KA, Janda RS, Milder DM, Milton RL. A new numerical method for surface hydrodynamics. *Journal of Geophysical Research*. 1987;92:11803–11824. <https://doi.org/10.1029/JC092iC11p11803>
5. Onorato M, Osborne AR, Serio M. On the relation between two numerical methods for the computation of random surface gravity waves. *European Journal of Mechanics — B/Fluids*. 2007;26:43–48. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2006.05.001>
6. Zakharov V. Stability of periodic waves of finite amplitude on a surface of deep fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1968;2:190–194. <https://doi.org/10.1007/bf00913182>
7. Chalikov D. *Numerical modeling of sea waves*. Springer; 2016. 330 p. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-32916-1> (date of access: 18.03.2025).
8. Chalikov DV. Different approaches to numerical modeling of sea waves. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2022;15(1):19–32. <https://doi.org/10.59887/fpg/u1df-m1x7-1bxg>
9. Klahn M, Madsen PA, Fuhrman DR. Simulation of three-dimensional nonlinear water waves using a pseudospectral volumetric method with an artificial boundary condition. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2021;93:1843–1870. <https://doi.org/10.1002/fld.4956>
10. Chalikov DV. Numerical modeling of three-dimensional potential waves. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2014;7(1):7–31. (In Russ.). URL: <https://hydrophysics.spbrc.ru/jour/article/view/996> (date of access: 18.03.2025).
11. Ducrozet G, Bonnefoy F, Le Touzé D, Ferrant P. HOS-ocean: Open-source solver for nonlinear waves in open ocean based on High-Order Spectral method. *Computer Physics Communications*. 2016;203:245–254. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2016.02.017>
12. Xiao W, Liu Y, Wu G, Yue DKP. Rogue wave occurrence and dynamics by direct simulations of nonlinear wave-field evolution. *Journal of Fluid Mechanics*. 2013;720:357–392. <https://doi.org/10.1017/jfm.2013.37>

13. Seiffert BR, Ducrozet G, Bonnefoy F. Simulation of breaking waves using the High-Order Spectral method with laboratory experiments: Wave-breaking onset. *Ocean Modelling*. 2017;119:94–104. <https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2017.09.006>
14. Slunyaev A, Kokorina A. Account of occasional wave breaking in numerical simulations of irregular water waves in the focus of the rogue wave problem. *Water Waves*. 2019;2:243–262. <https://doi.org/10.1007/s42286-019-00014-9>
15. Canard M, Ducrozet G, Bouscasse B. Experimental reproduction of an extreme sea state in two wave tanks at various generation scales. In: *OCEANS2022*. Chennai, India; 2022. p. 1–6. <https://doi.org/10.1109/OCEANSChennai45887.2022.9775216>
16. Touboul J, Kharif C. Nonlinear evolution of the modulational instability under weak forcing and damping. *Natural Hazards and Earth System Sciences*. 2010;10:2589–2597. <https://doi.org/10.5194/nhess-10-2589-2010>
17. Fujimoto W, Waseda T, Webb A. Impact of the four-wave quasi-resonance on freak wave shapes in the ocean. *Ocean Dynamics*. 2019;69:101–121. <https://doi.org/10.1007/s10236-018-1234-9>
18. Slunyaev AV. Contributions of nonlinear spectral components to the probability distribution of rogue waves based on the results of numerical simulation of the Euler equations. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2023;59:701–721. <https://doi.org/10.1134/S0001433823060105>
19. Slunyaev AV, Pelinovsky DE, Pelinovsky EN. Rogue waves in the sea: observations, physics, and mathematics. *Physics-Uspokhi*. 2023;66:148–172. <https://doi.org/10.3367/UFNe.2021.08.039038>
20. Fenton JD. Numerical Methods for Nonlinear Waves. In: *Advances in Coastal and Ocean Engineering*. Cornell University, USA. 1999;5:241–324. <https://doi.org/10.1142/4086>
21. Chalikov DV, Bulgakov KY. Stokes Waves at Finite Depth. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2014;7(4):3–15 (In Russ). URL: <https://hydrophysics.spbrc.ru/jour/article/view/964> (date of access: 18.03.2025)
22. Clamond D. Cnoidal-type surface waves in deep water. *Journal of Fluid Mechanics*. 2003;489:101–120. <https://doi.org/10.1017/S0022112003005111>
23. Lukomsky VP, Gandzha IS. Fractional Fourier approximations for potential gravity waves on deep water. *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2003;10:599–614. <https://doi.org/10.5194/npg-10-599-2003>
24. Chang HK, Liou J-C. Fixed-frequency Stokes wave expansion. *Ocean Engineering*. 2006;33:417–424. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2005.04.020>
25. Rainey RCT, Longuet-Higgins MS. A close one-term approximation to the highest Stokes wave on deep water. *Ocean Engineering*. 2006;33:2012–2024. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2005.09.014>
26. Dyachenko SA, Lushnikov PM, Korotkevich AO. The complex singularity of a Stokes wave. *JETP Letters*. 2013;98:767–771.
27. Dyachenko SA, Lushnikov PM, Korotkevich AO. Branch cuts of Stokes wave on deep water. Part I: Numerical solution and Padé approximation. *Studies in Applied Mathematics*. 2016;137:419–472. <https://doi.org/10.1111/sapm.12128>
28. Shin JR. A Fourier series approximation for deep-water waves. *Journal of Ocean Engineering and Technology*. 2022;36:101–107. <https://doi.org/10.26748/ksoe.2021.092>
29. Roenby J. FentonWave — A stream function wave boundary condition for OpenFOAM [Computer software]. 2012. URL: <https://github.com/roenby/fentonWave/tree/master> (date of access: 01.07.2025)
30. Fenton JD. Nonlinear wave theories. In: *The Sea*. 1990;9:3–25.
31. Le Méhauté B. *An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves*. Springer Science & Business Media; 1976.
32. Zhao K, Wang Y, Liu PL-F. A guide for selecting periodic water wave theories — Le Méhauté (1976)’s graph revisited. *Coastal Engineering*. 2024;188:104432. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2023.104432>
33. Watson KM, West BJ. A transport-equation description of nonlinear ocean surface wave interactions. *Journal of Fluid Mechanics*. 1975;70:815–826. <https://doi.org/10.1017/S0022112075002364>
34. Fenton JD, Rienerker MM. A Fourier method for solving nonlinear water-wave problems: application to solitary-wave interactions. *Journal of Fluid Mechanics*. 1982;118:411–443. <https://doi.org/10.1017/S0022112082001141>
35. Bateman WJD, Swan C, Taylor PH. On the calculation of the water particle kinematics arising in a directionally spread wavefield. *Journal of Computational Physics*. 2003;186:70–92. [https://doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00012-3](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00012-3)
36. Ducrozet G. Modélisation des processus non-linéaires de génération et de propagation d’états de mer par une approche spectral. (In French). 2007.

## Об авторе

СЛЮНЯЕВ Алексей Викторович, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий сектором, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грекова Российской академии наук», ORCID: ID0000-0001-7782-2991, WoS ResearcherID: A-3272-2014, Scopus Author ID: 55957049100, SPIN-код (РИНЦ): 2982-4096, e-mail: slunyaev@ipfran.ru