



DOI 10.59887/2073-6673.2025.18(2)-5
EDN INTJZN

УДК 532.31

© Г. Е. Хазанов^{1*}, С. А. Ермаков^{1,2}, 2025

¹Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН, 603950, г. Н. Новгород, ул. Ульянова, д. 46

²Волжский государственный университет водного транспорта, 603950, г. Н. Новгород, ул. Нестерова, 5а

*g.khazanov@ipfran.ru

Численное моделирование динамики плавучей полиэтиленовой пленки в поле поверхностных волн

Статья поступила в редакцию 15.10.2024, после доработки 13.03.2025, принята в печать 17.04.2025

Аннотация

Развитие физических основ дистанционной диагностики областей пластикового загрязнения водоемов приобрело в настоящее время высокую актуальность в связи с ростом антропогенного загрязнения Мирового океана. Значительный вклад в такое загрязнение связан с полиэтиленовыми (ПЭ-) пленками, которые приводят к изменчивости сигнала радиолокационного рассеяния при зондировании морской поверхности, что может быть использовано для диагностики пластикового мусора. ПЭ-пленки при этом часто находятся в приповерхностных слоях воды, а не плавают на поверхности, несмотря на то, что их плотность обычно меньше, чем плотность воды. В работе проведено численное моделирование динамики плавучей ПЭ-пленки в поле поверхностных волн. В качестве инструмента численного моделирования использовалось программное обеспечение с открытым исходным кодом «OpenFOAM». Обнаружено, что всплывающая в отсутствие волн пленка может притапливаться, всплывать или находиться в равновесии на определенной глубине при наличии волн. Обнаруженный эффект указывает на возникновение дополнительной средней силы в осциллирующем поле волн, которая направлена против сил плавучести и зависит от крутизны волны и глубины начального расположения пленки.

Ключевые слова: пластиковый мусор, полиэтиленовые пленки, ГKB

© G. E. Khazanov^{1*}, S. A. Ermakov^{1,2}, 2025

¹A.V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the RAS, 46 Ulyanov Str., Nizhny Novgorod, 603950, Russia

²Volga State University of Water Transport, 5a Nesterov Str., Nizhny Novgorod, 603950, Россия

*g.khazanov@ipfran.ru

Numerical Modeling of a Floating Polyethylene Film Dynamics in the Field of Surface Waves

Received 15.10.2024, Revised 13.03.2025, Accepted 17.04.2025

Abstract

The development of the physical foundations of remote diagnostics of areas of plastic pollution of reservoirs has now become highly relevant due to the increase in anthropogenic pollution of the World Ocean. The pollution is largely related to the polyethylene (PE) films, which can affect to variability of the radar scattering signal when probing the sea surface, which can be used to diagnose plastic areas. PE films are often located in the near-surface layers of water, rather than floating on the surface, despite the fact that their density is usually less than the density of water. This paper presents a numerical study of the dynamics of a small floating PE film in the field of surface waves. The open source software “OpenFOAM” was used as a numerical modeling tool.

Ссылка для цитирования: Хазанов Г.Е., Ермаков С.А. Численное моделирование динамики плавучей полиэтиленовой пленки в поле поверхностных волн // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2025. Т. 18, № 2. С. 68–82. [https://doi.org/10.59887/2073-6673.2025.18\(2\)-5](https://doi.org/10.59887/2073-6673.2025.18(2)-5) EDN INTJZN

For citation: Khazanov G.E., Ermakov S.A. Numerical Modeling of a Floating Polyethylene Film Dynamics in the Field of Surface Waves. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2025;18(2):68–82. [https://doi.org/10.59887/2073-6673.2025.18\(2\)-5](https://doi.org/10.59887/2073-6673.2025.18(2)-5)

It was found that the film floats in the absence of waves, but if there are any surface waves, it can sink, float, or be in the equilibrium at some depth. The detected effect indicates the occurrence of an additional force in a fast oscillating wave field, which is directed against buoyancy forces and depends on the steepness of the wave and the depth of the initial film location.

Keywords: plastic garbage, polyethylene film, Gravity-capillary waves, OpenFOAM

1. Введение

Проблема пластикового загрязнения водоемов приобрела крайне актуальный характер в связи с ростом антропогенного загрязнения Мирового океана [1–4]. Большое количество работ посвящено изучению распространению пластикового мусора (ПМ) в Мировом океане, его влиянию на окружающую среду и живые организмы [5, 6], распределению пластика по глубине, размерам, плотностям и пр. [7]. Одним из важнейших направлений в контексте проблемы ПМ является исследование возможностей использования аэрокосмических средств наблюдений океана для обнаружения и диагностики ПМ (см., например, [8, 9] и цитированную литературу). При этом большая часть исследований относилась к микропластику — частицам ПМ с размерами порядка единиц мм и менее. В качестве одного из основных физических эффектов, лежащих в основе диагностики микропластика, рассматриваются био пленки, связанные с микроводорослями, заселяющими частицы ПМ. Эти био пленки, поступая на поверхность, приводят к подавлению гравитационно-капиллярных волн и формированию сликов на морской поверхности, которые могут обнаруживаться, в частности, спутниковыми радиолокаторами с синтезированной апертурой [10–12]. Если же рассматривать возможности микроволнового зондирования макро ПМ (полиэтиленовые (ПЭ) пакеты, куски ПЭ-пленки, пищевые пластиковые контейнеры и пр.), то здесь важным является рассеяние электромагнитных волн непосредственно на пластиковых фрагментах, плавающих на поверхности воды, а также на мелкомасштабных ветровых волнах, на характеристики которых могут оказывать влияние эти фрагменты [13, 14]. Однако пластиковые объекты, даже те, плотность которых меньше плотности воды, оказываются часто плавающими не на поверхности, а в верхних слоях воды¹.

Возможные механизмы распределения частиц ПМ по глубине в приповерхностном слое воды могут быть связаны с турбулентностью, возникающей при ветровом перемешивании [15], обрушениях волн [16], вертикальными нисходящими течениями в конвергентных зонах циркуляций Ленгмюра [17], либо с заселением фрагментов ПМ микроводорослями — обрастателями ПМ [18]. Однако в целом, эффекты переноса фрагментов ПМ в приповерхностные слои воды исследованы пока недостаточно.

В данной работе предпринята попытка углубить понимание физических механизмов, определяющих динамику пластиковых фрагментов с положительной плавучестью в приповерхностном слое. Рассмотрен новый, не описанный ранее в литературе, эффект «притапливания» фрагментов плавучего ПМ под действием не обрушающихся поверхностных волн. Данный эффект выявлен на основе численного моделирования динамики фрагмента плавучей пленки в поле поверхностных волн. В качестве инструмента численного моделирования использовалось программное обеспечение с открытым исходным кодом «OpenFOAM», который, помимо инструментария для широкого класса задач вычислительной гидро и аэродинамики, позволяет детально контролировать весь процесс моделирования, включая построение сетки и выбор схем аппроксимации.

Моделирование динамики твердых конструкций, находящихся в жидкости, является важной задачей и описывается сложными взаимодействиями между деформируемой твердой структурой с внешним или внутренним потоком жидкости. Поток жидкости оказывает воздействие на смоченную твердую поверхность, вызывая движение тела в потоке и, вообще говоря, деформацию поверхности тела, при этом изменяется и поле скоростей самого потока. Задачи обтекания тел гидродинамическими потоками, в общем, весьма сложны, поэтому большое количество работ было посвящено разработке и апробации численных методик для решения подобных проблем, в частности, в среде «OpenFOAM» [19–21]. Значительное число модельных экспериментов по взаимодействию жидкой среды с твердыми, деформируемыми структурами, в том числе при наличии границы раздела «вода-воздух», показали хорошие результаты и доказали пригодность данного пакета для решения широкого класса подобных задач [19–21]. Математические модели позволяют управлять механическим поведением жидкости, разрешая отдельно уравнения в разных областях: жидкости и твердом теле. Сшивка достигается путем применения соответствующих граничных условий на границе раздела жидкости и твердого тела.

¹ <https://www.gettyimages.com/detail/news-photo/the-controversial-whale-shark-scene-of-oslob-more-and-more-news-photo/687133998?adppopup=true>

В настоящей работе рассматривается взаимодействие несжимаемой ньютоновской жидкости и упругого твердого тела с использованием дискретизации методом конечных объемов и «раздельного» подхода с последовательным вычислением в жидкой и твердотельной областях. Данный подход использован для моделирования влияния гравитационно-капиллярных волн (ГКВ) на движение плавучей ПЭ-пленки, расположенной в приповерхностном слое воды. В ходе моделирования впервые выявлен эффект притапливания плавучей ПЭ пленки и описаны особенности поведения пленки, а именно режимов ее всплытия, либо погружения в зависимости от характеристик поверхностных волн.

2. Основные уравнения и методика численных экспериментов

Для численного моделирования использовался пакет «OpenFOAM». Одно из главных преимуществ данного пакета для научных целей — наличие открытого исходного кода. Для задач взаимодействия жидкости и твердых тел, в том числе с различной упругостью, существует набор инструментов «solids4foam» [21, 22].

Для численного моделирования подобных процессов авторами в разное время применялись различные подходы. Общей проблемой для всех подходов являлось различие в системах координат, в которых принято описывать динамику в разных средах: уравнения механики твердого тела написаны в системе переменных Лагранжа, в то время как уравнения динамики жидкости традиционно записываются в фиксированной Эйлеровой системе. В данной работе используется так называемый подход Эйлера–Лагранжа (Arbitrary Lagrangian Eulerian), далее «ALE» [23], который позволяет топологии сетки либо оставаться фиксированной, либо перемещаться вместе с материальными Лагранжевыми частицами. Не останавливаясь на сравнении разных подходов, отметим лишь, что методика «ALE» демонстрирует хорошие результаты, особенно для поддержания высокого качества сетки вблизи границы раздела, что приводит к более точным вычислениям динамики жидкости в этой области [24]. Уравнения твердого тела решаются с помощью Лагранжева подхода, в то время как движение частиц жидкости рассматривается с помощью подхода Эйлера на «движущейся сетке». Отметим также, что данный пакет использует подход разделения вычислительного домена на две области: жидкость и твердое тело, с последовательным вычислением их динамики в отдельности, учитывая взаимодействие между ними посредством выполнения граничных условий.

3. Основные уравнения

Жидкость описывается как несжимаемая и ньютоновская. Решается двумерная задача в плоскости XZ, где ось OX направлена вдоль распространения волны, ось OZ направлена вертикально вверх. Основные уравнения гидродинамики — уравнение непрерывности и уравнение Навье–Стокса записываются в виде:

$$\nabla \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_m) * \nabla) \mathbf{v} = \nu \nabla \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g}, \quad (2)$$

где ρ — плотность жидкости, $\mathbf{v}$ — вектор скорости, p — давление, $\mathbf{g} = (0, -g_z)$ здесь g_z — ускорение свободного падения, ν — кинематическая вязкость, $\mathbf{v}_m$ — скорость системы отсчета (скорость сетки в методе «ALE»), которая требуется для деформации сетки жидкости с целью учета структурной деформации твердого тела.

Дополнительным ограничением для подхода «ALE» является то, что скорость сетки должна удовлетворять геометрическому закону сохранения [25].

$$\frac{\partial V^{ce}}{\partial t} + \nabla * \mathbf{v}_m = 0. \quad (3)$$

Здесь, V^{ce} — безразмерный контрольный объем (объем ячейки). Данное условие требует, чтобы изменение объема каждого контрольного элемента между двумя соседними временными шагами было равно объему, на который сместилась граница ячейки в течение временного шага.

Для отслеживания высоты свободной поверхности использовался метод конечных объемов («VOF») [26]. Две несмешивающиеся жидкостные фазы (воздух и вода) рассматриваются как одна эффективная жидкость, которая моделируется одновременно во всей расчетной области, при этом функция α определяет долю конкретной жидкости, которая существует в каждой ячейке, и служит идентификатором местоположения границы раздела вода-воздух. Уравнение для объемной доли α имеет вид:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla * (\alpha \mathbf{v}) = 0, \quad (4)$$

где α — объемная доля воды в ячейке, изменяющаяся от 0 до 1 (ячейка полностью заполнена водой или воздухом соответственно). Значение 0,5 приблизительно соответствует границе раздела вода-воздух. Локальная плотность и вязкость совокупной жидкости в каждой ячейке определяется как: $\rho = \alpha \rho_{water} + (1 - \alpha) \rho_{air}$, $\mu = \alpha \mu_{water} + (1 - \alpha) \mu_{air}$.

Для моделирования поверхностной волны использовалась волна Стокса второго порядка («Stokes II») с помощью модуля «waves2foam» [27, 28]. Движение свободной поверхности в рамках этой модели описывается как:

$$\eta(x, t) = \frac{a}{2} \cos(kx - \omega t) + k \frac{a}{2} a_2 \cos(2(kx - \omega t)). \quad (5)$$

Здесь: k — волновое число, ω — частота волны, a — амплитуда волны. Величина a_2 определяется как:

$$a_2 = \frac{a \cosh(kH)}{8 \sinh^3(kH)} (2 + \cosh(2kH)). \quad (6)$$

Здесь: H — глубина жидкости. Дисперсионное соотношение определяется как:

$$\omega^2 = kg * \tanh(kH) * \{1 + o(ka)^2\}. \quad (7)$$

Второе слагаемое в формуле 5 определяет вторую гармонику поверхностной волны и имеет порядок величины ka . Отметим, что при малых значениях крутизны волн (см. ниже), которые использовались в данной задаче, вторая гармоника вносит поправку около 3 % и, вообще говоря, может не учитываться. При этом, теоретический профиль скорости должен экспоненциально спадать с глубиной как: $v(z) \approx U_0 \exp(kz)$, где U_0 — орбитальная скорость в волне на поверхности воды. Сравнение профиля орбитальной скорости при численном расчете с теоретически ожидаемым приведено на рис. 1.

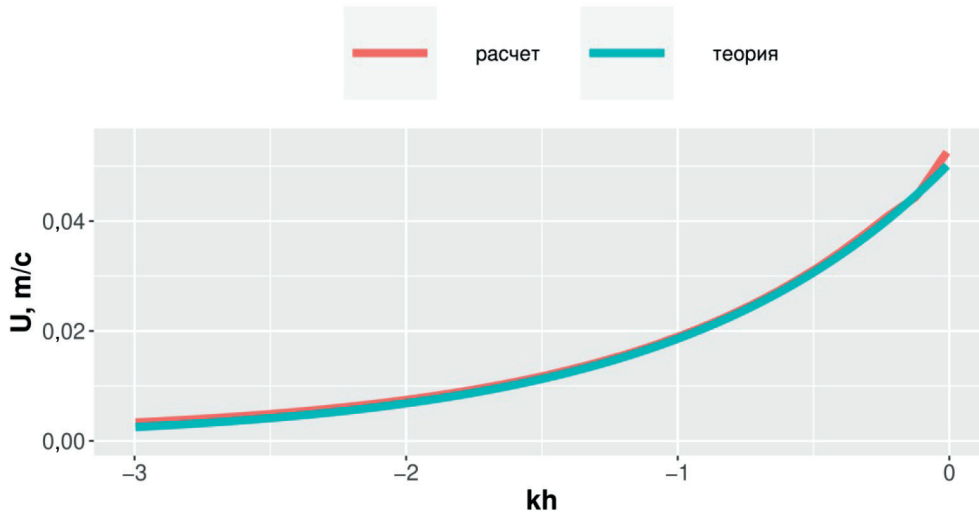


Рис. 1. Сравнение теоретического (синяя линия) и расчетного (красная линия) профилей орбитальной скорости в зависимости от безразмерной глубины

Fig. 1. Theoretical (blue line) and numerical (red line) orbital velocity profile vs the dimensionless depth

Хорошее совпадение теоретического и расчетного профиля скорости указывает на высокое качество волновой модели и надежность численных схем, а также дает возможность интерпретировать результаты с учетом изменяющейся с глубиной орбитальной скорости.

Твердая структура — ПЭ пленка описывается как упругая и уравнение, определяющее её деформацию, — закон сохранения импульса в системе переменных Лагранжа для вектора деформации $\mathbf{u}$ имеет вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \sigma + \rho \mathbf{g}. \quad (8)$$

Здесь, ρ — плотность тела, $\mathbf{u}$ — вектор деформации, $\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши. В данном случае мы имеем дело с достаточно большими и произвольными деформациями тела. То есть, в ходе симуляции изменения объема, площади или ориентации элементарного контрольного объема не малы, в связи с чем, упрощенная линейная модель не может быть применена. Таким образом, мы приходим к нелинейной модели — методу конечных деформаций. В таком случае материал определяется путем задания тензора напряжений Коши:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F}^* \boldsymbol{\Sigma}^* \mathbf{F}^T, \quad (9)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + (\nabla_0 \mathbf{u})^T. \quad (10)$$

$\mathbf{F}$ — тензор деформации, представляющий собой разницу между исходным и деформированным состоянием материала [29], $J = \det[\mathbf{F}]$ — якобиан, $\mathbf{I}$ — единичный тензор, $\boldsymbol{\Sigma}$ — второй тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа, который для учета конечных деформаций, для материала Сен-Венана-Кирхгофа имеет вид:

$$\boldsymbol{\Sigma} = 2\mu^s \mathbf{E} + \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I}, \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} [2\mu^s \mathbf{E} + \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I}] \mathbf{F}^T, \quad (12)$$

μ^s и λ — коэффициенты Ламе, $\mathbf{E}$ — тензор напряжений Грина–Лагранжа:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}). \quad (13)$$

Коэффициенты Ламе пересчитываются в коэффициент Пуассона μ и модуль Юнга E , которые и определяют упругие свойства материала в данной задаче.

4. Граничные условия

Кинематическое граничное условие — скорость должна быть непрерывной на границе раздела жидкости и твердого тела. Из уравнения сохранения импульса следует динамическое граничное условие, отвечающее равенству сил вдоль нормали к границе раздела. Их можно записать в следующем виде: (здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к границе раздела, i — пробегает по всем граням границы раздела тело-вода).

$$\mathbf{v}_{fluid}^i = \mathbf{v}_{solid}^i, \quad (14)$$

$$\mathbf{n}^i \boldsymbol{\sigma}_{fluid}^i = \mathbf{n}^i \boldsymbol{\sigma}_{solid}^i. \quad (15)$$

Дно «бассейна» и правая граница вычислительного домена полагались твердыми стенками, на которых задавалось условие прилипания (индекс f_b обозначает нижнюю, f_r — правую, f_a — верхнюю и f_l — левую границы вычислительного домена):

$$v_{f_{b,r}} = 0. \quad (16)$$

При этом, вблизи правой границы домена, на расстоянии порядка одной длины волны перед ней, накладывалось условие поглощения поверхностных волн для предотвращения отражения. Подробнее о методике генерации и поглощения волн см. например [27, 28].

На верхней границе в воздухе давление принималось равным атмосферному.

$$p_{f_a} = p_0. \quad (17)$$

Здесь p_0 — атмосферное давление.

В области размером порядка одной длины волны у левой границы домена задавалась поверхностная волна. На самой левой границе обеспечивалось граничное условие, согласно которому скорость на этой границе принималась равной скорости в волне. Пренебрегая второй гармоникой, это условие можно записать в виде:

$$v_{f_l}(z) \approx U_0 \exp(kz). \quad (18)$$

Здесь U_0 — скорость на поверхности воды, которая рассчитывалась исходя из уравнений (6–8) путем задания периода и амплитуды волны.

Объединений решений в областях жидкости и тела достигается алгоритмом Дирихле-Неймана [30], который предполагает применение условия Дирихле в области жидкости для определения скорости на границе раздела двух областей и использование условия Неймана для определения силы сцепления на границе раздела в твердой области — уравнения (14), (15). В итоге, алгоритм вычисления выглядит следующим образом: вычисление в области жидкости определяет силу на границе раздела и передает информацию «решателю» твердого тела, который, в свою очередь, передает смещения на границе раздела «решателю» сетки жидкости. После этого сетка в жидкой области двигается и обновляется, это происходит каждый раз снова на каждом временном шаге. В то время как сетка в области жидкости изменяется со временем из-за деформации границы раздела жидкость — твердое тело, сетка в области твердого тела всегда находится в своей начальной конфигурации ввиду использования Лагранжевого подхода. Деформация сетки жидкости выполняется с использованием уравнения Лапласа движения сетки с переменной диффузией [31].

5. Геометрическая схема эксперимента

В работе представлены результаты численного моделирования распространения гравитационно-капиллярных волн (ГКВ), в присутствии небольшого куса плавучей полиэтиленовой пленки в приповерхностном слое воды. Рассматривалась плоская задача, бегущая волна распространялась слева направо вдоль оси x , как показано на рис. 1. Для моделирования был построен вычислительный домен, размеры которого составляли 60 см вдоль оси X , 15 см по вертикали вдоль оси Z и 1 м вдоль оси Y . Длина волны варьировалась от 6–15 см, крутизна волны варьировалась от $ka = 0,09–0,22$. Вязкость воды $0,01 \text{ см}^2/\text{с}$. Длина имитатора 3 см, толщина 0,2 мм, коэффициент Пуассона — 0,3, упругость имитатора варьировалась в пределах: $2 \cdot 10^6–5 \cdot 10^7 \text{ Па}$. Плотность имитатора составляла $0,9 \text{ г/м}^3$. На рис. 2 представлена геометрическая схема численного эксперимента.

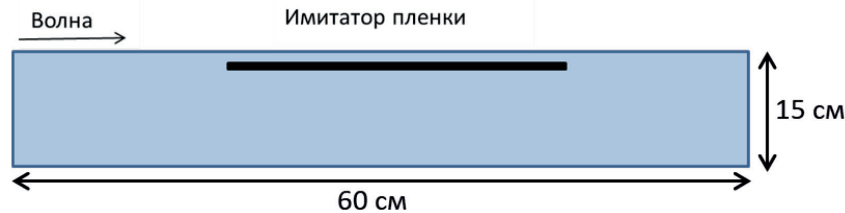


Рис. 2. Геометрическая схема численного эксперимента

Fig. 2. Geometric scheme of a numerical experiment

Вычислительное пространство делится на конечное число выпуклых многогранных контрольных объемов или ячеек, ограниченных выпуклыми многоугольниками. Ячейки не перекрываются и полностью заполняют пространственную область. Для пространственной и временной дискретизации уравнений используются разностные схемы второго порядка. Количество ячеек в разных симуляциях варьировалось от 20000 до 30000 в различных реализациях. Конкретные значения всякий раз устанавливались при анализе сходимости, который не показывал значимых изменений физических величин при дальнейшем измельчении сетки. Наибольшая плотность ячеек достигается вблизи тела, где разрешение сетки достигало $dx = 0,03 \text{ см}$, $dz = 0,004 \text{ см}$. Временной шаг в начальный момент времени составлял $dt = 0,00001 \text{ с}$ и менялся по ходу симуляции, основываясь на условии максимального числа Куранта $Co = 0,5$, с дополнительным ограничением на максимальный временной шаг $dt < 0,0001 \text{ с}$, для достижения стабильности численных схем. Пример вычислительной сетки вблизи тела представлен на рис. 3.

На рис. 3 можно видеть пример того, как сетка в области жидкости подстраивается под смещения тела, которые в свою очередь обусловлены действующей на него силой со стороны жидкости. Таким образом, несмотря на достаточно большие смещения, сетка остается достаточно качественной с точки зрения основных характеристик: скошенность, ортогональность и т. д. Это позволяет достаточно точно вычислять динамические характеристики в жидкости и теле по ходу симуляции, в том числе вблизи границы раздела вода — твердое тело.

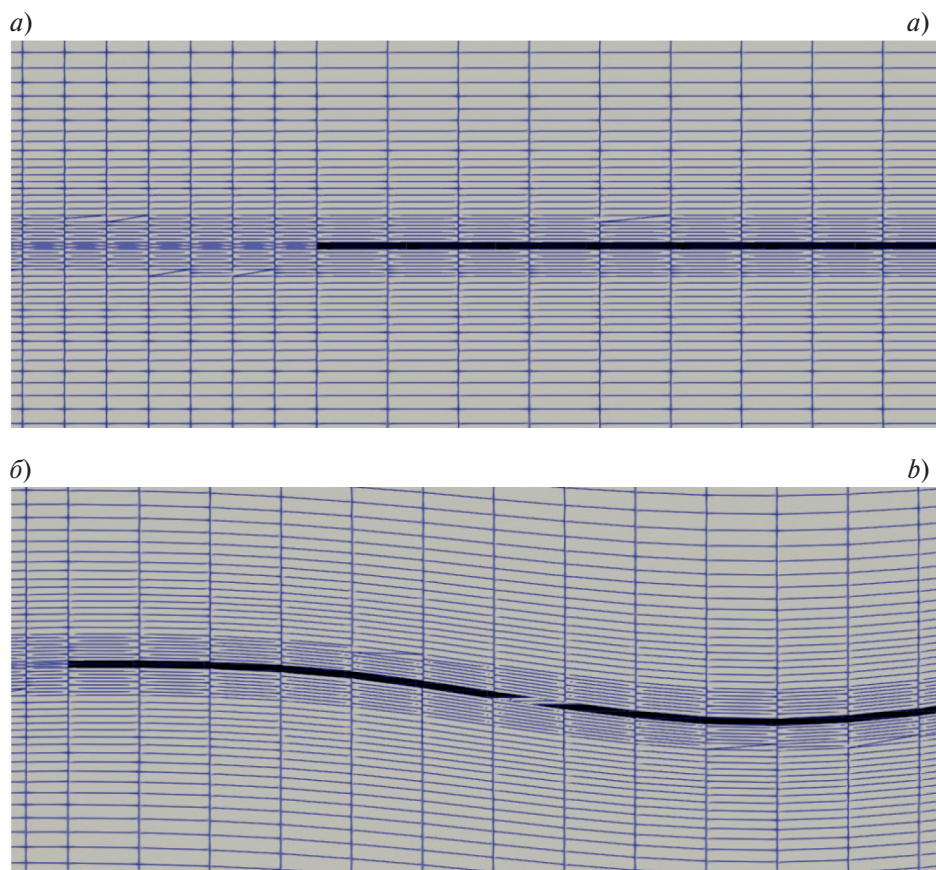


Рис. 3. *a* — пример вычислительной сетки вблизи части пленки в начальный момент времени; *б* — пример деформированной вычислительной сетки вблизи части пленки спустя 0,5 с. Черная линия обозначает пленку

Fig. 3. *a* — an example of a computational grid near a part of the film at the initial moment; *b* — an example of a deformed computational grid near a part of the film after 0.5 s. The black line indicates the film

6. Результаты численного моделирования и их обсуждение

Проведена серия симуляций динамики небольшой плавучей пленки, размер которой много меньше длины волны и которая в начальный момент времени находится под водой, при различных параметрах поверхностных волн. В ходе симуляций варьировалась глубина погружения пленки — h и крутизна волны — κ . Вначале был рассмотрен простой случай, когда отсутствуют поток над поверхностью воды и волны на поверхности воды, а пленка размещена на некоторой глубине в толще воды. В таком случае, пленка, плотность которой чуть меньше плотности воды, медленно всплывала. На рис. 4 можно видеть начальную стадию всплытия плавучей пленки, которая сразу начинает движение вверх и достаточно быстро приобретает близкую к постоянной скорость всплытия. В дальнейшем, частоты поверхностных волн выбирались таким образом, чтобы периоды волн — T , были много меньше характерного времени всплытия.

С методической целью был также проведен аналогичный эксперимент со спокойной поверхностью воды и пленкой большей плотности (950 кг/м^3). Результаты демонстрируют всплытие пленки с меньшей скоростью, так как выталкивающая сила, действующая на тело, уменьшилась. Данный эксперимент, помимо прочего, подтверждает, что выбранные численные методики хорошо описывают известные физические процессы.

Далее была проведена серия симуляций, в ходе которых пленка в начальный момент времени находилась на фиксированной глубине и при этом задавалась поверхностная волна с фиксированной частотой и с различными значениями крутизны. Характер влияния крутизны волны на поведение пленки продемонстрирован на рис. 5. Здесь и далее под координатой пленки будем понимать координату центра масс.

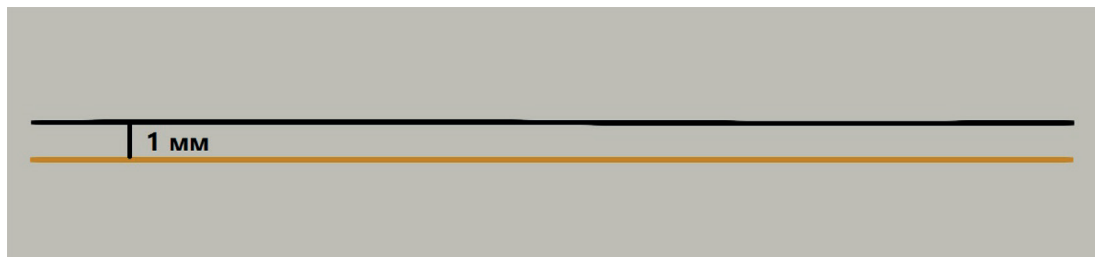


Рис. 4. Скриншот симуляции. Пленка в начальный момент времени (оранжевая кривая) и в момент времени $t = 0,75$ с (черная кривая)

Fig. 4. Screenshot of the simulation. The film at the initial time (orange curve) and at time $t = 0.75$ s (black curve)

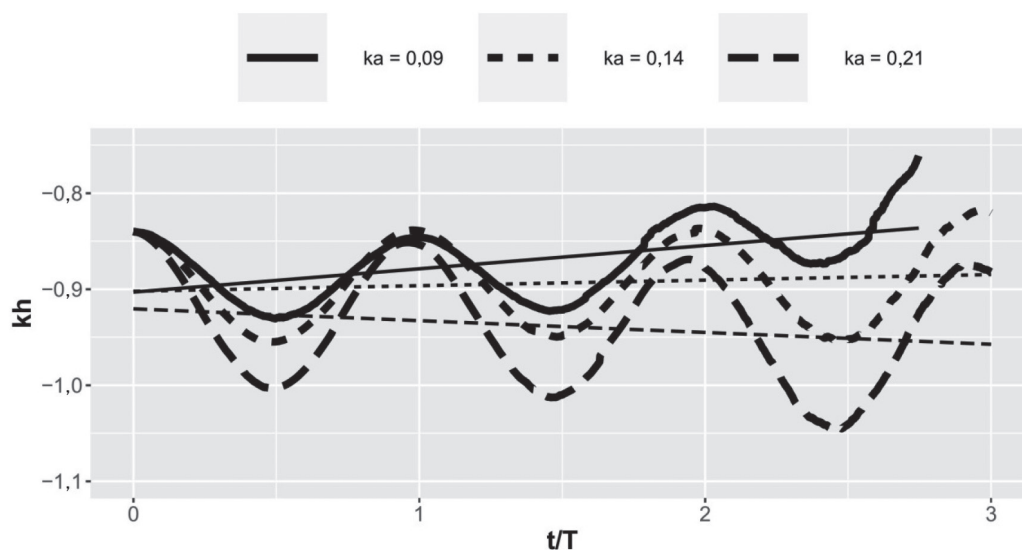


Рис. 5. Зависимость безразмерной вертикальной координаты пленки от безразмерного времени (в периодах волн) при различных крутизнах волн

Fig. 5. Dimensionless vertical coordinate of the film vs dimensionless time (in wave periods) at different wave steepness

Расчеты показывают, что при сравнительно малой крутизне волны (сплошная кривая) пленка всплывает, однако с меньшей скоростью, чем в отсутствие волны. С ростом крутизны волны пленка перестает всплывать (рис. 5, мелкий пунктир), а для достаточно крутых волн начинает погружаться (рис. 5, крупный пунктир), по крайней мере, на временных масштабах порядка нескольких периодов волны. Это указывает на то, что крутизна является важнейшим параметром, определяющим динамику пленки под водой в поле волны. Отметим, что моделирование проводилось на разных частотах волны, и данный эффект наблюдался в каждом из случаев.

Из полученных на рис. 5 данных можно заключить, что в осциллирующем поле волновых орбитальных скоростей частиц жидкости возникает усредненная сила, действующая на тело и направленная противоположно выталкивающей силе.

На рис. 6 представлена зависимость скорости изменения вертикальной координаты пленки от крутизны волны. На оси ординат рис. 6 отложен тангенс угла наклона прямых тренда, которые изображены на рис. 5. Точки, расположенные ниже нуля, соответствуют крутизнам, при которых происходит притапливание пленки, в то время как точки выше нуля соответствуют всплывающим пленкам.

На рис. 7 представлены скриншоты симуляции, наглядно иллюстрирующие процесс начальной фазы притапливания пленки в случае большой крутизны волны, который соответствует крупно пунктирной кривой на рис. 4. Использование маленькой по сравнению с длиной волны пленки приводит к малым деформациям. Это позволяет более наглядно продемонстрировать эффект притапливания. Можно видеть, что на втором периоде, пленка уже ощутимо притоплена.

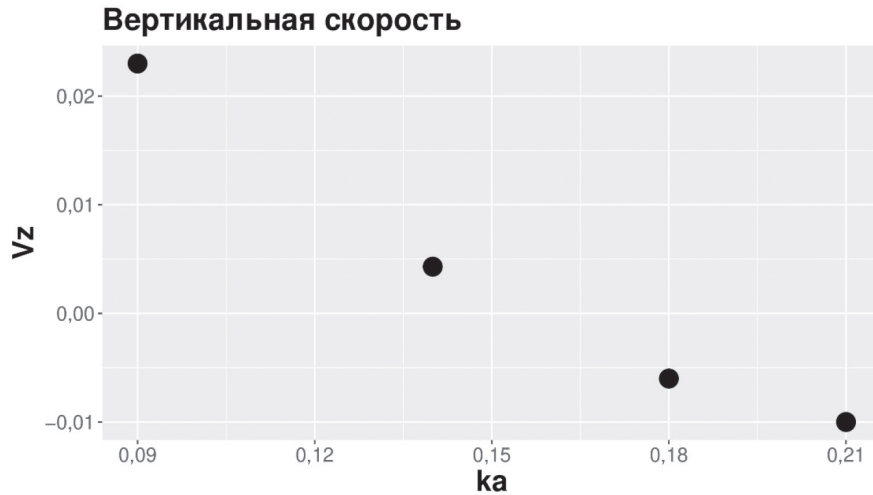


Рис. 6. Зависимость изменения безразмерной вертикальной скорости V_z (U^*kT) пленки от крутизны волны

Fig. 6. The dimensionless V_z (U^*kT) rate of change of the vertical coordinate of the film vs the steepness of the wave

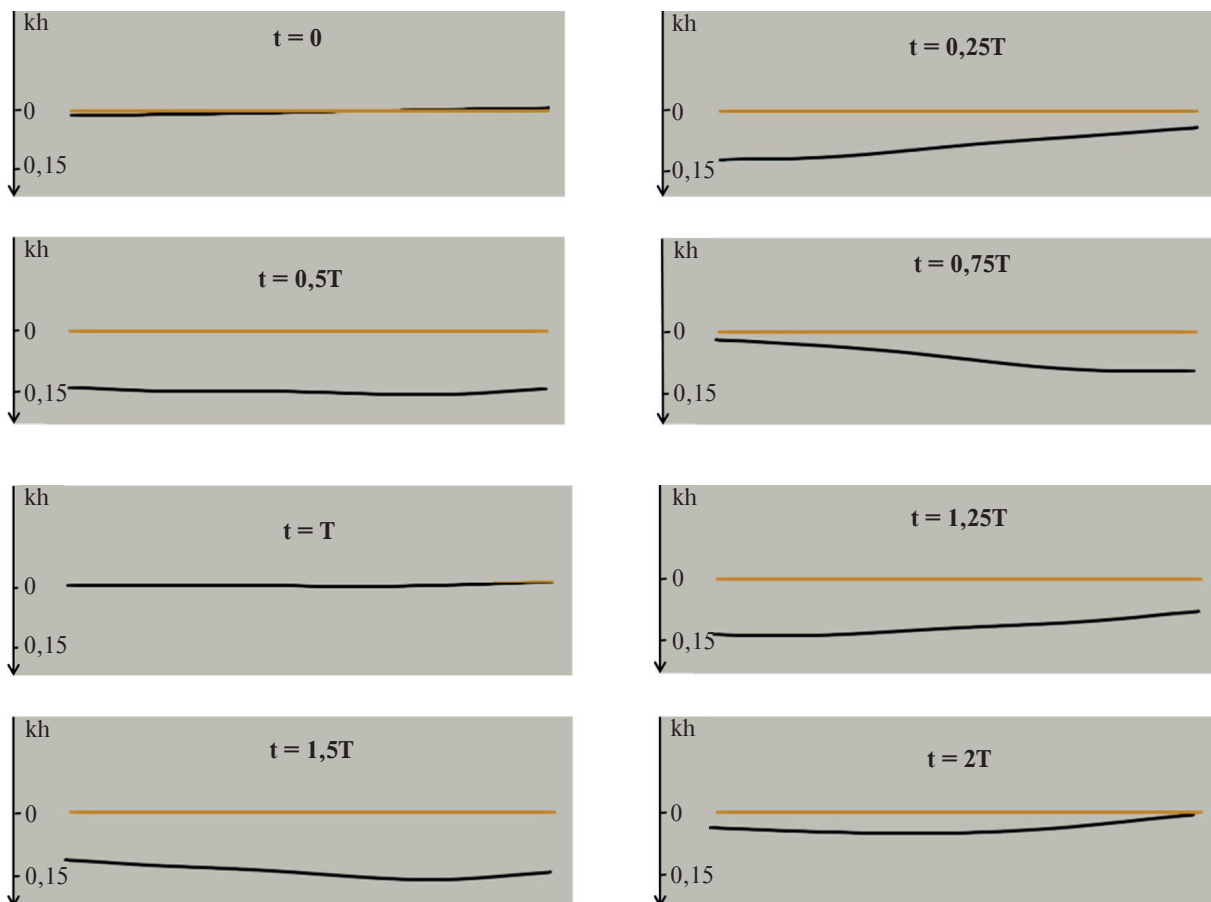


Рис. 7. Скриншоты симуляции, иллюстрирующие динамику пленки в поле волны. Оранжевая прямая — начальное положение пленки. За уровень $kh = 0$ взято начальное положение пленки. Черная кривая — положение пленки в другие моменты времени. T — период волны. Крутизна волны $ka = 0,21$

Fig. 7. Screenshots of the simulation illustrating the dynamics of the film in the wave field. The orange line is the initial position of the film. The initial position of the film is taken as the level $kh = 0$. The black curve is the position of the film at other points in time. T — wave period. The steepness of the wave $ka = 0,21$

Наряду с вычислениями, описанными выше, проведена серия симуляций с фиксированными параметрами падающей волны и пленки, но с разными начальными глубинами. Зависимость вертикальной координаты пленки от времени представлена на рис. 8. Было выбрано значение крутизны $ka = 0,14$.

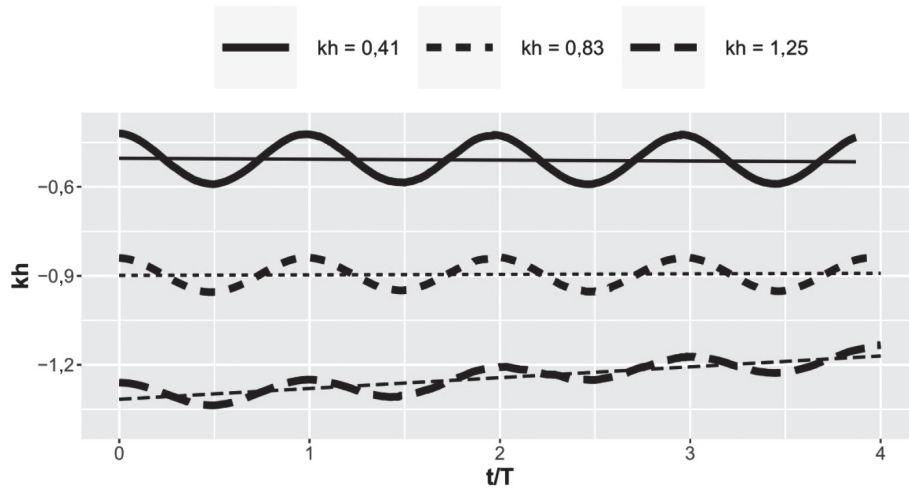


Рис. 8. Зависимость безразмерной вертикальной координаты пленки от безразмерного времени при различных начальных глубинах пленки

Fig. 8. Dimensionless vertical coordinate of the film vs the dimensionless time at different initial film depths

Можно видеть, что на большой глубине (крупный пунктир на рис. 8), где орбитальная скорость в волне мала, пленка всплывает. На небольшой же начальной глубине (сплошная кривая), высокие значения орбитальной скорости приводят к притапливанию пленки, хотя и довольно медленному.

Рис. 8 указывает на тенденцию всплытия пленки с большой начальной глубины ($kh = -1,25$), где амплитуда вертикальной орбитальной скорости мала и отсутствие всплытия при меньшей начальной глубине погружения пленки, т. е. при большей орбитальной скорости. Естественно ожидать, что режим всплытия с большой глубины на достаточно большом времени и при достаточной амплитуде волны должен перейти в режим равновесия пленки на некоторой глубине. Чтобы проверить данное предположение была рассмотрена динамика пленки, стартующей при $t = 0$ с некоторой большой глубины на достаточно большом промежутке времени и проведено сравнение с динамикой пленки того же размера в отсутствии поверхностного волнения (рис. 9).

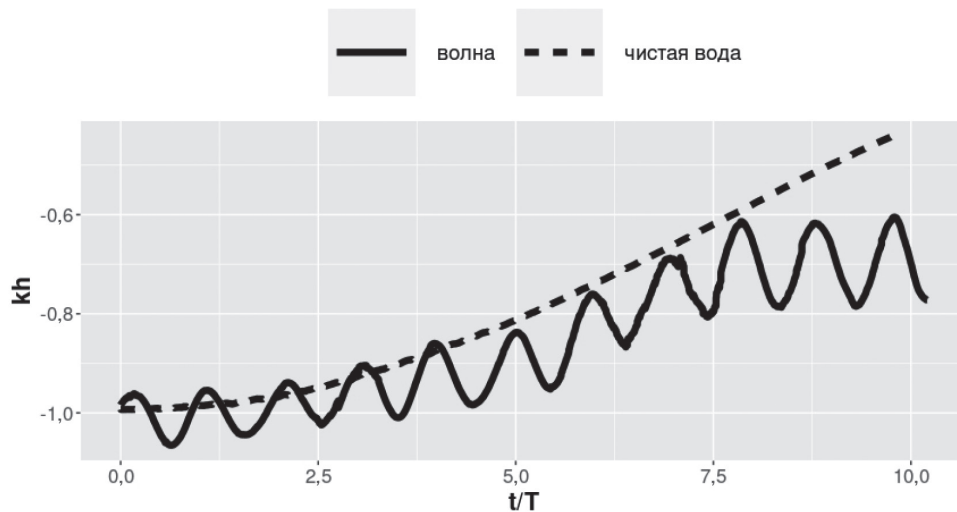


Рис. 9. Сравнение случая с волнением на поверхности (сплошная линия) и случая спокойной поверхности (пунктирная линия)

Fig. 9. Comparison of the case with surface waves (solid line) and the case of a calm surface (dotted line)

Можно видеть, что скорость всплытия пленки с течением времени уменьшается и при достижении определенного уровня выходит на равновесную глубину, близкую к той, которую имеет пленка на рис. 8 (мелкий пунктир) с близкой амплитудой колебаний в поле орбитальных скоростей. Рис. 9, таким образом, подтверждает, что при заданных параметрах волны может существовать некоторая глубина, на которой пленка находится в динамическом равновесии, находясь на одной и той же глубине. Стоит отметить, что данные результаты применимы на разных частотах при длине волны большей, чем размер пленки. Отношение размера пленки к длине волны, безусловно, является важным параметром, определяющим динамику пленки в данной задаче и расширение результатов на случай других значений данного параметра является целью дальнейших исследований.

Учитывая выявленные выше особенности динамики ПЭ пленки в присутствии поверхностных волн, можно полагать, что в быстро осциллирующем поле орбитальных волновых движений частиц жидкости проявляется действие усредненной гидродинамической силы, направленной против архимедовой силы и являющейся гидродинамическим аналогом рассмотренной в механике [32], а также в электродинамике [33] средней силы, действующей на частицу в быстро осциллирующем поле.

Быстро осциллирующая сила F , которая возникает при обтекании ПЭ пленки полем волновых орбитальных скоростей, определяется интегралом от динамических компонент тензора напряжений по поверхности пленки и, в силу очень сложного характера обтекания пленки, эту силу не удастся описать аналитически. Однако эту силу удастся рассчитать численно, пример такого расчета силы F приведен на рис. 10.

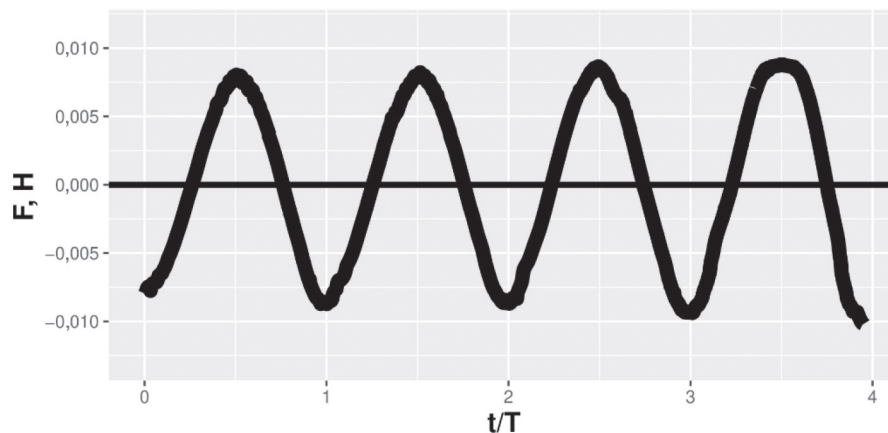


Рис. 10. Численно рассчитанная осциллирующая вертикальная сила на глубине $kh = -0,84$, при амплитуде волн $ka = 0,14$, действующая на пленку в поле поверхностных волн в зависимости от безразмерного времени

Fig. 10. Numerically calculated oscillating vertical component of the force acting on the film on the depth $kh = -0.84$ with wave amplitude $ka = 0.14$ in the field of surface waves vs dimensionless time

Отметим, что амплитуда колебаний на 3 и 4 периодах возрастает на 5 %, что количественно соответствует росту амплитуды орбитальной скорости при медленном всплытии пленки.

Если рассматривать движение пленки как целого, не учитывая изменение её формы и описывая положение пленки по вертикали координатой z , то, выделяя явно слагаемые, связанные с силой тяжести и с Архимедовой силой, уравнение движения пленки можно записать как:

$$m_f \frac{d^2 z}{dt^2} = g m_f \left(\frac{\rho_w}{\rho_f} - 1 \right) + F. \quad (18)$$

где ρ_w и ρ_f — плотность воды и пленки, m_f — масса пленки.

Представляя движение пленки как быстро осциллирующие малые колебания пленки под действием силы F и медленную составляющую $Z(t) = \overline{z(t)}$, получаемую в результате усреднения движения по периоду волны, можно, следуя [32], получить уравнение, описывающее усредненное движение пленки в виде:

$$m_f \frac{d^2 Z}{dt^2} = g m_f \left(\frac{\rho_w}{\rho_f} - 1 \right) - \frac{\overline{F^2}}{\partial Z} \frac{1}{2 m_f \omega^2}, \quad (19)$$

где черта сверху обозначает усреднение по периоду волны. Последнее слагаемое представляет действующую на пленку усредненную силу в поле поверхностной волны. Учитывая экспоненциальное спадание волнового движения с глубиной, усредненную силу можно записать как: $\frac{\overline{F^2}k}{m_f\omega^2}$, сила эта направлена вниз и приводит к притапливанию пленки.

Физически притапливание ПЭ-пленки можно пояснить тем, что быстро осциллирующая сила, приводящая к колебаниям тела в поле волновых орбитальных скоростей, зависит от глубины и больше в той фазе колебаний, когда тело начинает погружаться и меньше, когда оно всплывает в силу уменьшения орбитальной скорости с глубиной. Используя приведенный на рис. 10 расчет осциллирующей силы, несложно оценить отношение величин усредненной силы и силы плавучести, т. е. отношение второго слагаемого к первому в правой части (19). Для принятых выше параметров задачи и для волны с крутизной $ka = 0,14$ при $kh = -0,84$, усредненная сила составляет около 0,25 от силы плавучести и действует противоположно ей, что и приводит к более медленному, чем в отсутствие волн, всплытию пленки на начальной стадии. Как следует из рис. 9, по мере всплытия пленки амплитуда орбитальной скорости волны возрастает, соответственно, возрастает как осциллирующая, так и усредненная сила, что приводит к динамическому равновесию пленки на некоторой глубине.

7. Заключение

В ходе численного моделирования исследована динамика упругой плавучей полиэтиленовой пленки в поле поверхностных волн. Показано, что пленка всплывает в отсутствие волнения на поверхности, в то время как при наличии такового она может притапливаться, всплывать, или находиться в равновесии на определенной глубине. При этом, даже в случае всплытия, скорость подъема меньше, чем в отсутствие волнения на поверхности. Показано, что в поле орбитальных волновых движений частиц жидкости возникает усредненная гидродинамическая сила, которая направлена против архимедовой силы.

Установлено, что начальная глубина погружения пленки существенно влияет на ее положение в дальнейшем. Это определяется тем, что орбитальная скорость частиц жидкости в волне экспоненциально спадает с глубиной и чем больше эта скорость, тем ближе пленка к поверхности, тем больше направленная вниз усредненная сила и тем больше эффект притапливания.

Показано, что при определенных параметрах внешнего волнения может быть реализовано равновесное состояние, т. е. пленка может находиться на одной и той же глубине достаточно длительное время. Продемонстрирована возможность существования глубины, на которой пленка находится в состоянии динамического равновесия. Эта глубина определяется частотой и крутизной волны.

Финансирование

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ в рамках проекта № 23-17-00167.

Funding

This work was carried out under financial support if the Russian Science Foundation № 23-17-00167.

Литература

1. Chubarenko I., Esiukova E., Khatmullina L., et al. From macro to micro, from patchy to uniform: Analyzing plastic contamination along and across a sandy tide-less coast // Marine Pollution Bulletin. 2020. Vol. 156. P. 111198. doi:10.1016/j.marpolbul.2020.111198 EDN: QDTMGU
2. Cózar A., Echevarría F., González-Gordillo J.I., et al. Plastic debris in the open ocean // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2014. Vol. 111. P. 10239–10244. doi:10.1073/pnas.1314705111
3. Andrady A.L. Microplastics in the marine environment // Marine Pollution Bulletin. 2011. Vol. 62, No. 8. P. 1596–1605. doi:10.1016/j.marpolbul.2011.05.030 EDN: ULRKUK
4. Suaria G., Cappa P., Perold V., Aliani S., Ryan P.G. Abundance and composition of small floating plastics in the eastern and southern sectors of the Atlantic Ocean // Marine Pollution Bulletin. 2023. Vol. 193. P. 115109. doi:10.1016/j.marpolbul.2023.115109 EDN: ZJWHZP
5. Ivar do Sul J.A., Costa M.F. The present and future of microplastic pollution in the marine environment // Environmental Pollution. 2014. Vol. 185. P. 352–364.

6. Gall S.C., Thompson R.C. The impact of debris on marine life // *Marine Pollution Bulletin*. 2015. 92(1–2). P. 170–179. doi:10.1016/j.marpolbul.2014.12.041
7. Crawford C., Quinn B. Microplastics, standardisation and spatial distribution // *Microplastic Pollutants*. Elsevier, 2017. Ch. 5. P. 101–130. doi:10.1016/B978-0-12-809406-8.00005-0
8. Gallitelli M., Simpson M.D., Marino A., et al. Monitoring of Plastic Islands in River Environment Using Sentinel-1 SAR Data // *Remote Sensing*. 2022. Vol. 14(18). P. 4473. doi:10.3390/rs14184473
9. Hu C. Remote detection of marine debris using satellite observations in the visible and near infrared spectral range: Challenges and potentials // *Remote Sensing of Environment*. 2021. Vol. 259. P. 112414. doi:10.1016/j.rse.2021.112414 EDN: KSEHQH
10. Davaasuren N., Marino A., Boardman C., et al. Detecting microplastics pollution in world oceans using SAR remote sensing // *IGARSS2018–2018 IEEE International Geo-science and Remote Sensing Symposium*. 2018. P. 938–941. doi:10.1109/IGARSS.2018.8517281 EDN: AGTBDY
11. Evans M.C., Ruf C.S., Toward the detection and imaging of ocean microplastics with a spaceborne radar // *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 2021. P. 1–9. doi:10.1109/tgrs.2021.3081691
12. Sun Y., Bakker T., Ruf C., Pan Y. Effects of microplastics and surfactants on surface roughness of water waves // *Scientific Reports*. 2023. Vol. 13, No. 1. P. 1978. doi:10.1038/s41598-023-29088-9 EDN: KXSMVU
13. Motofumi A., Masakazu K., Yoshifumi A. Applicability of SAR to Marine Debris Surveillance after the Great East Japan Earthquake // *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*. Vol. 7, No. 5, May 2014.
14. Simpson M.D., Marino A., de Maagt P. et al. Investigating the Backscatter of Marine Plastic Litter Using a C- and X-Band Ground Radar, during a Measurement Campaign in Deltares // *Remote sensing*. 2023. Vol. 15, No. 6. 1654. doi:10.3390/rs15061654 EDN: PTKPEV
15. Kukulka T., Proskurowski G., Moret-Ferguson S., Meyer D.W., Law K.L. The effect of wind mixing on the vertical distribution of buoyant plastic debris // *Geophysical Research Letters*. 6192012. Vol. 39, No. 7. P. 1–6. doi:10.1029/2012GL051116 EDN: YCQELR
16. Forsberg P.L., Sous D., Stocchino A., Chemin R. Behaviour of plastic litter in nearshore waters: First insights from wind and wave laboratory experiments // *Marine Pollution Bulletin*. 2020. Vol. 153. 111023. doi:10.1016/j.marpolbul.2020.111023 EDN: TVJDVM
17. Cózar A., Morales-Caselles C., Aliani S., et al. Marine litter windrows: a strategic target to understand and manage the ocean plastic pollution // *Frontiers in Marine Science*. 2021. Vol. 8. P. 571796. doi:10.3389/fmars.2021.571796 EDN: UYNLSZ
18. Kooi M., van Nes E.H., Scheffer M., Koelmans A.A. Ups and downs in the ocean: Effects of biofouling on vertical transport of microplastics // *Environmental Science & Technology*. 2017. Vol. 51. P. 7963–7971. doi:10.1021/acs.est.6b04702
19. Hron J., Turek S. A monolithic FEM/multigrid solver for ALE formulation of fluid structure interaction with application in biomechanics // H.-J. Bungartz, M. Schäfer (eds.). *Fluid-Structure Interaction: Modelling, Simulation, Optimisation*, LNCSE. Springer, 2006. doi:10.1007/3-540-34596-5_7
20. Brown S.A., Xie N., Hann M.R., Greaves D.M. Investigation of wave-driven hydroelastic interactions using numerical and physical modelling approaches // *Applied Ocean Research*. 2022. Vol. 129. 103363. doi:10.1016/j.apor.2022.103363 EDN: IYPBI
21. Tukovic Z., Karac A., Cardiff P., Jasak H., Ivankovic A. OpenFOAM finite volume solver for fluid-solid interaction // *Transactions of FAMENA*. 2018. Vol. 42. P. 1–31. doi:10.21278/TOF.42301
22. Cardiff P., Karač A., De Haeger P. et al. An open-source finite volume toolbox for solid mechanics and fluid-solid-interaction simulations. 2018. ArXiv Prepr arXiv:1808.10736.
23. Donea J., Huerta A., Ponthot J. Ph., Rodríguez-Ferran A. Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods // *The Encyclopedia of Computational Mechanics*. Wiley, 2004. Vol. 1, Chapter 14, pp. 413–437, doi:10.1002/0470091355.ECM009
24. Tezduyar T.E., Takizawa K., Moorman C., Wright S., Christopher J. Space-time finite element computation of complex fluid-structure interactions // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2010. Vol. 64. P. 1201–1218. doi:10.1002/flid.2221 EDN: OCGXIV
25. Thomas P.D., Lombard C.K. Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids // *AIAA Journal* 17. 1979. P. 1030–1037. doi:10.2514/3.61273
26. Jasak H. Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows. Ph.D. thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine. 1996.
27. Higuera P., Lara J.L., Losada I.J. Realistic wave generation and active wave absorption for Navier-Stokes models: Application to OpenFOAM® // *Coastal Engineering*. 2013. Vol. 71. P. 102–118. doi:10.1016/j.coastaleng.2012.07.002
28. Robert G. Dean and Robert Dalrymple. *Water wave mechanics for engineers and scientists* // World Scientific. 1991. 353 p.
29. Ciarlet P.G. *Mathematical Elasticity. Mathematical elasticity, volume I: Three-dimensional elasticity* // *Acta Appl Math*. 1990. Vol. 18. P. 190–195. doi:10.1007/BF00046568 EDN: KNRZNX

30. Widlund O. Iterative substructuring methods: algorithms and theory for elliptic problems in the plane // First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, SI-AM. Paris, 1988. pp. 113–128.
31. Tuković Ž., Jasak H. A moving mesh finite volume interface tracking method for surface tension dominated interfacial fluid flow // Computers and Fluids. 2012. Vol. 55. P. 70–84. doi:10.1016/j.compfluid.2011.11.003
32. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая Физика: Том 1. Механика. 1974, 224 с.
33. Garonov A.V., Miller M.A. Potential wells for charged particles in a high-frequency electromagnetic field // Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1958. Vol. 7, No. 1, p. 168.

References

1. Chubarenko I, Esiukova E, Khatmullina L, et al. From macro to micro, from patchy to uniform: Analyzing plastic contamination along and across a sandy tide-less coast. *Marine Pollution Bulletin*. 2020;156:111198. doi:10.1016/j.marpolbul.2020.111198
2. Cózar A, Echevarría F, González-Gordillo JJ, et al. Plastic debris in the open ocean. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2014;111(28):10239–10244. doi:10.1073/pnas.1314705111
3. Andrady AL. Microplastics in the marine environment. *Marine Pollution Bulletin*. 2011;62(8):1596–1605. doi:10.1016/j.marpolbul.2011.05.030
4. Suaria G, Cappa P, Perold V, Aliani S, Ryan PG. Abundance and composition of small floating plastics in the eastern and southern sectors of the Atlantic Ocean. *Marine Pollution Bulletin*. 2023;193:115109. doi:10.1016/j.marpolbul.2023.115109
5. do Sul JAI, Costa MF. The present and future of microplastic pollution in the marine environment. *Environmental Pollution*. 2014;185:352–364.
6. Gall SC, Thompson RC. The impact of debris on marine life. *Marine Pollution Bulletin*. 2015;92(1–2):170–179. doi:10.1016/j.marpolbul.2014.12.041
7. Crawford C, Quinn B. Microplastics, standardisation and spatial distribution. In: *Microplastic Pollutants*. Elsevier; 2017. p. 101–130. doi:10.1016/B978-0-12-809406-8.00005-0
8. Gallitelli M, Simpson MD, Marino A, et al. Monitoring of plastic islands in river environment using Sentinel-1 SAR data. *Remote Sensing*. 2022;14(18):4473. doi:10.3390/rs14184473
9. Hu C. Remote detection of marine debris using satellite observations in the visible and near infrared spectral range: Challenges and potentials. *Remote Sensing of Environment*. 2021;259:112414. doi:10.1016/j.rse.2021.112414
10. Davaasuren N, Marino A, Boardman C, et al. Detecting microplastics pollution in world oceans using SAR remote sensing. In: *IGARSS2018–2018 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*. 2018;938–941. doi:10.1109/IGARSS.2018.8517281
11. Evans MC, Ruf CS. Toward the detection and imaging of ocean microplastics with a spaceborne radar. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 2021; PP:1–9. doi:10.1109/tgrs.2021.3081691
12. Sun Y, Bakker T, Ruf C, Pan Y. Effects of microplastics and surfactants on surface roughness of water waves. *Scientific Reports*. 2023;13(1):1978. doi:10.1038/s41598-023-29088-9
13. Motofumi A, Masakazu K, Yoshifumi A. Applicability of SAR to marine debris surveillance after the Great East Japan Earthquake. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*. 2014;7(5).
14. Simpson MD, Marino A, de Maagt P, et al. Investigating the backscatter of marine plastic litter using a C- and X-band ground radar during a measurement campaign in Deltares. *Remote Sensing*. 2023;15(6):1654. doi:10.3390/rs15061654
15. Kukulka T, Proskurowski G, Moret-Ferguson S, Meyer DW, Law KL. The effect of wind mixing on the vertical distribution of buoyant plastic debris. *Geophysical Research Letters*. 2012;39(7):1–6. doi:10.1029/2012GL051116
16. Forsberg PL, Sous D, Stocchino A, Chemin R. Behaviour of plastic litter in nearshore waters: First insights from wind and wave laboratory experiments. *Marine Pollution Bulletin*. 2020;153:111023. doi:10.1016/j.marpolbul.2020.111023
17. Cózar A, Morales-Caselles C, Aliani S, et al. Marine litter windrows: a strategic target to understand and manage the ocean plastic pollution. *Frontiers in Marine Science*. 2021;8:571796. doi:10.3389/fmars.2021.571796
18. Kooi M, van Nes EH, Scheffer M, Koelmans AA. Ups and downs in the ocean: Effects of biofouling on vertical transport of microplastics. *Environmental Science & Technology*. 2017;51(13):7963–7971. doi:10.1021/acs.est.6b04702
19. Hron J, Turek S. A monolithic FEM/multigrid solver for ALE formulation of fluid-structure interaction with application in biomechanics. In: Bungartz H-J, Schäfer M, editors. *Fluid-Structure Interaction: Modelling, Simulation, Optimisation*. LNCSE; 2006. p. 1–16. doi:10.1007/3-540-34596-5_7
20. Brown SA, Xie N, Hann MR, Greaves DM. Investigation of wave-driven hydroelastic interactions using numerical and physical modelling approaches. *Applied Ocean Research*. 2022;129:103363. doi:10.1016/j.apor.2022.103363

21. Tuković Ž, Karac A, Cardiff P, Jasak H. OpenFOAM finite volume solver for fluid-solid interaction. *Transactions of FAMENA*. 2018;42(3):113–128. doi:10.21278/TOF.42301
22. Cardiff P, Karač A, De Haeger P, et al. An open-source finite volume toolbox for solid mechanics and fluid-solid-interaction simulations. arXiv preprint arXiv:1808.10736. 2018.
23. Donea J, Huerta A, Ponthot JP, Rodríguez-Ferran A. Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods. In: Wiley, editor. *The Encyclopedia of Computational Mechanics*. Vol 1. Ch. 14. 2004;413–437. doi:10.1002/0470091355.ECM009
24. Tezduyar TE, Takizawa K, Moorman C, Wright S, Christopher J. Space-Time finite element computation of complex fluid-structure interactions. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2010;64(11):1201–1218. doi:10.1002/fld.2221
25. Thomas P, Lombard CK. Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids. *AIAA Journal*. 1979;17(7):1030–1037. doi:10.2514/3.61273
26. Jasak H. Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows. PhD thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine; 1996.
27. Higuera P, Lara JL, Losada IJ. Realistic wave generation and active wave absorption for Navier-Stokes models: Application to OpenFOAM®. *Coastal Engineering*. 2013;71:102–118. doi:10.1016/j.coastaleng.2012.07.002
28. Dean RG, Dalrymple RB. *Water wave mechanics for engineers and scientists*. Singapore: World Scientific; 1991.
29. Ciarlet PG. *Mathematical elasticity*. Volume I: Three-dimensional elasticity. Studies in Mathematics and its Applications. Vol 20. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V.; 1988. doi:10.1007/BF00046568
30. Widlund O. Iterative substructuring methods: algorithms and theory for elliptic problems in the plane. In: *First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. SI-AM; 1988. p. 113–128.
31. Tuković Ž, Jasak H. A moving mesh finite volume interface tracking method for surface tension dominant interfacial fluid flow. *Computers & Fluids*. 2012;55:70–84. doi:10.1016/j.compfluid.2011.11.003
32. Landau LD, Lifshitz EM. Mechanics. *Course of Theoretical Physics*. Vol 1. 1974;224 p.
33. Gaponov AV, Miller MA. Potential wells for charged particles in a high-frequency electromagnetic field. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1958;7(1):168.

Об авторах

ХАЗАНОВ Григорий Ефимович, научный сотрудник ИПФ РАН, кандидат физико-математических наук, ORCID: 0000-0002-3430-2846, Scopus AuthorID: 57325095100, SPIN-код (РИНЦ): 3846-4538, e-mail: g.khazanov@ipfran.ru

ЕРМАКОВ Станислав Александрович, заведующий отделом ИПФ РАН, старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, ORCID: 0000-0002-0869-4954, SPIN-код (РИНЦ): 3040-6396, e-mail: stas.ermakov@ipfran.ru