

DOI 10.59887/2073-6673.2025.18(1)-4

УДК 551.466.2

© В. В. Баханов*, С. Н. Власов, Е. В. Копосова, 2025

Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН, 603950, Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 46
*bakh@ipfran.ru

МОДУЛЯЦИОННО-САМОФОКУСИРОВОЧНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГРАВИТАЦИОННО-КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН В ШИРОКОМ ИНТЕРВАЛЕ УГЛОВ И ЧАСТОТ

Статья поступила в редакцию 19.11.2024, после доработки 13.12.2024, принята в печать 03.02.2025

Аннотация

Излагается теория неустойчивости гравитационно-капиллярных волн на поверхности жидкости с учетом линейной и нелинейной дисперсий. Теоретическое исследование проводится на основе использования интегродифференциального оператора для описания линейной дисперсии волн. Сначала рассматривается случай кубичной нелинейности без учета дисперсии нелинейности. Найдены инкременты неустойчивости. Проводится сравнение со случаем параболической аппроксимации линейной дисперсионной зависимости, что соответствует использованию нелинейного уравнения Шредингера. Показано, что использование интегродифференциального оператора для описания линейной дисперсии волн приводит к ограничению области неустойчивости, но не меняет величины инкремента. Получено, что дисперсия нелинейности уменьшает инкременты, особенно при больших расстройках. Влияние капиллярных эффектов на неустойчивость волн на поверхности жидкости проводится в той же последовательности: сначала без учета дисперсии нелинейности, затем с ее учетом. Структура неустойчивости меняется для волн, распространяющихся с минимальными фазовыми и групповыми скоростями: при уменьшении длины волны область неустойчивости суживается и потом исчезает. Определены границы исчезновения области неустойчивости. При дальнейшем уменьшении длины волны неустойчивость возникает вновь. Она приобретает черты «коллапса», когда область неустойчивости становится эллиптической. Вид неустойчивости волн с большими волновыми числами имеет «самофокусирующий» характер в отличие от модуляционного характера неустойчивости волн с малыми волновыми числами. Нелинейная дисперсия в гравитационно-капиллярных волнах, как и в гравитационных волнах, ведет к подавлению неустойчивости при больших расстройках. В области существования неустойчивости типа «коллапса» нелинейная дисперсия ведет к сужению области неустойчивости и уменьшению инкремента в них. Это дает возможность описывать на основе предлагаемых уравнений распространения гравитационно-капиллярных волн на больших временах.

Ключевые слова: гравитационные волны, капиллярность, поверхность жидкости, нелинейность, дисперсия, неустойчивость, модуляция

© V. V. Bakhanov*, S. N. Vlasov, E. V. Kopusova, 2025

A. V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics RAS, 46 Ulyanova Str., Nizhny Novgorod 603950, Russia
*bakh@ipfran.ru

MODULATION-SELF-FOCUSING INSTABILITY OF GRAVITY-CAPILLARY WAVES IN A WIDE RANGE OF ANGLES AND FREQUENCIES

Received 19.11.2024, Revised 13.12.2024, Accepted 03.02.2025

Abstract

The theory of instability of gravity-capillary waves on the surface of a liquid taking into account linear and nonlinear dispersions is presented. Theoretical research is carried out on the basis of the use of an integrodifference operator to describe the linear dispersion of waves. Increments of instability are found. It is shown that the use of an integrodifference operator to describe the gravity wave linear dispersion without taking into account their nonlinear dispersion leads to the instability region limitation

Ссылка для цитирования: Баханов В.В., Власов С.Н., Копосова Е.В. Модуляционно-самофокусирующая неустойчивость гравитационно-капиллярных волн в широком интервале углов и частот // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2025. Т. 18, № 1. С. 41–52. doi:10.59887/2073-6673.2025.18(1)-4

For citation: Bakhanov V.V., Vlasov S.N., Kopusova E.V. Modulation-Self-Focusing Instability of Gravity-Capillary Waves in a Wide Range of Angles and Frequencies. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2025;18(1):41–52. doi:10.59887/2073-6673.2025.18(1)-4

compared to the case of using the nonlinear Schrödinger equation, but does not change the increment value. The dispersion of the nonlinearity of gravity surface waves reduces increments, especially at large detunes. The structure of instability changes for gravity-capillary waves propagating with minimal phase and group velocities: as the wavelength decreases, the instability region narrows and then disappears. The boundaries of the disappearance of instability area are determined. With a further wavelength decrease, instability occurs again. It acquires the features of “collapse”, when the instability region becomes elliptical. The instability of waves with large wave numbers has a “self-focusing” character, in contrast to the modulation nature of the instability of waves with small wave numbers. Nonlinear dispersion in gravity-capillary waves, as well as in gravity waves, leads to the suppression of instability under large detunes.

Keywords: gravity waves, capillarity, fluid surface, nonlinearity, dispersion, instability, modulation

1. Введение

Модуляционно-самофокусирующая неустойчивость интенсивных волн различной природы: оптических, гидродинамических, волн в плазме, связанная с кубичной нелинейностью, известна с середины 1960-х гг. [1–8]. С первых работ эта неустойчивость рассматривалась для волн возмущений на частотах, близких к несущей и распространяющихся почти коллинеарно с мощной волной, когда существенная часть нелинейных явлений может быть описана нелинейным уравнением Шредингера. Это описание, наряду со своей простотой, имеет ряд недостатков: в волнах на поверхности жидкости оно дает неустойчивость с необычайно высоким инкрементом для сколь угодно высоких частот; для электромагнитных волн и волн в плазме оно предсказывает обращение амплитуды поля в бесконечность — коллапс. Оба последних явления обусловлены недостаточно точным описанием дисперсии в линейной и нелинейной частях системы. Более точная теория на основе использования гамильтонова описания предложена в [9–12]. В [13] рассматривается влияние равномерного сдвигового течения на модуляцию слабонелинейных квазимонохроматических поверхностных гравитационных волн в гамильтоновой формулировке. Однако гамильтоново описание само по себе является достаточно сложным.

В данной работе более подробно излагается упрощенная теория модуляционно-самофокусирующей неустойчивости гравитационно-капиллярных волн в широком интервале углов и частот [14, 15] на основе использования интегродифференциального оператора для описания линейной дисперсии. Краткие результаты ее приводились в [16]. Аналогичный подход использовался в [17] для пакетов гравитационно-капиллярных волн с узким спектром. Она применима и к негамильтоновым системам, но требует знания дисперсионных характеристик одного из типов волн, распространяющихся в среде. Эти характеристики могут быть и результатом обработки опытных данных.

2. Модуляционная неустойчивость гравитационных волн на поверхности жидкости

Пусть известна дисперсионная характеристика одного из типов волн:

$$\omega = F(\mathbf{k}), \quad (1)$$

где ω — круговая частота, $\mathbf{k}$ — волновой вектор. Поле A_0 , существующее в среде с таким дисперсионным соотношением, может быть описано интегральным соотношением [15]:

$$\frac{\partial A_0}{\partial t} = \frac{i}{(2\pi)^s} \iint F(\mathbf{k}') \exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\mathbf{k}'\mathbf{r}'] A_0(\mathbf{r}') d\mathbf{k}' d\mathbf{r}', \quad (2)$$

где s — размерность пространства. Пусть уравнение (2) имеет решение вида плоской волны с постоянной амплитудой $\bar{A}$:

$$A_0 = \bar{A} \exp(i\omega_0 t - i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}). \quad (3)$$

Для сокращения записи введем оператор:

$$L(\mathbf{k}_0) \bar{A} = \frac{i}{(2\pi)^s} \iint F(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}') \exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\mathbf{k}'\mathbf{r}'] \bar{A}(\mathbf{r}') d\mathbf{k}' d\mathbf{r}' \quad (4)$$

и запишем уравнение для $\bar{A}$ в виде:

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = iL(\mathbf{k}_0) \bar{A} - i\omega_0 \bar{A}. \quad (5)$$

Дополним последнее соотношение нелинейным членом $\sim |\bar{A}|^2 \bar{A}$. Коэффициент перед нелинейным членом выберем исходя из уравнения для плоской волны. Амплитуду мы нормируем так, чтобы коэффициент перед нелинейностью равнялся половине, что более удобно при дальнейших записях. В результате имеем следующее уравнение, описывающее распространение волн в такой среде:

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = iL(\mathbf{k}_0) \bar{A} - i\omega_0 \bar{A} + \frac{i\delta\omega_0 |\bar{A}|^2 \bar{A}}{2}, \quad (6)$$

где δ — коэффициент, принимающий два значения: $\delta = \pm 1$. Знак «+» соответствует расфокусирующей нелинейности в оптике, знак «−» соответствует самофокусирующей нелинейности. Запись нелинейности в таком простейшем виде означает, что мы пренебрегли дисперсией нелинейности.

В нелинейном уравнении (6) мы исследуем устойчивость методом возмущений его решений вида плоской волны:

$$\bar{A} = B \exp(i\Omega t), \quad (7)$$

где $\Omega = \delta\omega_0 |B|^2/2$ — суть нелинейная поправка к частоте. Возьмем возмущенное решение в форме:

$$\bar{A} = [B + \alpha] \exp(i\Omega t), \quad (8)$$

где α — малая величина. Предполагая, что α имеет вид:

$$\alpha = \alpha_0(t) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) + \beta_0(t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad (9)$$

для амплитуд возмущений получим пару линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\alpha_0}{dt} = iL(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k})\alpha_0 - i\omega_0\alpha_0 + \frac{i\delta\omega_0 |B|^2}{2}\alpha_0 + \frac{i\delta\omega_0 B^2}{2}\beta_0^*, \quad (10)$$

$$\frac{d\beta_0^*}{dt} = -iL(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})\beta_0^* + i\omega_0\beta_0^* - \frac{i\delta\omega_0 |B|^2}{2}\beta_0^* - \frac{i\delta\omega_0 B^{*2}}{2}\alpha_0. \quad (11)$$

Предполагая, что решения $\alpha_0 \sim \beta_0 \sim \exp[h\omega_0 t]$, для инкремента, нормированного на частоту ω , имеем:

$$\begin{aligned} h &= i \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\delta^2 |B|^4 - (\omega_+ + \omega_- - 2 + \delta |B|^2)^2} = \\ &= i \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{-2\delta |B|^2 (2 - \omega_+ - \omega_-) - (\omega_+ + \omega_- - 2)^2}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\omega_+ = F(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k})/\omega_0$ — линейная расстройка одной из компонент возмущений, $\omega_- = F(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k})/\omega_0$ — линейная расстройка другой компоненты возмущений. Очевидно, что для изотропных сред вектор $\mathbf{k}_0$ целесообразно направить по одной из координатных осей — по оси x .

Границы неустойчивости определяются условиями:

$$\omega_+ + \omega_- = 2, \quad (13)$$

$$2\delta |B|^2 - 2 + \omega_+ + \omega_- = 0. \quad (14)$$

Первая из них определяется линейной дисперсией. Она описывает действительную поверхность, если дисперсионная зависимость выпукла. В этом случае неустойчивость имеет место как для фокусирующей нелинейности, так и для расфокусирующей нелинейности, области неустойчивости располагаются для разных знаков нелинейности по разные стороны от поверхности (13).

Для потенциальных гравитационных волн на поверхности жидкости:

$$\omega = \sqrt{g|k_0|} = \sqrt{g(k_{0x}^2 + k_{0y}^2)^{1/2}}, \quad (15)$$

где g — ускорение свободного падения, k_{0x} и k_{0y} — компоненты волнового вектора на плоскости. В этом случае уравнение (6) запишется в виде [15, 18]:

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = iL(\mathbf{k}_0) \bar{A} - i\omega_0 \bar{A} + \frac{i\omega_0 |\mathbf{k}_0 \bar{A}|^2 \bar{A}}{2}, \quad (16)$$

где $\bar{A}$ — амплитуда волны. При исследовании неустойчивости перейдем к безразмерным переменным

$t_{dl} = \frac{\omega_0 t}{2}$, $x_{dl} = k_0 x$, $y_{dl} = k_0 y$, $z_{dl} = k_0 z$, $A_{dl} = 2k_0 \bar{A}$. Опуская индекс «dl», запишем уравнение (16) в форме:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{2i}{\omega_0} L(\mathbf{k}_0) A - 2iA + \frac{i}{4} |A|^2 A. \quad (17)$$

Для нормированного инкремента волн возмущений на воде имеем:

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|A|^4}{4} - \left\{ 2 \left[(1 + \tilde{k}_x)^2 + \tilde{k}_y^2 \right]^{1/4} + 2 \left[(1 - \tilde{k}_x)^2 + \tilde{k}_y^2 \right]^{1/4} - 4 + \frac{|A|^2}{2} \right\}^2}, \quad (18)$$

где $\tilde{k}_x = k_x/k_0$, $\tilde{k}_y = k_y/k_0$. Заметим, что гравитационные волны на поверхности существуют при $A \leq 0,88718$. Область отличного от нуля инкремента для $A = 0,15$ показана на рис. 1.

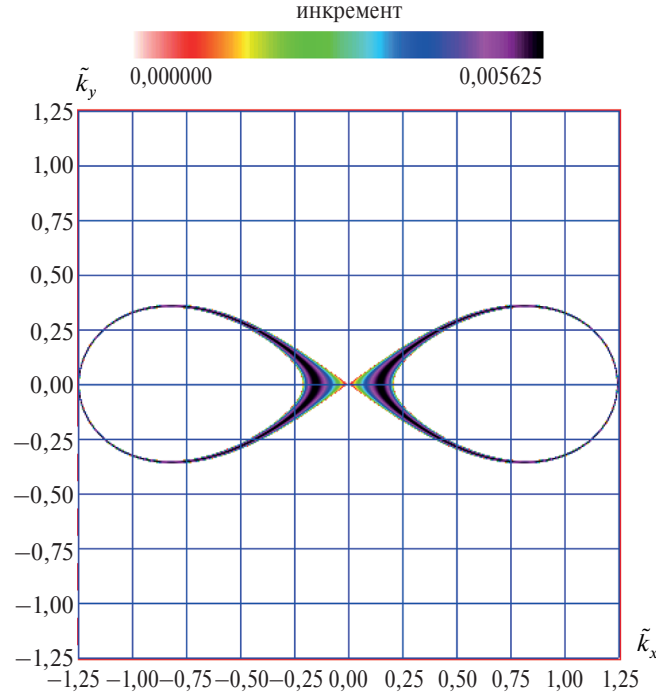


Рис. 1. Области неустойчивости гравитационных волн на плоскости $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ с учетом полной линейной дисперсии без нелинейной дисперсии для амплитуды волны $A = 0,15$

Fig. 1. Regions of instability of gravity waves on a plane $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$, taking into account the full linear dispersion without nonlinear dispersion for the wave amplitude $A = 0.15$

На плоскости $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ область неустойчивости имеет вид горизонтальной восьмерки, примыкающей к восьмёрке четырехволнового синхронизма. Точки $\tilde{k}_x = \pm 1$, $\tilde{k}_y = 0$, лежащие в середине петель восьмерки, всегда устойчивы. Максимальное (и одно и то же для данной амплитуды) значение инкремента $h_{\max} = A^2/4 = (0,15)^2/4 = 0,005625$ достигается при условии:

$$4 - 2 \left[(1 + \tilde{k}_x)^2 + \tilde{k}_y^2 \right]^{1/4} + 2 \left[(1 - \tilde{k}_x)^2 + \tilde{k}_y^2 \right]^{1/4} = \frac{A^2}{2}. \quad (19)$$

Последнее выполняется также на восьмерке, лежащей вблизи четырехволнового синхронизма. При малых расстройках $\tilde{k}_x, \tilde{k}_y \ll 1$ волна накачки неустойчива только относительно волн, имеющих отличную от нуля компоненту $\tilde{k}_x$, т. е. имеет место модуляционная неустойчивость. Для сравнения на рис. 2 приведена область неустойчивости в параболической аппроксимации дисперсионной зависимости (1), что соответствует использованию нелинейного уравнения Шредингера, при той же амплитуде волны:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{i}{4} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{i}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{i}{4} |A|^2 A. \quad (20)$$

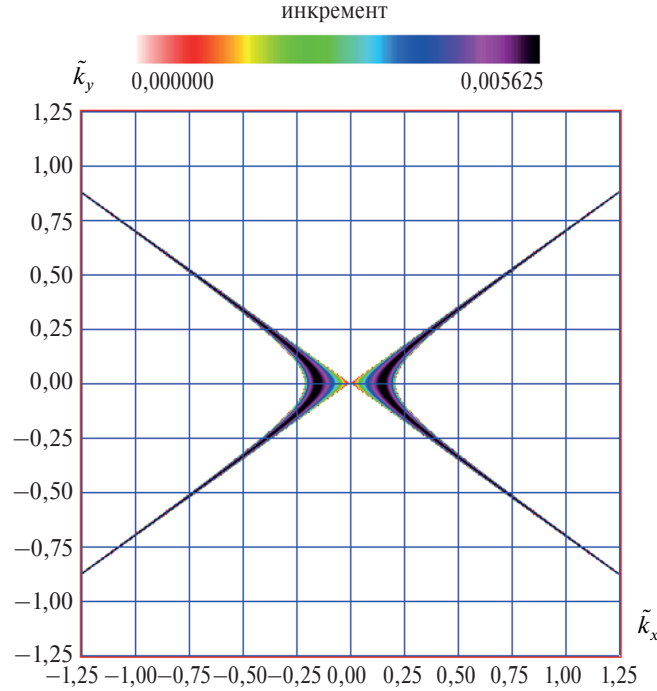


Рис. 2. Области неустойчивости гравитационных волн на плоскости $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ при параболической аппроксимации линейной дисперсии без нелинейной дисперсии для амплитуды волны $A = 0,15$

Fig. 2. Regions of instability of gravity waves on a plane $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ with a parabolic approximation of linear dispersion without non-linear dispersion for the wave amplitude $A = 0.15$

Она имеет характерный вид «усов», уходящих в бесконечность под углами $\varphi \sim \pm \arctg(1/\sqrt{2})$, причем амплитуда инкремента не убывает вблизи $\tilde{k}_x = \pm\sqrt{2}\tilde{k}_y$ при уходе на бесконечность.

Из сравнения рис. 1 и 2 видно, что линейная дисперсия волн возмущений на воде приводит к ограничению области неустойчивости, но не меняет величины инкремента.

3. Влияние дисперсии нелинейности гравитационных поверхностных волн

Выше мы не касались влияния дисперсии нелинейности. Рассмотрим её проявление на примере гравитационных волн на воде. Следуя Dysthe K.B. [18] и Hogan S.J. [19], используем следующие уравнения для описания огибающей волн в лабораторной системе координат:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{2i}{\omega_0} L(\mathbf{k}_0) A - 2iA + \frac{i}{4} |A|^2 A - \frac{1}{8} A^2 A_x^* - \frac{3}{4} |A|^2 A_x + i\Phi_x A. \quad (21)$$

и усреднённого потенциала Φ :

$$\Delta\Phi = 0. \quad (22)$$

Граничные условия для потенциала заключаются в обращении его в нуль на большой глубине при $z \rightarrow -\infty$, и выполнении равенства

$$\Phi_z = \frac{1}{4} |A|^2 \Big|_x \quad (23)$$

на поверхности жидкости при $z = 0$. В (21) сохранены только кубичные по A члены. Используя вышеописанную методику для инкремента возмущений, нормированного на несущую частоту, получим следующее выражение:

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{|A|^4}{4} \left[\left(1 - \frac{\tilde{k}_x^2}{K} \right)^2 - \left(\frac{\tilde{k}_x}{2} \right)^2 \right] - \left[2\omega_+ + 2\omega_- - 4 + \frac{|A|^2}{2} \left(1 - \frac{\tilde{k}_x^2}{K} \right) \right]^2}, \quad (24)$$

где $K = \sqrt{\tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2}$, $\omega_+ = \sqrt{\sqrt{(1 + \tilde{k}_x)^2 + \tilde{k}_y^2}}$ и $\omega_- = \sqrt{\sqrt{(1 - \tilde{k}_x)^2 + \tilde{k}_y^2}}$. Отметим, что присутствие потенциального течения (член с Φ_x в (22)) ведет к уменьшению эффективной амплитуды волны (именно изменяет $|A|^2$ на $|A|^2(1 - \tilde{k}_x^2/K)$ в выражении (24) по сравнению с (18)). Это уменьшение амплитуды сужает области неустойчивости и уменьшает инкремент в ней. Член $A^2 A_x^*/8$ дает поправку $\sim \tilde{k}_x^2/4$ в (24) и уменьшает инкремент при сильной расстройке. Области неустойчивости на плоскости $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ для амплитуды $A = 0,15$ показаны на рис. 3.

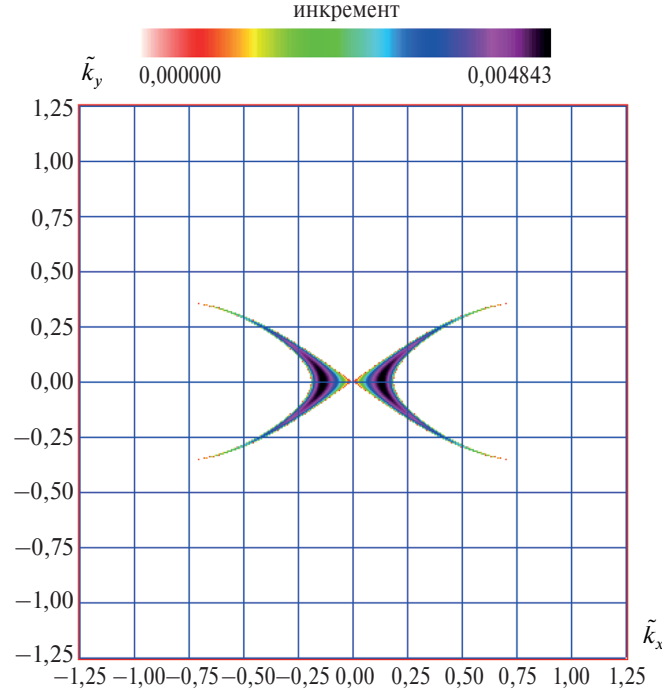


Рис. 3. Области неустойчивости гравитационных волн на плоскости $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ при учете полной линейной и нелинейной дисперсий для амплитуды волны $A = 0,15$

Fig. 3. Regions of instability of gravity waves on the plane $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$, taking into account the total linear and nonlinear dispersions for the wave amplitude $A = 0.15$

Из сравнения рис. 3, где учитывается нелинейная дисперсия, с рис. 1 и рис. 2, где она не учитывалась, следует, что последняя уменьшает инкременты, особенно при больших расстройках. Лабораторные эксперименты подтверждают, что использование нелинейного уравнения Шредингера приводит к завышенным значениям инкремента неустойчивости при больших расстройках [20]. Сравнение численных результатов, приведенных в [21], полученных с использованием теории [9, 10], показывает их согласие с полученными выше. Область неустойчивости сужается вследствие нелинейной дисперсии.

4. Влияние капиллярных эффектов на неустойчивость волн на поверхности жидкости

Для гравитационно-капиллярных волн на поверхности жидкости, когда учитывается поверхностное натяжение, дисперсионное уравнение имеет форму [15, 22, 23]:

$$\omega = \sqrt{g|\mathbf{k}_0| \left(1 + \bar{T}|\mathbf{k}_0|^2 \right)}, \quad (25)$$

где $\bar{T} = \gamma/g$, γ — нормированный на плотность воды коэффициент поверхностного натяжения. Мы введем безразмерный коэффициент $\tilde{T} = \bar{T}k_0^2$. Сначала рассмотрим случай отсутствия нелинейной дисперсии. Уравнение, описывающее распространение волнового пакета в безразмерных переменных имеет форму:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{2i}{\omega_0} \tilde{L}(\mathbf{k}_0) A - 2i\tilde{\omega} A + \frac{iq\tilde{\omega}}{4} |A|^2 A, \quad (26)$$

где $\tilde{L}(\mathbf{k}_0) A = \frac{1}{(2\pi)^s} \iint \tilde{F}(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}') \exp[-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\mathbf{k}'\mathbf{r}'] \bar{A}(\mathbf{r}') d\mathbf{k}' d\mathbf{r}'$,

$$\tilde{F}(\mathbf{k}_0 + \mathbf{k}') = \omega_0 \sqrt{\sqrt{(1 + \tilde{k}_x)^2 + \tilde{k}_y^2} \left\{ 1 + \tilde{T} \left[(1 + \tilde{k}_x)^2 + \tilde{k}_y^2 \right] \right\}}, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{1 + \tilde{T}},$$

Равенство (26) описывает самовоздействие гравитационно-капиллярных волн, в частности, модуляционную неустойчивость. Ее инкремент дается формулой:

$$h = \frac{\tilde{\omega}}{2} \sqrt{\frac{q^2 |A|^4}{4} - \left[\frac{2\Omega_+}{\tilde{\omega}} + \frac{2\Omega_-}{\tilde{\omega}} - 4 + \frac{q|A|^2}{2} \right]^2}, \quad (27)$$

где $\Omega_+ = \sqrt{\sqrt{(1 + \tilde{k}_x)^2 + \tilde{k}_y^2} + \tilde{T} \left(\sqrt{(1 + \tilde{k}_x)^2 + \tilde{k}_y^2} \right)^3}$, $\Omega_- = \sqrt{\sqrt{(1 - \tilde{k}_x)^2 + \tilde{k}_y^2} + \tilde{T} \left(\sqrt{(1 - \tilde{k}_x)^2 + \tilde{k}_y^2} \right)^3}$, $q = \frac{1 + \tilde{T}/8 + \tilde{T}^2/4}{(1 + \tilde{T})(1 - 2\tilde{T})}$.

Поверхностное натяжение слабо влияет на длинные волны. Так, область ненулевого инкремента практически не отличается от показанной на рис. 1 для волны длиной $\lambda \approx 2,5$ м и амплитудой $\bar{A} = 0,03$ м, распространяющейся с групповой скоростью $V_0 = 1$ м/с на границе вода-воздух со значением коэффициента натяжения $\gamma = 70$ см³/с² [22,23] и, следовательно, $\bar{T} \approx 0,000007$ м². Безразмерные параметры равны соответственно: амплитуда $A = 0,15$ и $\tilde{T} = 0,000042$.

Структура неустойчивости меняется для волн, распространяющихся с минимальными фазовыми и групповыми скоростями. Влияние поверхностного натяжения начинается при параметре $\tilde{T} \approx 0,05$. Области неустойчивости на плоскости $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ для $\tilde{T} = 0,083$ и $\tilde{T} = 0,203$, что соответствует волнам с длиной волны $\lambda \approx 0,058$ м и $\lambda \approx 0,036$ м, распространяющимся со скоростью $V_0 = 0,18$ м/с, и $V_0 = 0,176$ м/с, представлена на рис. 4 и рис. 5 соответственно.

Область неустойчивости суживается (рис. 4) и потом исчезает при $\tilde{k}_x \approx 0$.

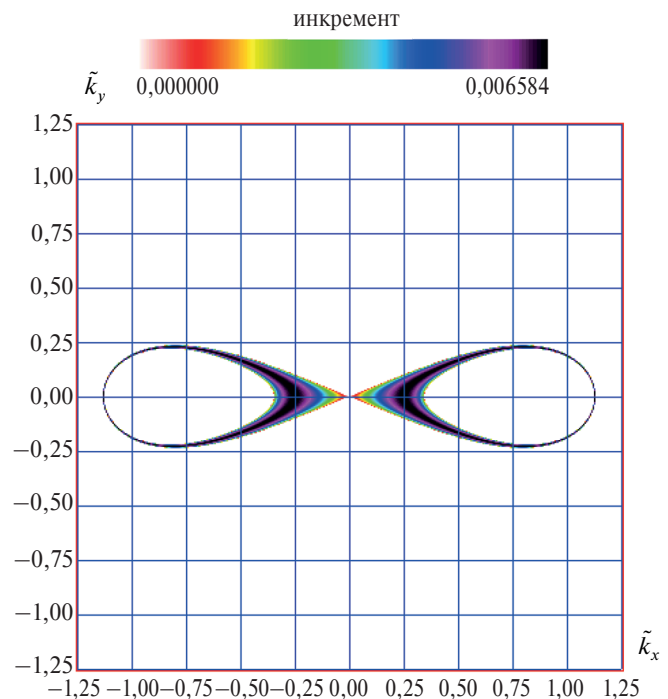
Границы исчезновения области неустойчивости могут быть определены из следующих соображений. Мы запишем параболическую аппроксимацию уравнения (26). Она имеет форму:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{i}{4} \left(\frac{(1 + 3\tilde{T})^2}{(1 + \tilde{T})^{3/2}} - \frac{12\tilde{T}}{(1 + \tilde{T})^{1/2}} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{i(1 + 3\tilde{T})}{2(1 + \tilde{T})^{1/2}} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{iq(1 + \tilde{T})^{1/2}}{4} |A|^2 A. \quad (28)$$

Неустойчивость исчезает, когда коэффициент при второй производной по x обращается в нуль (изменяет знак) при $\tilde{T} = 0,155$, длине волны $\lambda = 0,0433$ м, распространяющейся с групповой скоростью $V_0 \approx 0,176$ м/с. Более точный анализ с помощью уравнения (26) показывает, что область ненулевого инкремента сначала отдалается от нулевой точки и при длине волны $\lambda = 0,0261$ м на скорости $V_0 = 0,188$ м/с вся область становится

Рис. 4. Области неустойчивости гравитационно-капиллярных волн на плоскости $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ при учете полной линейной дисперсии без нелинейной дисперсии для амплитуды волны $A = 0,15$, поверхностного натяжения $\bar{T} = 0,000007$ м² и скорости $V_0 = 0,180$ м/с

Fig. 4. Regions of instability of gravity-capillary waves on a plane $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ taking into account the full linear dispersion without nonlinear dispersion for the wave amplitude $A = 0,15$, the surface tension $\bar{T} = 0,000007$ м² and velocity $V_0 = 0,180$ м/с



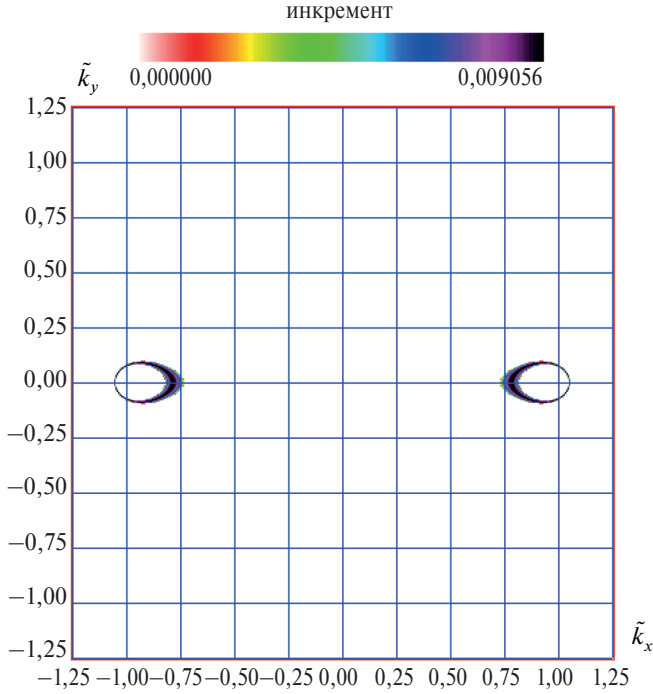


Рис. 5. Области неустойчивости гравитационно-капиллярных волн на плоскости $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ при учете полной линейной дисперсии без нелинейной дисперсии для амплитуды волны $A = 0,15$, поверхностного натяжения $\bar{T} = 0,000007$ м² и скорости $V_0 = 0,176$ м/с

Fig. 5. Regions of instability of gravity-capillary waves on a plane $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ taking into account the full linear dispersion without nonlinear dispersion for the wave amplitude $A = 0.15$, the surface tension $\bar{T} = 0,000007$ м² and velocity $V_0 = 0.176$ м/с

устойчивой. При дальнейшем уменьшении длины волны до $\lambda = 0,0236$ м и увеличении скорости до $V_0 = 0,195$ м/с, модуляционная неустойчивость возникает вновь. Она приобретает черты «коллапса», когда область неустойчивости становится эллиптической. Последняя показана на рис. 6 для длины волны $\lambda = 0,016$ м и скорости $V_0 = 0,232$ м/с. Заметим, что в области «коллапса» существуют сильные неустойчивости [10], которые не описываются уравнением (26).

Для гравитационно-капиллярных волн с учетом полной линейной и нелинейной дисперсий согласно [18, 19] уравнение для пакетов имеет форму:

$$\frac{\partial A}{\partial \tilde{t}} = \frac{2i}{\omega_0} \tilde{L}(\mathbf{k}_0) A - 2i\tilde{\omega} A + \frac{iq\tilde{\omega}}{4} |A|^2 A - \frac{\bar{u}q\tilde{\omega}}{8} A^2 A_x^* - \frac{3\bar{v}\tilde{\omega}}{4} |A|^2 A_x + i\Phi_x A_x, \quad (29)$$

где потенциальная функция удовлетворяет уравнению (22) с граничным условием на поверхности жидкости ($z = 0$):

$$\Phi_z = \frac{\tilde{\omega}}{4} |A|^2 \Big|_x \quad (30)$$

и коэффициенты

$$\bar{u} = \frac{1 - \tilde{T}}{1 + \tilde{T}}, \quad \bar{v} = \frac{1 - \tilde{T}/8 + 9\tilde{T}^2/4 - \tilde{T}^3/2 + \tilde{T}^4/2}{(1 + \tilde{T})^2(1 - 2\tilde{T})^2}. \quad (31)$$

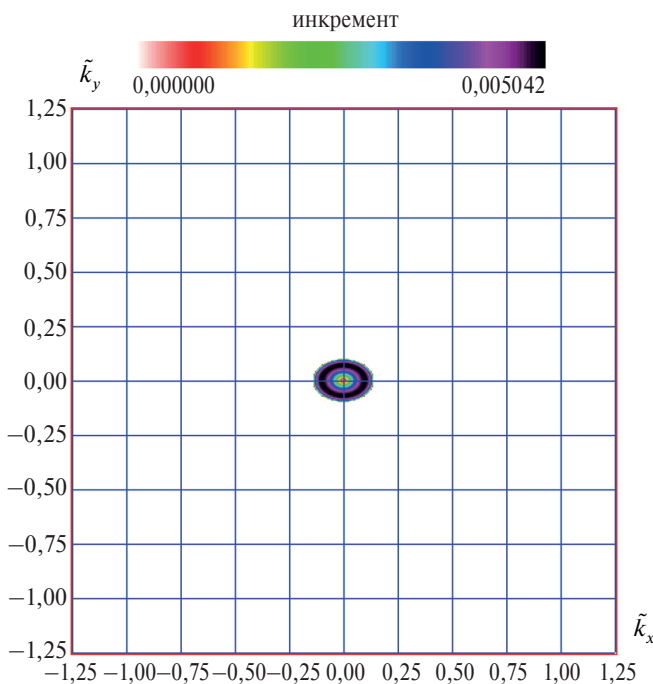


Рис. 6. Области неустойчивости гравитационно-капиллярных волн на плоскости $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ при учете только полной линейной дисперсии без нелинейной для амплитуды волны $A = 0,15$, поверхностного натяжения $\bar{T} = 0,000007$ м² и скорости $V_0 = 0,232$ м/с

Fig. 6. Regions of instability of gravity-capillary waves on a plane $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ taking into account the full linear dispersion without nonlinear dispersion for the wave amplitude $A = 0.15$, the surface tension $\bar{T} = 0,000007$ м² and velocity $V_0 = 0.232$ м/с

В этом случае инкремент записывается как

$$h = \frac{\omega}{2} \sqrt{\frac{|A|^4}{4} \left[\left(q - \frac{\tilde{k}_x^2}{K} \right)^2 - \left(\frac{q \tilde{u} \tilde{k}_x}{2} \right)^2 \right] \left[\frac{2\Omega_+}{\tilde{\omega}} + \frac{2\Omega_-}{\tilde{\omega}} - 4 + \frac{|A|^2}{2} \left(q - \frac{\tilde{k}_x^2}{K} \right) \right]^2}. \quad (32)$$

Нелинейная дисперсия в гравитационно-капиллярных волнах, как и в гравитационных волнах, ведет к подавлению неустойчивости при больших расстройках. Это видно из сравнения областей неустойчивости на плоскости $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ при $A = 0,15$, $\tilde{T} = 0,203$ и с учетом нелинейной дисперсии (рис. 7) и в ее отсутствии (рис. 5). В области существования неустойчивости типа «коллапса» нелинейная дисперсия ведет к сужению области неустойчивости и уменьшению инкремента в них. Это дает возможность описывать на основе предлагаемых уравнений распространение гравитационно-капиллярных волн на больших временах. Последнее верно как для гравитационных, так и гравитационно-капиллярных волн.

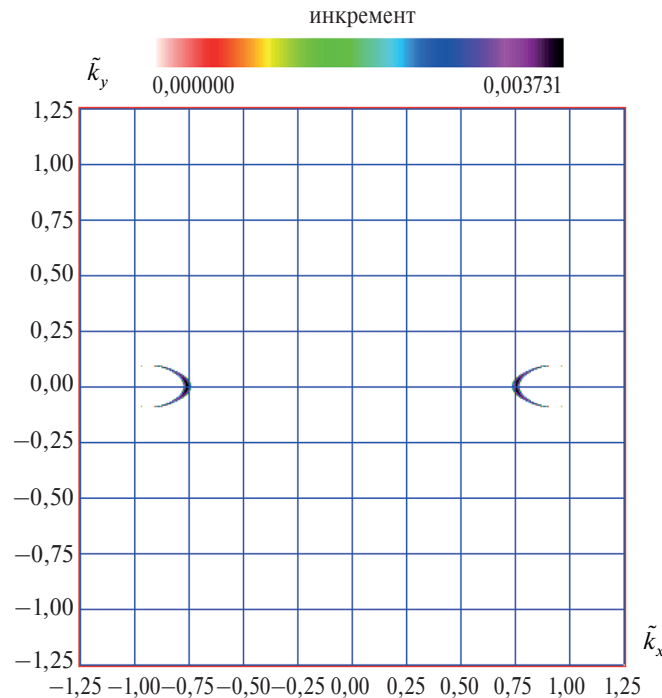


Рис. 7. Области неустойчивости гравитационно-капиллярных волн на плоскости $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ при учете полной линейной и нелинейной дисперсий для амплитуды волны $A = 0,15$, поверхностного натяжения $\tilde{T} = 0,000007 \text{ м}^2$ и скорости $V_0 = 0,176 \text{ м/с}$

Fig. 7. Regions of instability of gravity-capillary waves on a plane $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y)$ taking into account the full linear and nonlinear dispersion for the wave amplitude $A = 0.15$, the surface tension $\tilde{T} = 0,000007 \text{ м}^2$ and velocity $V_0 = 0.176 \text{ м/с}$

5. Заключение

Построена теория неустойчивости гравитационно-капиллярных волн на поверхности жидкости с учетом линейной и нелинейной дисперсий на основе интегродифференциального оператора. Исследованы инкременты неустойчивости. Выявлено, что использование интегродифференциального оператора для описания линейной дисперсии волн приводит к ограничению области неустойчивости по сравнению со случаем использования нелинейного уравнения Шредингера, а дисперсия нелинейности уменьшает инкременты, особенно при больших расстройках. Определены области неустойчивости. Показано, что структура неустойчивости для волн, распространяющимися с минимальными фазовыми и групповыми скоростями, меняется: область неустойчивости суживается и потом исчезает. Продемонстрировано, что при дальнейшем

уменьшении длины волны неустойчивость возникает вновь и приобретает черты «коллапса», когда область неустойчивости становится эллиптической. При этом нелинейная дисперсия ведет к сужению области неустойчивости и уменьшению инкремента в них, что дает возможность описывать на основе предлагаемых уравнений распространение гравитационно-капиллярных волн на больших временах.

Финансирование

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-27-00363, <https://rscf.ru/project/24-27-00363/>.

Funding

The study was funded by a grant from the Russian Science Foundation No 24-27-00363, <https://rscf.ru/project/24-27-00363/>.

Литература

1. Беспалов В.И., Таланов В.И. О нитевидной структуре пучков света в нелинейной жидкости // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1966. Т. 3, Вып. 12, С. 471.
2. Benjamin T.B., Feir J.E. The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory // Journal of Fluid Mechanics. 1967. Vol. 27, N 3. P. 417–430. doi:10.1017/S002211206700045X
3. Lighthill M.J. Contribution to the theory of waves in non-linear dispersive system // IMA Journal of Applied Mathematics. 1965. Vol. 1. P. 269–306. doi:10.1093/IMAMAT/1.3.269
4. Беспалов В.И., Литвак А.Г., Таланов В.И. Самовоздействие электромагнитных волн в кубических изотропных средах // Сб. Нелинейная оптика. Труды 2-го Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике / Под ред. Хохлова Р.В. Новосибирск: Наука, 1968. С. 428–463.
5. Власов С.Н., Таланов В.И. Самофокусировка волн. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1997, 218 с.
6. Островский Л.А. Распространение волновых пакетов и пространственно-временная самофокусировка в нелинейной среде // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1967. Т. 51, Вып. 4(10). С. 1189–1194.
7. Hsu H.C., Kharif C., Abid M., Chen Y.Y. A nonlinear Schrödinger equation for gravity–capillary water waves on arbitrary depth with constant vorticity. Part 1 // Journal of Fluid Mechanics. 2018. Vol. 854. P. 146–163. doi:10.1017/jfm.2018.627
8. Liao B., Dong G., Ma Y., Ma X., Perlin M. Modified nonlinear Schrödinger equation for gravity waves with the influence of wind, currents, and dissipation // Physics of Fluids. 2023. Vol. 35, N3. doi:10.1063/5.0137966
9. Захаров В.Е. О неустойчивости волн в нелинейной среде с дисперсией // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1967. Т. 51, Вып. 4. С. 1107–1114.
10. Захаров В.Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // Журнал прикладной механики и технической физики. 1968. Вып. 2. С. 86–94.
11. Захаров В.Е. Гамильтоновский формализм для волн в нелинейных средах с дисперсией // Известия вузов. Радиофизика. 1974. Т. 17. № 4. С. 431–453.
12. Власов С.Н., Копосова Е.В., Таланов В.И. Использование декомпозиции волновых уравнений и псевдо-дифференциальных операторов для описания непараксиальных пучков и широкополосных пакетов волн // Известия вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 4. С. 321–335.
13. Guyenne P., Kairzhan A., Sulem C. A Hamiltonian Dysthe equation for deep-water gravity waves with constant vorticity // Journal of Fluid Mechanics. 2022. Vol. 949, A50. doi:10.1017/jfm.2022.747
14. Баханов В.В., Таланов В.И. Трансформация нелинейных поверхностных волн в поле неоднородных течений // Сб. научн. труд. Приповерхностный слой океана. Физические процессы и дистанционное зондирование / Под ред. Е.Н. Пелиновского, В.И. Таланова. Н. Новгород: 1999. Т. 1. С. 81–107.
15. Bachanov V.V., Vlasov S.N., Kazakov V.I., Kemarskaya O.N., Koposova E.V., Talanov V.I. Nonlinear surface wave modulation by an inhomogeneous flow // Progress in nonlinear science. Proceedings of the International Conference dedicated to the 100th Anniversary of A.A. Andronov. Nizhny Novgorod: Institute of Applied Physics RAS, University of Nizhny Novgorod, 2002. Volume II. Frontiers of Nonlinear Science. P. 201–208.
16. Баханов В.В., Власов С.Н., Казаков В.И., Кемарская О.Н., Копосова Е.В., Шишкина О.Д. Моделирование внутренних и поверхностных волн реального океана в Большом термостратифицированном опытовом бассейне ИПФ РАН // Известия вузов. Радиофизика. 2003. Т. 46, № 7. С. 537–554.
17. Chowdhury D., Debsarma S. Fifth-order evolution equation of gravity–capillary waves // The ANZIAM Journal. 2017. Vol. 59, Iss. 1. P. 103–114. doi:10.1017/S144618111700027X

18. Dysthe Kristian B. Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves // Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences. 1979. Vol. 369. P. 105–114. doi:10.1098/rspa.1979.0154
19. Hogan S.J. The fourth-order evolution for deep-water gravity-capillary waves // Proceedings of the Royal Society of London, A. Mathematical and Physical Sciences. 1985. Vol. A402, P. 359–372. doi:10.1098/rspa.1985.0122
20. Ma Y., Ma X., Perlin M. Extreme waves generated by modulational instability on adverse currents // Physics of Fluids. 2013. T. 25. № 11. doi:10.1063/1.4832715
21. Yuen H.C., Lake B.M. Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves // Advances in Applied Mechanics. 1982. Vol. 22. P. 67–229. doi:10.1016/S0065-2156(08)70066-8
22. Океанология. Физика океана. том 2. Гидродинамика океана / ред. Каменкович В.М., Монин А.С. Наука: Москва, 1978. 456 с. С. 154–155.
23. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана / Пер. с англ., под ред. Кагана Б.М., Чаликова Д.В. Ленинград: Гидрометеиздат, 1980. 320 с.

References

1. Bespalov V.I., Talanov V.I. Filamentary Structure of Light Beams in Nonlinear Liquids. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*. 1966;3(12):307–310.
2. Benjamin T.B., Feir J.E. The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory. *Journal of Fluid Mechanics*. 1967;27(3):417–430. doi:10.1017/S002211206700045X
3. Lighthill M.J. Contribution to the theory of waves in non-linear dispersive system. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 1965;1:269–306. doi:10.1093/IMAMAT/1.3.269
4. Bespalov V.I., Litvak A.G., Talanov V.I. Self-action of electromagnetic waves in cubic isotropic media. *Nonlinear optics. Proceedings of the 2nd All-Union Symposium on Nonlinear Optics* / Ed. by Khokhlov R.V. Novosibirsk: Nauka; 1968. P. 428–463 (in Russian).
5. Vlasov S.N., Talanov V.I. *Self-focusing of waves*. Nizhnii Novgorod: IPF RAS Publ.; 1997. 218 p. (in Russian).
6. Ostrovskii L.A. Propagation of Wave Packets and Space-time Self-focusing in a Nonlinear Medium. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1967;24(4):797–800.
7. Hsu HC, Kharif C, Abid M, Chen YY. A nonlinear Schrödinger equation for gravity–capillary water waves on arbitrary depth with constant vorticity. Part 1. *Journal of Fluid Mechanics*. 2018;854:146–163. doi:10.1017/jfm.2018.627
8. Liao B., Dong G., Ma Y., Ma X., Perlin M. Modified nonlinear Schrödinger equation for gravity waves with the influence of wind, currents, and dissipation. *Physics of Fluids*. 2023;35(3):037103. doi:10.1063/5.0137966
9. Zakharov V.E. The Instability of Waves in Nonlinear Dispersive Media. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1967;24(4):740–744.
10. Zakharov V.E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1968;9(2):190–194. doi:10.1007/BF00913182
11. Zakharov V.E. The Hamiltonian Formalism for waves in nonlinear media having dispersion. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 1974;17(4):326–343. doi:10.1007/BF01036794
12. Vlasov S.N., Koposova E.V., Talanov V.I. Use of decomposition of the wave equations and pseudo-differential operators for the description of nonparaxial beams and broadband wave packets. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2006;49(4):288–301. doi:10.1007/s11141-006-0062-9
13. Guyenne P, Kairzhan A, Sulem C. A Hamiltonian Dysthe equation for deep-water gravity waves with constant vorticity. *Journal of Fluid Mechanics*. 2022;949: A50. doi:10.1017/jfm.2022.747
14. Bakhanov V.V., Talanov V.I. Transformation of nonlinear surface waves in the field of inhomogeneous flows. *Proceedings of «The near-surface layer of the ocean. Physical processes and remote sensing»* / Ed. by E.N. Pelinovskii, V.I. Talanov. N. Novgorod; 1999;1:81–107 (in Russian).
15. Bakhanov V.V., Vlasov S.N., Kazakov V.I., Kemarskaya O.N., Koposova E.V., Talanov V.I. Nonlinear surface wave modulation by an inhomogeneous flow. *Progress in nonlinear science. Volume II. Frontiers of Nonlinear Science. Proceedings of the International Conference dedicated to the 100th Anniversary of A.A. Andronov*. Nizhny Novgorod: Institute of Applied Physics RAS, University of Nizhny Novgorod; 2002. P. 201–208.
16. Bakhanov V.V., Vlasov S.N., Kazakov V.I., Kemarskaya O.N., Koposova E.V., Shishkina O.D. Modelling of internal and surface waves of the real ocean in the large thermost stratified experimental tank at the Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2003;46(7):486–501. doi:10.1023/B: RAQE.0000019865.97760.2c
17. Chowdhury D, Debsarma S. Fifth-order evolution equation of gravity–capillary waves. *The ANZIAM Journal*. 2017;59(1):103–114. doi:10.1017/S144618111700027X

18. Dysthe K.B. Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*. 1979;369:105–114. doi:10.1098/rspa.1979.0154
19. Hogan S.J. The fourth-order evolution for deep-water gravity-capillary waves. *Proceedings of the Royal Society. A. Mathematical and Physical Sciences*. 1985;402(1823):359–372. doi:10.1098/rspa.1985.0122
20. Ma Y., Ma X., Perlin M., Dong G. Extreme waves generated by modulational instability on adverse currents. *Physics of Fluids*. 2013, 25(11), 4109. doi:10.1063/1.4832715
21. Yuen H.C., Lake B.M. Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves. *Advances in Applied Mechanics*. 1982, 22, 67–229. doi:10.1016/S0065–2156(08)70066–8
22. *Oceanology. Ocean Physics*. Volume 2. Ocean Hydrodynamics / Ed. by Kamenkovich V.M., Monin A.S. Moskva: Nauka; 1978. 456 p. P. 154–155. (in Russian).
23. Phillips O.M. *The Dynamics of the Upper Ocean, 2nd Edition*. Cambridge University Press; 1977. 336 p.

Об авторах

БАХАНОВ Виктор Владимирович, ведущий научный сотрудник ИПФ РАН, кандидат физико-математических наук, ORCID: 0009-0004-1075-4401, WoS ResearcherID: ISV-2716-2023, Scopus AuthorID: 6603623205, SPIN-код (РИНЦ): 1031-9060, e-mail: bakh@ipfran.ru

ВЛАСОВ Сергей Николаевич, ведущий научный сотрудник ИПФ РАН, доктор физико-математических наук, Scopus AuthorID: 9635365600, РИНЦ AuthorID: 18637, e-mail: vlasov@ipfran.ru

КОПОСОВА Елена Викторовна, старший научный сотрудник ИПФ РАН, кандидат физико-математических наук, ORCID: 0000-0001-8066-8980, WoS ResearcherID: ABA-2386-2021, Scopus AuthorID: 6603370107, SPIN-код (РИНЦ): 7273-7934, e-mail: ev_koposova@ipfran.ru