

DOI 10.59887/2073–6673.2025.18(1)-2

УДК 551.466.3

© К. В. Фокина\*, 2025

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 117997, Москва, Нахимовский проспект, д. 36  
\*fokinakarina@yandex.ru

## ТРЕХМЕРНАЯ ФАЗО-РАЗРЕШАЮЩАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ДЛЯ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Статья поступила в редакцию 21.06.2024, после доработки 08.01.2025, принята в печать 18.02.2025

### Аннотация

Статья посвящена модификации трёхмерной фазо-разрешающей модели FWM (Full Wave Model) потенциальных волн (изначально сформулированной для моделирования волн в глубоководных условиях) для моделирования волн на конечной глубине, а также оценке области применимости предложенной модели. Проведены численные эксперименты для квазистационарного волнового режима по результатам которых рассчитывается дисперсионное соотношение для волн на конечной глубине, заданных в начальных условиях спектром JONSWAP. Расчёты проводились для двух вариантов разрешения: однонаправленные и разнонаправленные волны, а также для различных безразмерных значений глубины. На основе рассчитанных статистических характеристик показано совпадение теоретических и модельных расчётов дисперсионного соотношения с удовлетворительной точностью, что позволяет сделать вывод о корректности работы модели в условиях конечности глубины для рассматриваемого случая квазистационарного режима. Предложенная модификация модели применима для моделирования динамики многомодового волнового поля для глубины не меньше, чем  $0,1$  длины волны пика спектра, что значительно расширяет область применения модели FWM.

**Ключевые слова:** ветровые волны, фазо-разрешающее моделирование, конечная глубина, фазовая скорость, дисперсионное соотношение, трёхмерное моделирование волн

© К. В. Фокина\*, 2025

Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, 36 Nakhimovsky Prosp., Moscow 117997, Russia  
\*fokinakarina@yandex.ru

## THREE-DIMENSIONAL PHASE-RESOLVING SURFACE WAVE MODEL FOR FINITE DEPTH

Received 21.06.2024, Revised 08.01.2025, Accepted 18.02.2025

### Abstract

The paper presents modification of the three-dimensional phase-resolving FWM (Full Wave Model) model of potential waves to simulate the evolution of waves on finite depth water and to determine the range of applicability of the proposed model. Calculations have been carried out to illustrate the fulfillment of the dispersion relation for waves in finite depth, initially assigned by JONSWAP spectrum. The quasi-stationary regime is considered. Calculations were carried out for two resolution options (almost one-dimensional and multidirectional waves) and for various dimensionless depth values. The agreement between theoretical and model calculations of the dispersion relation is shown with a sufficient accuracy on the base of calculated statistic characteristics. The proposed modification of the model is applicable for simulating the multimode wave field for a depth of no less than  $0.1$  of the maximum wavelength, which significantly expands the field of its application.

**Keywords:** wind waves, phase-resolving modeling, finite depth, phase velocity, dispersion relation, three-dimensional wave modeling

### 1. Введение

Изучение развития поверхностных волн под действием ветра при различных условиях является классическим предметом исследований в гидродинамике. В большинстве работ, посвящённых моделированию ветровых волн, рассматриваются глубоководные условия. И хотя подобные исследования позволяют

---

Ссылка для цитирования: Фокина К.В. Трёхмерная фазо-разрешающая модель поверхностных волн для конечной глубины // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2025. Т. 18, № 1. С. 19–30. doi:10.59887/2073–6673.2025.18(1)-2  
For citation: Fokina K.V. Three-dimensional Phase-Resolving Surface Wave Model for Finite Depth. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2025;18(1):19–30. doi:10.59887/2073–6673.2025.18(1)-2

получить ценную информацию о сложной физике волновых процессов, изучение волн на конечной глубине является значимым и перспективным направлением, особенно если учесть, что именно в относительно небольших мелководных прибрежных районах сосредоточена основная часть человеческой деятельности.

Мелководные районы фактически представляют собой другую физическую среду, где волны напрямую взаимодействуют со дном различными способами и теряют свою энергию и импульс за счёт обрушения более интенсивно, чем волны на глубокой воде. Спектр ветрового волнения и его эволюция на конечной глубине имеют ряд специфических особенностей [1–3].

Систематические попытки понять и описать физику генерации поверхностных волн на конечной глубине были сделаны в различных экспериментальных [4–7], а также в аналитических исследованиях, включая классические работы Захарова [8, 9], и работы Монтальво [10, 11], где были предприняты попытки создания физико-математических моделей, позволяющих понять прибрежные процессы генерации ветрового волнения.

Большое внимание сегодня уделяется изучению волн на конечной глубине с помощью математических моделей [12–16]. В частности модели, основанные на уравнениях Буссинеска [17], которые широко применяются при моделировании прибрежных волн и течений для сложных батиметрических конфигураций [18–20]. Существуют также так называемые Mild Slope Equation (MSE) модели [21], описывающие волны, которые распространяются в водоёмах разной глубины и трансформируются, взаимодействуя с препятствиями, например, со скалами, дамбами или волнорезами. Кроме того, существует ряд задач, в которых важную роль играют эффекты взаимодействия ветровых волн и неоднородного профиля дна. Такие эффекты исследовались в работах Рубана на основе модели в конформных координатах для случая искривлённого неподвижного дна [22] и для подвижного дна [23].

В настоящей работе сделан первый шаг в моделировании ветровых волн на конечной глубине на основе трёхмерной фазо-разрешающей модели FWM (Full Wave Model) [24] (ранее модель использовалась только для волн на бесконечно большой глубине).

Фазо-разрешающим моделированием волн называется подход, основанный на прямом моделировании эволюции поверхности и трёхмерного поля потенциала скорости [25]. Этот подход позволяет воспроизводить полную информацию о волновых процессах в трёхмерном пространстве и времени, несравненно более полную, чем подход, используемый в усредненных по фазам (спектральных) эволюционных моделях. Необходимость в использовании фазо-разрешающих моделей возникает в случаях, когда необходимо получить детальную информацию об индивидуальных волнах (например, при моделировании процесса обрушения волн [26]) или же в задачах, где затруднительно или невозможно использование спектральных моделей (например, при моделировании экстремальных волн [27]). Естественно, этот метод оказывается намного более сложным, чем спектральный, что ограничивает его применение для моделирования волновых процессов в реальных условиях. Главная роль фазо-разрешающих моделей состоит в том, что они могут рассматриваться, как лабораторные модели, свободные от недостатков, связанных с ограничением размеров, существованием помех, неточностей и недостатком измерений. Из-за ограниченности размеров чисто лабораторные эксперименты могут воспроизводить только быстрые нелинейные взаимодействия, тогда как продолжительность процессов в математических моделях ограничена только вычислительными ресурсами и, как следствие, временем вычислений. Поэтому математическая модель оказывается идеальным средством изучения и параметризации физических процессов в волнах, таких как турбулентность, преобразование энергии и импульса.

На механизмы роста волн под действием ветра на конечной глубине влияют различные факторы, например, изменения скорости и направления ветра во времени, батиметрия, потеря энергии волн вследствие трения о дно, турбулентность или нелинейные взаимодействия между волнами. Следует отметить, что в задачу данной статьи не входит рассмотрение влияния всех этих факторов. Основной задачей представленной работы на данном этапе является проверка применимости версии модели в условиях конечной глубины. Другая задача заключалась в определении предельного значения глубины, при котором модель может быть использована для моделирования волн в условиях неменяющегося волнового спектра.

## 2. Описание трёхмерной модели волн FWM для мелководных условий

Как было отмечено ранее, в работе используется трёхмерная модель волн FWM, основанная на полных уравнениях потенциальной динамики идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Рассматриваются периодические условия по горизонтальным координатам  $x$  и  $y$ . Условия периодичности упрощают построение модели, поскольку в таком случае возможно использовать преобразование Фурье

для построения численной схемы. Вертикальная ось ориентирована вверх, положение невозмущённой границы  $z = 0$  расположено на свободной поверхности. Все обозначения переменных в настоящей статье аналогичны обозначениям, использованным в [24] для сохранения преемственности.

В модели используется нестационарная, следующая поверхности система координат:

$$\xi = x, \quad \vartheta = y, \quad \zeta = z - \eta(\xi, \vartheta, \tau), \quad \tau = t, \quad (1)$$

где функция  $\eta(x, y, t) = \eta(\xi, \vartheta, \tau)$  описывает форму поверхности:

$$\eta(\xi, \vartheta, \tau) = \sum_{-M_x < k_x < M_x, -M_y < k_y < M_y} h_{k_x, k_y}(\tau) \Theta_{k_x, k_y}, \quad (2)$$

$h_{k_x, k_y}$  — коэффициенты Фурье для возвышения поверхности,  $\Theta_{k_x, k_y}$  — базовые функции разложения Фурье, представленные в виде матрицы:

$$\Theta_{k_x, k_y} = \begin{cases} \cos(k_x \xi + k_y \vartheta) & 1 \leq k_x \leq M_x & -M_y \leq k_y < M_y \\ \cos(k_y \xi) & k_x = 0 & 0 \leq k_y \leq M_y \\ \sin(k_y \xi) & k_x = 0 & -M_y \leq k_y \leq -1 \\ \sin(k_x \xi + k_y \vartheta) & -M_x \leq k_x \leq -1 & -M_y \leq k_y < M_y \end{cases} \quad (3)$$

( $M_x, M_y$  — число мод в направлении  $x$  и  $y$  соответственно).

Трёхмерные уравнения потенциальных волн принимают следующий вид:

$$\eta_\tau = -\eta_\xi \varphi_\xi - \eta_\vartheta \varphi_\vartheta + (1 + \eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2) \Phi_\zeta, \quad (4)$$

$$\varphi_\tau = -\frac{1}{2} (\varphi_\xi^2 + \varphi_\vartheta^2 - (1 + \eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2) \Phi_\zeta^2) - \eta - p_0, \quad (5)$$

$$\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\vartheta\vartheta} + \Phi_{\zeta\zeta} = 2\eta_\xi \Phi_{\xi\zeta} + 2\eta_\vartheta \Phi_{\vartheta\zeta} + (\eta_{\xi\xi} + \eta_{\vartheta\vartheta}) \Phi_\zeta - (\eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2) \Phi_{\zeta\zeta}, \quad (6)$$

где  $\Phi$  — трёхмерный потенциал скорости,  $p_0$  — внешнее давление,  $\varphi$  — значение потенциала скорости  $\Phi$  на поверхности  $z = 0$ .

Уравнения модели и все последующие результаты представлены в безразмерной форме с использованием следующих масштабов: длины  $L$  ( $2\pi L$  — размерная длина области), времени  $L^{1/2} g^{-1/2}$ , потенциала скорости  $L^{3/2} g^{1/2}$  ( $g$  — ускорение свободного падения), давления  $Lg$ . В случае, когда число мод в направлениях  $x$  и  $y$  разное, стоит рассматривать разные масштабы длины в этих направлениях —  $L$  и  $L_y$ . Поскольку моделируется квадратная область ( $0 < \xi < 2\pi$ ,  $0 < \vartheta < 2\pi$ ), горизонтальные производные по  $y$  в уравнениях (4)–(6) умножаются на коэффициент  $\gamma = L/L_y$ .

Решение системы уравнений (4)–(6) производится с учётом предположения, что потенциал скорости может быть представлен в виде суммы линейной (или аналитической, т. е. имеющей аналитическое решение)  $\bar{\Phi}$ , ( $\bar{\varphi} = \bar{\Phi}(\xi, \vartheta, 0)$ ) и нелинейной  $\tilde{\Phi}$ , ( $\tilde{\varphi} = \tilde{\Phi}(\xi, \vartheta, 0)$ ) компонент. Аналитическая компонента  $\bar{\Phi}$  описывается уравнением Лапласа:

$$\bar{\Phi}_{\xi\xi} + \bar{\Phi}_{\vartheta\vartheta} + \bar{\Phi}_{\zeta\zeta} = 0 \quad (7)$$

с известным решением:

$$\bar{\Phi}(\xi, \vartheta, \zeta, \tau) = \sum_{k,l} \bar{\varphi}_{k_x, k_y}(\tau) \exp(|k|\zeta) \Theta_{k_x, k_y}, \quad (8)$$

где  $\bar{\varphi}_{k_x, k_y}$  — коэффициенты Фурье аналитической компоненты потенциала на поверхности,  $|k| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ . Решение удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{aligned} \zeta = 0: \quad \bar{\Phi} &= \bar{\varphi} \\ \zeta \rightarrow -\infty: \quad \bar{\Phi}_\zeta &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (6) принимает вид:

$$\tilde{\Phi}_{\xi\xi} + \tilde{\Phi}_{\vartheta\vartheta} + \tilde{\Phi}_{\zeta\zeta} = 2\eta_\xi \Phi_{\xi\zeta} + 2\eta_\vartheta \Phi_{\vartheta\zeta} + (\eta_{\xi\xi} + \eta_{\vartheta\vartheta}) \Phi_\zeta - (\eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2) \Phi_{\zeta\zeta} \quad (10)$$

и решается при граничных условиях:

$$\begin{aligned} \zeta = 0: \quad \tilde{\Phi} &= 0 \\ \zeta \rightarrow -\infty: \quad \tilde{\Phi}_\zeta &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Граничные условия (9) и (11) записаны для условий бесконечно большой глубины. В условиях конечной глубины нормальная скорость обращается в ноль на дне, т. е.  $\bar{\Phi}_z(\xi, \vartheta, \zeta = -H_w, \tau) = 0$  и  $\bar{\Phi}_z(\xi, \vartheta, \zeta = -H_w, \tau) = 0$  (где  $H_w$  — безразмерная глубина области).

Правая часть уравнения (10) содержит полный потенциал скорости  $\Phi = \check{\Phi} + \bar{\Phi}$ .

Вертикальная производная аналитической компоненты потенциала рассчитывается по формуле:

$$\bar{\Phi}_z = \sum_{k_x, k_y} |k| \bar{\varphi}_{k_x, k_y} \Theta_{k_x, k_y}. \quad (12)$$

В используемой версии модели используется простейшая система координат (1), поэтому нижнее граничное условие для потенциала скорости должно ставиться на глубине  $H_w - \eta(\xi, \vartheta, \tau)$ . Однако в численной модели нижнее граничное условие задаётся на фиксированной в координате  $\zeta$  конечной глубине  $H_w$ , поэтому искривлённость нижней границы области не учитывается. Зависимость глубины от горизонтальных координат не учитывается. Таким образом, надо иметь в виду, что модель, сформулированная в координатах (1), применима для процессов, в которых возмущения поверхности малы по сравнению с глубиной, т. е. для условия:

$$\max(|\eta|) \ll H_w, \quad (13)$$

где глубина  $H_w$  достаточно велика для того, чтобы считать, что волновые возмущения на этой глубине очень малы, и пренебрежение ими не влияет на результаты. Заметим, что аналитически не составляет труда ввести более сложную замену вертикальной координаты, типа  $\zeta = z - \eta f(\bar{\zeta})$ , где  $\bar{\zeta} = \zeta / H_w$ , а функция  $f(\bar{\zeta})$  равна 1 на поверхности  $\bar{\zeta} = 0$  и равна 0 на  $\bar{\zeta} = 1$ . Однако на практике это приводит к усложнению уравнений и, как следствие, к значительному замедлению вычислений, поэтому в настоящее время эта замена переменных не используется. Замена переменных, указанная выше, позволяет более универсальную формулировку, допускающую исследования волн на произвольно малой глубине вплоть до глубины порядка высоты волны на невозмущённой поверхности.

При несоблюдении условия (13) решение становится неверным и даже возникает вычислительная неустойчивость (выражающаяся в расходимости итераций при решении уравнения (10)) поскольку для расчёта линейной компоненты вертикальной скорости  $\bar{w}$  используется формула (12), верная только для глубины  $\zeta \gg L_p$  (где  $L_p = 2\pi / k_p$  — безразмерная длина волны пика спектра).

### 3. Формулировка модели FWM для условий конечной глубины

Расширение применимости модели на случай конечной глубины основано на замене в граничных условиях формулы для линейной компоненты потенциала скорости для бесконечной глубины (8) на формулу для конечной глубины

$$\bar{\Phi}(\xi, \vartheta, \zeta, \tau) = \sum_{k_x, k_y} \bar{\varphi}_{k_x, k_y}(\tau) \frac{\cosh(|k|(\zeta + H_w))}{\cosh(|k|H_w)} \Theta_{k_x, k_y}. \quad (14)$$

Формула (14) далее используется для вычисления правой части уравнения (10) и для задания верхнего граничного условия для линейной компоненты вертикальной скорости (12) на конечной глубине:

$$\bar{\Phi}_z(\xi, \vartheta, \zeta) = |k| \varphi_{k_x, k_y} \tanh(|k|H_w) \Theta_{k_x, k_y}. \quad (15)$$

Формула (15) также используется далее при расчёте правой части уравнения (10). Уменьшение глубины области практически не влияет на вертикальный профиль нелинейной компоненты потенциала, так как она уменьшается с глубиной быстрее, чем линейная и её значения меньше на 1–2 порядка. Исходя из этого, в работе сделано предположение, что для применения модели в условиях конечной глубины достаточно внести изменения только в описание линейной компоненты потенциала скорости и, соответственно, линейной компоненты вертикальной скорости.

Производные линейной составляющей в (7) рассчитываются аналитически. Используется преобразование Фурье для горизонтальных производных, вертикальные производные вычисляются с помощью конечно-разностной схемы второго порядка точности на неравномерной сетке, заданной соотношением  $\Delta\zeta_{j+1} = \chi \Delta\zeta_j$  ( $\Delta\zeta$  — вертикальный шаг,  $\chi$  — коэффициент растяжения, который в расчетах по модели принимается равным 1,2). Неравномерная сетка обеспечивает повышение точности вблизи поверхности для улучшения аппроксимации экспоненциально затухающих мод.

Уравнение (10) для нелинейной компоненты потенциала скорости  $\check{\Phi}$  решается в пространстве Фурье с помощью трехдиагонального матричного алгоритма (прогонки) [28]. Алгоритм обобщён на трёхмерный

случай на основе Фурье-представления по продольным координатам  $\xi$  и  $\vartheta$ . Правая часть уравнения (10) решается итерациями с последовательной коррекцией правой части. Начальное значение  $\tilde{\Phi}$  равно нулю, в процессе вычислений это значение заменяется на значение с предыдущего шага по времени. Итерации продолжаются до тех пор, пока остаточная ошибка для уравнения (10) не будет меньше максимальной невязки  $\varepsilon \sim (10^{-4} - 10^{-6}) \|\eta\|$  (где  $\|\eta\|$  — норма, принятая равной по порядку величины дисперсии возмущения поверхности). Детали численной схемы и результаты всесторонней проверки модели можно найти в [34]. Уравнения (4)–(6) интегрируются по времени по схеме Рунге-Кутты четвёртого порядка, уравнение (10) решается на каждом промежуточном шаге схемы.

Модель FWM включает в себя алгоритмы, описывающие такие физические процессы как приток энергии, диссипацию за счёт обрушения и диссипацию хвостовой части спектра. Приток энергии рассчитывается на основе теории Майлза [29], согласно которой Фурье-компоненты поверхностного давления связаны с Фурье-компонентами возвышения поверхности через так называемую  $\beta$ -функцию, описание формы которой можно найти в [30]. Нелинейный поток энергии, направленный в область высоких волновых чисел, формирует форму спектрального хвоста, что может привести к накоплению энергии вблизи предельного волнового числа. Рост амплитуд при высоких волновых числах сопровождается ростом локальной крутизны и численной неустойчивостью, поэтому в модель также включён алгоритм диссипации хвостовой части спектра, основанный на использовании высокоселективного фильтра, моделирующего нелинейную вязкость. Основной процесс диссипации (обрушение волны) описывается с помощью схемы, которая основана на операторе диффузии со специальным коэффициентом диффузии, который в свою очередь зависит от локальной криволинейности поверхности. В настоящей работе схема для расчета диссипации за счет обрушения не используется. Детали всех упомянутых схем параметризации подробно описаны в [24].

#### 4. Параметры расчётов

Модель в новых условиях запускалась для девяти различных значений глубины. Значение глубины в каждом эксперименте принималось постоянным и рассчитывалось по формуле:

$$H_w = \frac{L_p}{m}, \quad (16)$$

где  $m = 1, 2, 3 \dots 9$ .

Интегрирование по времени проводилось по схеме Рунге-Кутты четвёртого порядка с шагом по времени 0,01 до конечного времени  $T = 10000$ . Для явной схемы интегрирования по времени критерий устойчивости имеет вид  $\Delta t \leq C \omega_{\max}^{-1}$ , где  $\Delta t$  — шаг по времени;  $\omega_{\max}$  — максимальная частота волн;  $C$  — константа, зависящая от схемы (для схемы Рунге-Кутты  $C = 2\sqrt{2}$ ). В [24] отмечено, что такая оценка не всегда работает в модели FWM из-за сильных нелинейных эффектов, поэтому выбор шага по времени осуществляется эмпирически, исходя из соображений устойчивости численной схемы и точности сохранения энергии.

Начальные условия задавались спектром JONSWAP [31] при  $U/c_p = 1$  ( $U$  — скорость ветра,  $c_p$  — фазовая скорость в пике спектра) с максимумом на безразмерном волновом числе  $k_p = 13$ . Несмотря на то, что спектр JONSWAP был получен для глубоководных условий, он используется и в экспериментах для конечной глубины с целью задания реалистичного волнового спектра в начальных условиях. Рассматривается случай так называемого квазистационарного режима, поэтому диссипация за счет обрушения волн отсутствовала, а очень малый приток энергии полностью компенсировался высокочастотной диссипацией.

Модель FWM интегрировалась при двух вариантах разрешения: 1)  $M_x = 256$  и  $M_y = 2$ ; 2)  $M_x = 256$  и  $M_y = 32$  мод в направлении  $x$  и  $y$ , что соответствует  $N_x \times N_y = (1024 \times 8)$  и  $N_x \times N_y = (1024 \times 128)$  узлов сетки в физическом пространстве горизонтальных координат. Такие значения являются оптимальными для заданного спектра JONSWAP, чтобы обеспечить расчёт частоты, затратив при этом минимально возможное время на вычисления. Вертикальные производные аппроксимировались на растянутой сетке  $\Delta \zeta_{j+1} = \chi \Delta \zeta_j$ , где  $\chi = 1, 2$  и  $L_w = 30, j = 1, 2, 3 \dots, L_w$ .

#### 5. Обсуждение результатов

Результаты рассчитанных по теоретическим формулам дисперсионных соотношений для глубоководных условий ( $\omega^2 = |k|$ , где  $\omega$  и  $k$  — частота и волновое число соответственно) и для волн на произвольной глубине ( $\omega^2 = |k| \tanh(|k| H_w)$ ) представлены в виде пунктирной и сплошной кривых на рис. 1 разрешения  $256 \times 2$  и на рис. 2 для разрешения  $256 \times 32$ . Каждая панель соответствует определённому значению глубины

$H_w$ . Как следует из рисунка, по мере уменьшения глубины отклонение дисперсионного соотношения для волн на глубокой воде от дисперсионного соотношения, полученного для условий конечной глубины, становится более отчётливым, главным образом в низкочастотной части спектра.

Наибольший интерес представляет сравнение значений частоты, рассчитанных по теоретической формуле для конечной глубины и по результатам численных экспериментов. По близости таких значений можно судить о корректности работы модели в условиях конечной глубины.

В процессе работы модели рассчитываются коэффициенты Фурье для поля возвышений  $\eta_{k_x, k_y}$ , которое описывает волны, каждая из которых движется со своей фазовой скоростью и, соответственно, со своей частотой. Возникает задача рассчитать поле частот по имеющимся коэффициентам Фурье для возвышения поверхности.

Дифференцируя поле возвышения, представленного рядом Фурье, по времени, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \tau} &= \sum_{-M_x < k_x < M_x} \sum_{-M_y < k_y < M_y} \frac{\partial \eta_{k_x, k_y}}{\partial \tau} \Theta_{k_x, k_y} + \eta_{k_x, k_y} \frac{\partial \Theta_{k_x, k_y}}{\partial \tau} = \\ &= \sum_{-M_x < k_x < M_x} \sum_{-M_y < k_y < M_y} \frac{\partial \eta_{k_x, k_y}}{\partial \tau} \Theta_{k_x, k_y} + \omega_{k_x, k_y} \eta_{k_x, k_y}. \end{aligned} \quad (17)$$

Скорость изменения поверхности за счёт эволюции амплитуд (первое слагаемое) во много раз меньше, чем скорость изменения за счёт продвижения мод  $\frac{\partial \eta_{k_x, k_y}}{\partial \tau} \Theta_{k_x, k_y} \ll \omega_{k_x, k_y} \eta_{k_x, k_y}$ , поэтому скорость эволюции индивидуальной амплитуды описывается соотношением:

$$\frac{\partial \eta_{k_x, k_y}}{\partial \tau} \equiv \dot{\eta}_{k_x, k_y} = \omega_{k_x, k_y} \eta_{k_x, k_y}. \quad (18)$$

Расчёт частоты по формуле (18), сопряжён с ошибками, т. к. числитель и знаменатель флуктуируют, и знаменатель может быть очень мал, поэтому стоит использовать ансамбль полей  $\dot{\eta}_{k_x, k_y}$  и  $\eta_{k_x, k_y}$ , и применять метод наименьших квадратов, неоднократно использованный в сходных расчётах (см. [24]).

Пусть имеется набор  $N$  пар полей, полученных в процессе счёта. Применяя метод наименьших квадратов, т. е. минимизируя сумму  $S$ , получаем:

$$S = \sum_{n=1}^N \left( \dot{\eta}_{k_x, k_y} - \omega_{k_x, k_y} \eta_{k_x, k_y} \right)^2, \quad (19)$$

с учётом условия  $\frac{\partial S}{\partial \omega_{k_x, k_y}} = 0$ , получаем:

$$-\frac{2}{N} \sum_{n=1}^N \eta_{-k_x, -k_y} \left( \dot{\eta}_{k_x, k_y} - \omega_{k_x, k_y} \eta_{k_x, k_y} \right) = 0, \quad (20)$$

$$\bar{\omega}_{k_x, k_y} = \frac{\sum \eta_{-k_x, -k_y} \dot{\eta}_{k_x, k_y}}{\sum \left( \eta_{-k_x, -k_y} \right)^2}, \quad (21)$$

здесь  $\bar{\omega}_{k_x, k_y}$  — средняя частота, вычисленная по всему ансамблю.

Соотношение (21) учитывает только амплитуды при отрицательных значениях индексов. В более общем подходе удобнее всего использовать выкладки в терминах комплексных чисел, когда комплексное возвышение  $\eta$  представляется как комплексная переменная

$$\eta = \eta_{k_x, k_y} + i \eta_{-k_x, -k_y}. \quad (22)$$

Тогда вместо квадратичной формы в (21) будет входить произведение комплексно сопряжённых величин. В результате нужно минимизировать сумму:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^N \left[ \left( \dot{\eta}_{k_x, k_y} - \bar{\omega}_{k_x, k_y} \eta_{k_x, k_y} \right) - i \left( \dot{\eta}_{-k_x, -k_y} - \bar{\omega}_{k_x, k_y} \eta_{-k_x, -k_y} \right) \right] \times \\ &\times \left[ \left( \dot{\eta}_{k_x, k_y} - \bar{\omega}_{k_x, k_y} \eta_{k_x, k_y} \right) + i \left( \dot{\eta}_{-k_x, -k_y} - \bar{\omega}_{k_x, k_y} \eta_{-k_x, -k_y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

После дифференцирования по частоте получаем:

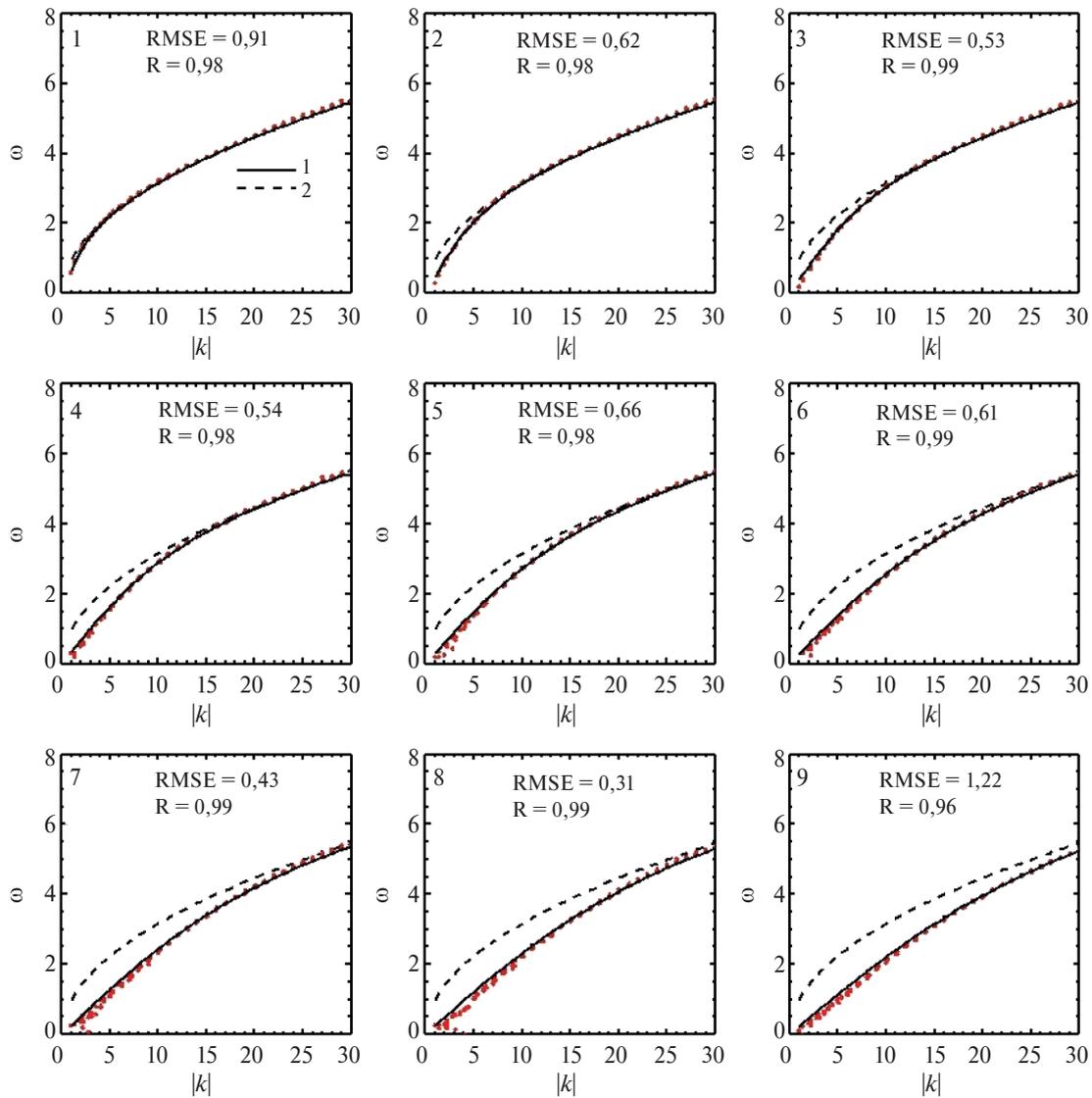
$$\sum_{n=1}^N \left( \eta_{k_x, k_y} \dot{\eta}_{k_x, k_y} - \eta_{-k_x, -k_y} \dot{\eta}_{-k_x, -k_y} \right) - \bar{\omega}_{k_x, k_y} \left( \eta_{k_x, k_y}^2 + \eta_{-k_x, -k_y}^2 \right) = 0, \quad (24)$$

откуда следует соотношение для вычисления  $\bar{\omega}_{k_x, k_y}$  :

$$\bar{\omega}_{k_x, k_y} = \frac{\sum (\eta_{-k_x, -k_y} \dot{\eta}_{k_x, k_y} - \eta_{k_x, k_y} \dot{\eta}_{-k_x, -k_y})}{\sum (\eta_{k_x, k_y}^2 + \eta_{-k_x, -k_y}^2)} \quad (25)$$

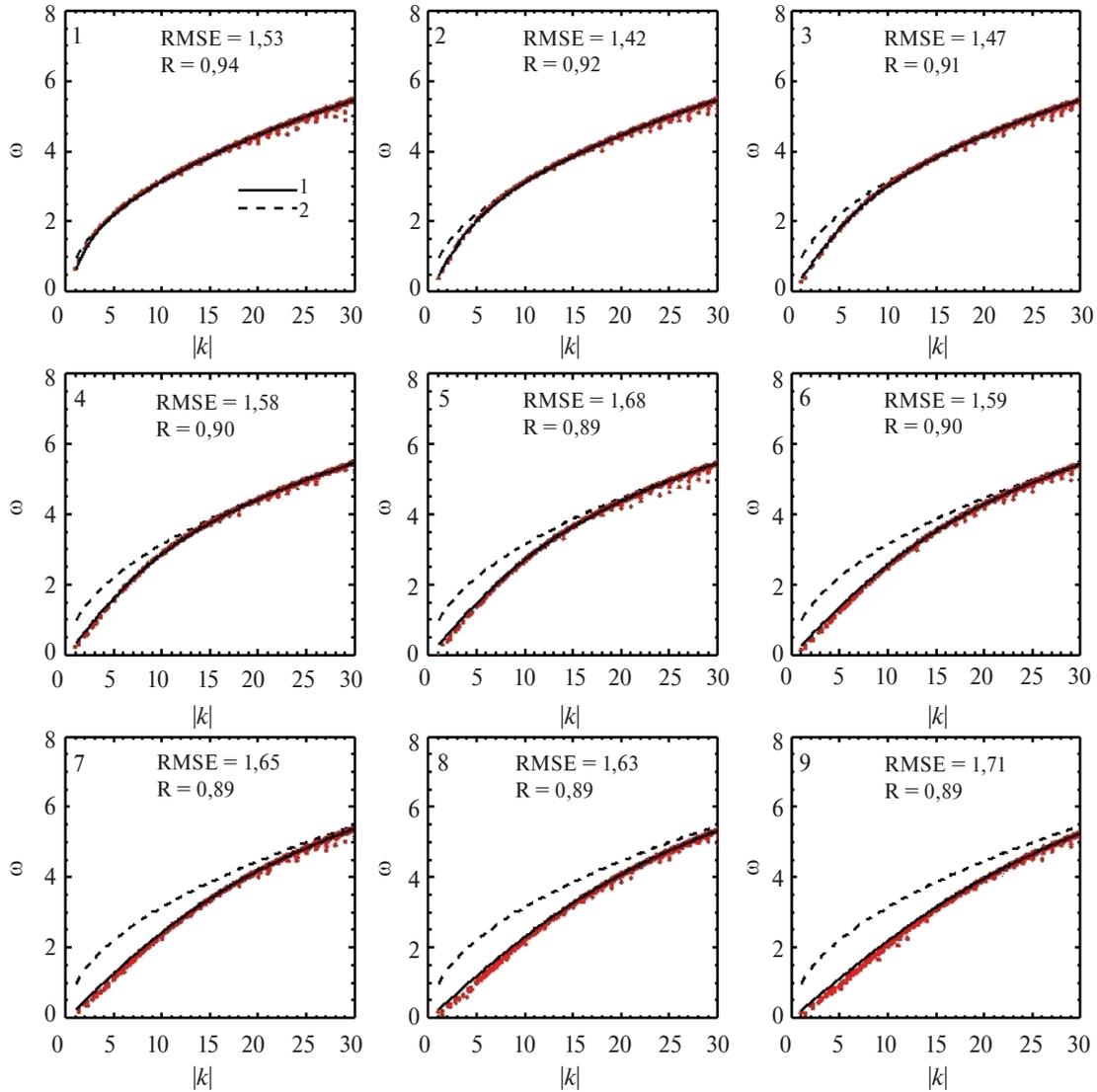
Индексы  $k_x$  и  $k_y$  с положительным знаком относятся к действительной части комплексного представления (т. е. коэффициенты при  $\cos$ ), а с отрицательным относятся к мнимой части (т. е. коэффициенты при  $\sin$ ). Суммирование производится по ансамблю полей возвышения, размер которых составляет  $A \times B$ , где  $A = M_x$ ,  $B = 2M_y + 1$  (т. е.  $256 \times 5$  и  $256 \times 65$  для двух вариантов разрешения), записанных в течение всего периода вычислений.

Результаты численных экспериментов показали, что дисперсионное соотношение, полученное для каждого значения глубины, выполняется с удовлетворительной точностью. Это показывает совпадение значений частоты, рассчитанных по модели (показаны цветными точками) с теоретической тонкой кривой  $I$ , которая перекрыта точками (рис. 1 и 2). Здесь стоит отметить, что согласно существующему определению,



**Рис. 1.** Зависимость безразмерной частоты  $\omega_{k_x, k_y}$  (по вертикальной оси) от безразмерного волнового числа  $|k|$  (по горизонтальной оси) для разрешения  $256 \times 2$ :  $I$  — частота с учётом глубины,  $2$  — частота без учёта глубины. Цветные точки — результаты расчётов частоты методом наименьших квадратов

**Fig. 1.** Dependence of dimensionless frequency  $\omega_{k_x, k_y}$  as a function of dimensionless wavenumber  $|k|$  for resolution  $256 \times 2$ :  $I$  — finite depth,  $2$  — deep water. Color dots represent the results of frequency calculated using the least-squares method



**Рис. 2.** Зависимость безразмерной частоты  $\omega_{k_x, k_y}$  (по вертикальной оси) от безразмерного волнового числа  $|k|$  (по горизонтальной оси) для разрешения  $256 \times 32$ : 1 — частота с учётом глубины, 2 — частота без учёта глубины. Цветные точки — результаты расчётов частоты методом наименьших квадратов

**Fig. 2.** Dependence of dimensionless frequency  $\omega_{k_x, k_y}$  as a function of dimensionless wavenumber  $|k|$  for resolution  $256 \times 32$ : 1 — finite depth, 2 — deep water. Color dots represent the results of frequency calculated using the least-squares method

глубоководной считается область, где значения глубины  $H_w > L/2$  ( $L$  — длина волны, за которую в экспериментах принимается длина волны пика спектра  $L_p$ ), мелководной — область, где значения глубины  $H_w < L/20$ . Заданные в экспериментах значения глубин относятся к промежуточным, за исключением значений  $H_w = L$  (панель 1 на рис. 1 и 2) и  $H_w = L/2$  (панель 2 на рис. 1 и 2), которые относятся к глубоководным условиям, что подтверждается совпадением значений частоты, рассчитанных по формулам для глубокой воды и для конечной глубины (пунктирная и сплошная кривые соответственно). Эти случаи были рассмотрены с целью продемонстрировать выполнение в модели FWM дисперсионного соотношения не только для волн в условиях конечной глубины, но и для волн на глубокой воде, что не было показано ранее.

Для оценки точности восстановленной моделью дисперсионного соотношения также были рассчитаны стандартные статистические характеристики:

– среднеквадратическая ошибка:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_{Mi} - X_{Ti})^2}, \quad (26)$$

– коэффициент корреляции:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^N (X_{Mi} - \bar{X}_M)(X_{Ti} - \bar{X}_T)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (X_{Mi} - \bar{X}_M)^2 \sum_{i=1}^N (X_{Ti} - \bar{X}_T)^2}}, \quad (27)$$

где  $N$  — количество пар значений ( $i = 1, 2, 3 \dots N$ ),  $X_{Mi}$  и  $X_{Ti}$  — модельные и теоретические значения в  $i$ -й паре соответственно,  $\bar{X}_M$  и  $\bar{X}_T$  — среднее модельные и теоретические значения соответственно.

Результаты расчётов для двух вариантов разрешений представлены в табл. 1.

Таблица 1

Table 1

Статистические параметры сравнения значений частоты для различных значений глубины  $H_w$ , рассчитанных по модели FWM и по теоретической формуле

Statistical parameters for comparing the frequency values for different values of depth  $H_w$  calculated using FWM model and the theoretical formula

№	$k_p H_w$	Разрешение $256 \times 2$		Разрешение $256 \times 32$	
		RMSE	R	RMSE	R
1	6,24	0,91	0,98	1,53	0,90
2	3,12	0,62	0,98	1,42	0,89
3	2,08	0,53	0,99	1,47	0,90
4	1,56	0,54	0,98	1,58	0,89
5	1,17	0,66	0,99	1,68	0,89
6	1,04	0,61	0,99	1,59	0,89
7	0,91	0,43	0,99	1,65	0,89
8	0,78	0,31	0,99	1,63	0,89
9	0,65	1,22	0,96	1,71	0,89

Высокие значения коэффициента корреляции и низкое значение среднеквадратической ошибки показывают хорошую согласованность модельных и теоретических расчётов частоты для каждого из значений глубины. Точность сохраняется как при рассмотрении почти одномерных волн (рис. 1), так и волн, распространяющихся в разных направлениях. (рис. 2). По результатам расчётов показано, что полученная версия модели подходит для моделирования волнового поля до глубины, равной  $0,1L_p$ .

## 6. Заключение

Изучение динамики волн на конечной глубине является актуальной задачей, имеющей важное прикладное значение. Разработанная ранее трёхмерная фазо-разрешающая модель потенциальных волн была применима для моделирования волн в глубоководных условиях. В статье рассматривается обобщение модели для условий конечной глубины. Расчёты показали, что замена решения для аналитической компоненты трёхмерного потенциала скорости для глубокой воды на решение, в котором учитывается значение глубины, обеспечивает выполнение дисперсионного соотношения для конечной глубины с удовлетворительной точностью. Показано, что модель способна воспроизводить волновое поле с большим числом мод на относительно небольших глубинах.

Настоящую работу можно считать первым шагом на пути к изучению волн на конечной глубине с помощью фазо-разрешающей модели FWM. На следующих этапах работы предполагается проверка модели в различных условиях, например, для развивающегося ветрового волнения или для волн различной крутизны, и преобразование ускоренной версии модели (AWM) [32] с последующим сравнением полученных результатов.

## Благодарности

Автор благодарит проф. Д.В. Чаликова за консультации.

## Acknowledgments

The author is grateful to Professor D.V. Chalikov for the assistance.

## Финансирование

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИО РАН по теме № FMWE-2024-0028.

## Funding

The study was carried out within the framework of the Shirshov Institute of Oceanology state assignment (theme No. FMWE-2024-0028).

## Литература

1. *Young I.R., Babanin A.V.* The form of the asymptotic depth-limited wind-wave spectrum: part II — the wavenumber spectrum // *Coastal Engineering*. 2009. Vol. 56, Iss. 5–6. P. 534–542. doi:10.1016/j.coastaleng.2008.11.005
2. *Bouws E., Günther H., Rosenthal W., et al.* Similarity of the wind wave spectrum in finite depth water: 1. Spectral form // *Journal of Geophysical Research Oceans*. 1985. Vol. 90, Iss. C1. P. 985–986. doi:10.1029/JC090iC01p00975
3. *Bouws E., Günther H., Rosenthal W., et al.* Similarity of the wind wave spectrum in finite depth water part 2: Statistical relations between shape and growth stage parameters // *Deutsche Hydrografische Zeitschrift*. 1987. Vol. 40, Iss. 1. P. 1–24. doi:10.1007/BF02328530
4. *Eyhavand A., Peyman B.* Experimental study on the growth and conversion of duration- and fetch-limited wind waves in water of finite depth // *Ocean Engineering*. 2022. Vol. 26. doi:10.1016/j.oceaneng.2022.113020
5. *Young I.* The growth rate of finite depth wind-generated waves // *Coastal Engineering*. 1997. Vol. 32, Iss. 2. P. 181–195. doi:10.1016/S0378-3839(97)81749-8
6. *Young I.* *Wind Generated Ocean Waves*. Elsevier Science, 1999. 288 p.
7. *Branger H., Manna M., Luneau C., et al.* Growth of surface wind-waves in water of finite depth: A laboratory experiment // *Coastal Engineering*. 2022. Vol. 177. 104174. doi:10.1016/j.coastaleng.2013.02.008
8. *Zakharov V.E.* Weakly nonlinear waves on the surface of an ideal finite depth fluid // *American Mathematical Society Transactions*. 1998. Vol. 182, Iss. 2. P. 167–197.
9. *Zakharov V.* Statistical theory of gravity and capillary waves on the surface of a finite-depth fluid. // *European Journal of Mechanics*. 1999. Vol. 18, Iss. 3. P. 327–344. doi:10.1016/S0997-7546(99)80031-4
10. *Montalvo P., Dornignac J., Manna M., et al.* Growth of surface wind-waves in water of finite depth. A theoretical approach // *Coastal Engineering*. 2013. Vol. 77. P. 49–56. doi:10.1016/j.coastaleng.2013.02.008
11. *Montalvo P., Kraenkel R., Manna M., et al.* Wind-wave amplification mechanisms: Possible models for steep wave events in finite depth // *Natural Hazards and Earth System Sciences*. 2013. Vol. 13, Iss. 11. P. 2805–2813. doi:10.5194/nhess-13-2805-2013
12. *Nandi K., Sarka, B., Hossain S., et al.* Wave interaction with multiple thin flexible porous barriers in water of uniform finite depth // *Ocean Engineering*. 2024. Vol. 309. 118475. doi:10.1016/j.oceaneng.2024.118475
13. *Liu S., Waseda T., Zhang X.* Four-wave resonant interaction of surface gravity waves in finite water depth // *Physical Review Fluids*. 2022. Vol. 7, Iss. 11. doi:10.1103/PhysRevFluids.7.114803
14. *Williams N.J., Peng H.* Nonlinear wave modeling over variable depth using extended boussinesq equations // *Proceedings of the International Offshore and Polar Engineering Conference*. 2012. P. 643–650.
15. *Xu Y., Yu X.* Enhanced atmospheric wave boundary layer model for evaluation of wind stress over waters of finite depth // *Progress in Oceanography*. 2021. Vol. 198. 102664. doi:10.1016/j.pcean.2021.102664.
16. *Ducrozet G., Gouin M.* Influence of varying bathymetry in rogue wave occurrence within unidirectional and directional sea-states // *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*. 2017. Vol. 3, Iss. 6. P. 309–324. doi:10.1007/s40722-017-0086-6
17. *Peregrine D.H.* Long waves on a beach // *Journal of Fluid Mechanics*. 1967. Vol. 27, Iss. 4. P. 815–827. doi:10.1017/S0022112067002605
18. *Gao J., Ma X., Zang Y., et al.* Numerical investigation of harbor oscillations induced by focused transient wave groups // *Coastal Engineering*. 2020. Vol. 158. doi:10.1016/j.coastaleng.2020.103670
19. *Gao J., Ma X., Chen H., et al.* On hydrodynamic characteristics of transient harbor resonance excited by double solitary waves // *Ocean Engineering*. 2021. Vol. 219. doi:10.1016/j.oceaneng.2020.108345
20. *Buccino M., Tuozzo S., Ciccaglione M., et al.* Predicting crenulate bay profiles from wave fronts: numerical experiments and empirical formulae // *Geosciences*. 2021. Vol. 11, Iss. 5. 208. doi:10.3390/geosciences11050208
21. *Berkhoff J.C.* Computation of combined refraction-diffraction // *Proceedings of 13th Conference on Coastal Engineering*. 1972. P. 55–69.

22. *Ruban V.P.* Water waves over a strongly undulating bottom // *Physical Review E*. 2004. Vol. 70, Iss. 6. 066302. doi:10.1103/PhysRevE.70.066302
23. *Ruban V.P.* Water waves over a time-dependent bottom: Exact description for 2D potential flows // *Physics Letters A*. 2005. Vol. 340, Iss. 1–4. P. 194–200. doi:10.1016/j.physleta.2005.03.07
24. *Chalikov D.* Numerical modeling of sea waves. Springer, 2016. 330 p. doi:10.1007/978-3-319-32916-1
25. *Чаликов Д.В.* Различные подходы к моделированию морских волн // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2022. Т. 15, № 1. С. 19–32. doi:10.59887/fpg/u1df-m1x7-1bxg
26. *Babanin A.V., Chalikov D., Young I.R., et al.* Numerical and laboratory investigation of breaking of steep two-dimensional waves in deep water // *Journal of Fluid Mechanics*. 2010. Vol. 644. P. 433–463. doi:10.1017/S002211200999245X
27. *Слюняев А.В., Кокорина А.В.* Численное моделирование «волн-убийц» на морской поверхности в рамках потенциальных уравнений Эйлера // *Физика атмосферы и океана*. 2020. Т. 56, № 2. С. 210–223. doi:10.31857/S0002351520020121
28. *Thomas L.H.* Elliptic problems in linear differential equations over a network // *Watson Scientific Computing Laboratory Report: Columbia University (New York)*, 1949.
29. *Miles J.W.* On the generation of surface waves by shear flows. // *Journal of Fluid Mechanics*. 1957. Vol. 3, Iss. 2. P. 185–204. doi:10.1017/S0022112057000567
30. *Chalikov D., Rainchik S.* Coupled numerical modelling of wind and waves and the theory of the wave boundary layer // *Boundary-Layer Meteorology*. 2011. Vol. 138. P. 1–41. doi:10.1007/s10546-010-9543-7
31. *Hasselmann K., Barnett T.P., Bouws E., et al.* Measurements of wind-wave growth and decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP) // *Ergänzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift*. 1973. Vol. A8, Iss. 12. P. 1–95.
32. *Chalikov D.* Accelerated reproduction of 2-D periodic waves // *Ocean Dynamics*. 2021. Vol. 71, Iss. 4. P. 309322. doi:10.1007/s10236-021-01450-3

## References

1. Young I.R., Babanin A.V. The form of the asymptotic depth-limited wind-wave spectrum: part II — the wavenumber spectrum. *Coastal Engineering*. 2009;56(5–6):534–542. doi:10.1016/j.coastaleng.2008.11.005
2. Bouws E., Günther H., Rosenthal W., et al. Similarity of the wind wave spectrum in finite depth water: 1. Spectral form. *Journal of Geophysical Research Oceans*. 1985;90(C1):985–986. doi:10.1029/JC090iC01p00975
3. Bouws E., Günther H., Rosenthal W., et al. Similarity of the wind wave spectrum in finite depth water part 2: Statistical relations between shape and growth stage parameters. *Deutsche Hydrografische Zeitschrift*. 1987;40(1):1–24. doi:10.1007/BF02328530
4. Eyhavand A., Peyman B. Experimental study on the growth and conversion of duration- and fetch-limited wind waves in water of finite depth. *Ocean Engineering*. 2022;26. doi:10.1016/j.oceaneng.2022.113020
5. Young I. The growth rate of finite depth wind-generated waves. *Coastal Engineering*. 1997;32(2):181–195. doi:10.1016/S0378-3839(97)81749-8
6. Young I. *Wind Generated Ocean Waves*. Elsevier Science; 1999. 288 p.
7. Branger H., Manna M., Luneau C., et al. Growth of surface wind-waves in water of finite depth: A laboratory experiment. *Coastal Engineering*. 2022;177:104174. doi:10.1016/j.coastaleng.2013.02.008
8. Zakharov V.E. Weakly nonlinear waves on the surface of an ideal finite depth fluid. *American Mathematical Society Transactions*. 1998;182(2):167–197.
9. Zakharov V. Statistical theory of gravity and capillary waves on the surface of a finite-depth fluid. *European Journal of Mechanics*. 1999;18(3):327–344. doi:10.1016/S0997-7546(99)80031-4
10. Montalvo P., Dorignac J., Manna M., et al. Growth of surface wind-waves in water of finite depth. A theoretical approach. *Coastal Engineering*. 2013;77:49–56. doi:10.1016/j.coastaleng.2013.02.008
11. Montalvo P., Kraenkel R., Manna M., et al. Wind-wave amplification mechanisms: Possible models for steep wave events in finite depth. *Natural Hazards and Earth System Sciences*. 2013;13(11):2805–2813. doi:10.5194/nhess-13-2805-2013
12. Nandi K., Sarka, B., Hossain S., et al. Wave interaction with multiple thin flexible porous barriers in water of uniform finite depth. *Ocean Engineering*. 2024;309:118475. doi:10.1016/j.oceaneng.2024.118475
13. Liu S., Waseda T., Zhang X. Four-wave resonant interaction of surface gravity waves in finite water depth. *Physical Review Fluids*. 2022;7(11). doi:10.1103/PhysRevFluids.7.114803
14. Williams N.J., Peng H. Nonlinear wave modeling over variable depth using extended boussinesq equations. *Proceedings of the International Offshore and Polar Engineering Conference*. 2012;643–650.
15. Xu Y., Yu X. Enhanced atmospheric wave boundary layer model for evaluation of wind stress over waters of finite depth. *Progress in Oceanography*. 2021;198:102664. doi:10.1016/j.pocean.2021.102664

16. Ducrozet G., Gouin M. Influence of varying bathymetry in rogue wave occurrence within unidirectional and directional sea-states. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*. 2017;3(6):309–324. doi:10.1007/s40722-017-0086-6
17. Peregrine D.H. Long waves on a beach. *Journal of Fluid Mechanics*. 1967;27(4):815–827. doi:10.1017/S0022112067002605
18. Gao J., Ma X., Zang Y., et al. Numerical investigation of harbor oscillations induced by focused transient wave groups. *Coastal Engineering*. 2020;158. doi:10.1016/j.coastaleng.2020.103670
19. Gao J., Ma X., Chen H., et al. On hydrodynamic characteristics of transient harbor resonance excited by double solitary waves. *Ocean Engineering*. 2021;219. doi:10.1016/j.oceaneng.2020.108345
20. Buccino M., Tuozzo S., Ciccaglione M., et al. Predicting crenulate bay profiles from wave fronts: numerical experiments and empirical formulae. *Geosciences*. 2021;11(5):208. doi:10.3390/geosciences11050208
21. Berkhoff J.C. Computation of combined refraction-diffraction. *Proceedings of 13<sup>th</sup> Conference on Coastal Engineering*. 1972;55–69.
22. Ruban V.P. Water waves over a strongly undulating bottom. *Physical Review E*. 2004;70(6):066302. doi:10.1103/PhysRevE.70.066302
23. Ruban V.P. Water waves over a time-dependent bottom: Exact description for 2D potential flows. *Physics Letters A*. 2005;340(1–4):194–200. doi:10.1016/j.physleta.2005.03.07
24. Chalikov D. Numerical modeling of sea waves. *Springer*. 2016, 330 p. doi:10.1007/978-3-319-32916-1
25. Chalikov D.V. Different approaches to numerical modeling of sea waves. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2022;15(1):19–32. doi:10.59887/fpg/uidf-m1x7-1bxg
26. Babanin A.V., Chalikov D., Young I.R., et al. Numerical and laboratory investigation of breaking of steep two-dimensional waves in deep water. *Journal of Fluid Mechanics*. 2010;644:433–463. doi:10.1017/S002211200999245X
27. Slunyaev A.V., Kokorina A.V. Numerical simulation of the sea rogue waves within the framework of the potential Euler equations. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2020;56(2):179–190. doi: 10.1134/S0001433820020127
28. Thomas L.H. Elliptic problems in linear differential equations over a network. *Watson Scientific Computing Laboratory Report: Columbia University (New York); 1949.*
29. Miles J.W. On the generation of surface waves by shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*. 1957;3(2):185–204. doi:10.1017/S0022112057000567
30. Chalikov D., Rainchik S. Coupled numerical modelling of wind and waves and the theory of the wave boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*. 2011;138Э:1–41. doi:10.1007/s10546-010-9543-7
31. Hasselmann K., Barnett T.P., Bouws E., et al. Measurements of wind-wave growth and decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). *Ergänzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift*. 1973; A8(12):1–95.
32. Chalikov D. Accelerated reproduction of 2-D periodic waves. *Ocean Dynamics*. 2021;71(4):309322. doi:10.1007/s10236-021-01450-3

### Об авторе

ФОКИНА Карина Владимировна, младший научный сотрудник СПбФ ИО РАН, кандидат физико-математических наук, SPIN-код (РИНЦ): 9395–5822, Scopus AuthorID: 57225150215, ORCID: 0000-0003-1826-0452, e-mail: fokinakarina@yandex.ru