

DOI 10.59887/2073-6673.2025.18(1)-1

УДК 551.466.3

© Д. В. Чаликов^{1,2}, К. В. Фокина^{1*}, 2025

¹Институт океанологии им. П.П. Шишова РАН, 117997, Москва, Нахимовский проспект, д. 36

²Университет Мельбурна, 3010 Виктория, Австралия

*fokinakarina@yandex.ru

ПРЯМАЯ (ФАЗО-РАЗРЕШАЮЩАЯ) МОДЕЛЬ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Статья поступила в редакцию 21.06.24, после доработки 05.01.2025, принята в печать 22.01.2025

Аннотация

Обсуждается место созданной в Санкт-Петербургском филиале ИО РАН численной модели поверхностных волн TRIDWAVE в вычислительной геофизической гидродинамике. Дается описание математической формулировки численной модели поверхностных волн в периодической области для бесконечной и конечной глубин. Главной особенностью модели является возможность переключения от подробной трёхмерной схемы к упрощённой двумерной схеме, которая ускоряет вычисления в 10–15 раз. Статистические характеристики результатов, воспроизводимых оригинальным и ускоренным вариантами модели, совпадают с высокой точностью. Дается описание структуры модели, взаимодействия её блоков, схемы запуска и возобновления счёта и контроля результатов. Описывается динамическая часть программы, осуществляющая решение на каждом шаге по времени и включающиеся по запросу блоки оперативной обработки и регистрации результатов. Описана система регистрации результатов, их состав, даны рекомендации по расширению выдачи. Даются рекомендации по организации обработки полученных результатов после окончания счёта.

Ключевые слова: потенциальные поверхностные волны, численное моделирование, ветровые волны, развитие волн, диссипация волн, спектр, Фурье трансформ метод, статистические характеристики волн

© D. V. Chalikov^{1,2}, K. V. Fokina^{1*}, 2025

¹Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, 36 Nakhimovsky Prosp., Moscow 117997, Russia

²University of Melbourne, Victoria 3010, Australia

*fokinakarina@yandex.ru

DIRECT (PHASE-RESOLVING) MODEL OF SURFACE WAVES

Received 21.06.24, Revised 05.01.2025, Accepted 22.01.2025

Abstract

The place of the numerical model of surface waves TRIDWAVE, created in the St. Petersburg Branch of IO RAS, in computational geophysical fluid dynamics is discussed. A description of the mathematical formulation and numerical models of surface waves in the periodic domain for infinite depth is given. The main feature of the model is the ability to switch from a detailed three-dimensional scheme to a simplified two-dimensional scheme, which speeds up calculations by 10–15 times. The statistical characteristics of the results reproduced by the original and accelerated versions of the model coincide with high accuracy. A description is given of the structure of the model, the interaction of its blocks, the scheme for starting and resuming computations and monitoring the results. The dynamic part of the program is described, which carries out the solution at each time step and blocks of operational processing and recording of results that are activated upon request. The system for recording results, their composition is described, and recommendations for expanding the output are given. Recommendations are given for organizing the processing of the results obtained after the end of the calculation.

Keywords: potential surface waves, numerical modeling, wind waves, wave development, wave dissipation, spectrum, Fourier transform method, statistical characteristics of waves

Ссылка для цитирования: Чаликов Д.В., Фокина К.В. Прямая (фазо-разрешающая) модель поверхностных волн // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2025. Т. 18, № 1. С. 8–18. doi:10.59887/2073-6673.2025.18(1)-1

For citation: Chalikov D.V., Fokina K.V. Direct (Phase-Resolving) Model of Surface Waves. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2025; 18(1):8–18. doi:10.59887/2073-6673.2025.18(1)-1

1. Введение

Понятие «фазо-разрешающая модель» возникло, по-видимому, как альтернатива волновых моделей, в которых рассматриваются только амплитуды мод или плотность потенциальной энергии и полностью отсутствуют понятие поля скорости и формы поверхности. В действительности, сходство между этими типами моделирования ограничивается общим объектом исследования — волнами. Поэтому термин «фазо-разрешающее моделирование» надо считать неудачным и оставить в употреблении традиционное название «прямое моделирование» (direct modeling). Строго говоря, можно обойтись и без добавления «прямое», поскольку к собственно моделированию в геофизической гидродинамике принято относить только работы, основанные на исходных, а не на сильно упрощённых подходах. Прямое моделирование волн подразумевает воспроизведение их движения в терминах первичных переменных — скорости и давления, или в потенциальном приближении — потенциала и формы поверхности. Понятие моды или плотности энергии, используемые в упрощённых подходах, далеко не универсальны, потому что амплитуды линейных мод неустойчивы, а плотности энергии недостаточно для того, чтобы воссоздать физическую поверхность. Прямая модель волн при условии периодичности может использовать преобразование Фурье для построения численной схемы и для представления результатов, но при этом модам не придаётся физического смысла.

В статье рассматривается структура и основные особенности модели TRIDWAVE (описание модели представлено ниже в разделе 4 или в [2], главе 12 и в [3]), предназначенной для моделирования эволюции и структуры трёхмерных волн. Для того, чтобы избежать повторений, рекомендуем читателям рассматривать в качестве введения к этой статье работу [1]. В указанной статье перечислены многие виды моделирования и даны все необходимые ссылки. Настоящая статья посвящена методу реализации подхода к моделированию поверхностных волн, который разрабатывался Д.В. Чаликовым на протяжении последних 20-ти лет. В этой статье, в отличие от предыдущих, основное внимание уделено технологии моделирования. Такой подход оправдан только по отношению к хорошо сформулированным и алгоритмически простым задачам (например, к DNS моделированию). Поверхностные волны даже в потенциальном приближении к таковым не относятся потому, что волновые движения сопровождаются процессами намного более сложными, чем вся адиабатическая теория поверхностных потенциальных волн (например, обрушение волн или их взаимодействие с ветром). Математическое моделирование адиабатических потенциальных периодических волн является хорошо сформулированной и сравнительно простой задачей. Проблема в том, что таких волн нет в природе: реальные волны трансформируются далеко не в потенциально адиабатической манере.

Мы видели нашу задачу в том, чтобы создать модель потенциальных периодических волн, которая может служить «полигоном» для дальнейших исследований. Основой такой модели является адиабатическая модель, которая должна быть достаточно точной для того, чтобы возникающие неполадки и странности результатов можно было бы отнести к различным нововведениям, но не к её основе. Модель существенно использует свойство потенциальности морских волн и основана на периодичности. Последнее свойство предполагает, что исследуемая область является небольшой частью более обширной области, достаточно малой для того, чтобы условия периодичности выполнялись. Отказ от периодичности позволяет учитывать реальную конфигурацию области. Но в этом случае возникает другая, гораздо более сложная задача, использующая другие методы и технологию.

В настоящее время прямое моделирование волн ограничено предположением о потенциальности, что позволяет избежать трудностей и неопределённостей, связанных с турбулентностью. Реальные волны не полностью потенциальны, в частности, потенциальное поле скорости взаимодействует с вихревыми движениями (см. [2], Глава 11). В настоящее время предполагается, что этот процесс вторичен и не оказывает значительного влияния на динамику волн.

Эксплуатировать чисто адиабатическую модель было бы неинтересно. Даже правомерность интеграла Хассельманна [4] трудно было бы проверить, так как при его расчёте с моделью для осреднения по фазам потребовалось бы длительное интегрирование, в течение которого спектр не остаётся постоянным. Впрочем, результаты такого сравнения и без того неопределённые, поскольку в интеграле Хассельманна учитываются только взаимодействия 4-го порядка, тогда как в реальности и в полной модели между собой взаимодействуют все моды.

Фазо-разрешающие модели используют высокое разрешение, что ещё больше затрудняет сравнение с алгоритмами для интеграла Хассельманна, которые применимы лишь для малого разрешения. Для «оживления» адиабатической модели, в неё вставлены алгоритмы, описывающие приток энергии от ветра и диссипацию за счёт опрокидывания.

Модель целесообразно применять в двух направлениях. Основное из них — развитие алгоритмов, рассчитывающих физические процессы в волновом поле, не описываемые исходными уравнениями, из которых наиболее важные — взаимодействие с атмосферой и диссипация волновой энергии. Второе направление, успешность которого зависит от надёжности результатов, полученных в первом направлении — применение модели для исследовательских целей, например, для исследования статистических свойств волнового поля.

2. Структура модели

Архитектура модели непрерывно изменялась и совершенствовалась. Критериями для выбора усовершенствований были соображения удобства использования и введения расширений. Модель включает следующие основные компоненты: 1) генерация начальных условий и механизм возобновления счёта; 2) алгоритмы интегрирования уравнений по времени, включая диагностические расчёты поверхностной вертикальной скорости; 3) алгоритмы оперативного расчёта статистической информации, требующие высокого разрешения по времени; 4) алгоритмы эпизодической записи мгновенной информации типа 1D, 2D или 3D полей и интегралов; 5) вспомогательные программы типа FFT (быстрое преобразование Фурье).

Структура модели показана на рис. 1. Весь период вычислений в модели разделён на одинаковые по числу временных шагов части. Каждая часть записывается в отдельный файл («рестарт»). Информация из предыдущего «рестарта» является начальными условиями для следующего. Это позволяет при необходимости возобновлять счёт с нужного момента времени. Исходя из этого, счёт на заданное число шагов в модели начинается с генерации начальных условий или чтения «рестарта» для продолжения счёта. Основной и очень компактный блок реализует четырёхэтапный шаг по времени по схеме Рунге-Кутты. На каждом этапе вызывается блок расчёта вертикальной скорости на поверхности. Для 3D варианта модели W3 (варианты окаймлены пунктирной линией) решается 3D эллиптическое уравнение для потенциала скорости, представленное как уравнение Пуассона с пересчитываемой правой частью до достижения требуемой точности, а далее вычисляется 2D поле вертикальной скорости, входящее в прогностические уравнения для возвышения и поверхностного потенциала. Если в настройке программы задана двумерная формулировка задачи, блок Рунге-Кутты обращается прямо к расчёту 2D поля поверхностной вертикальной скорости (модель W2), а массивные блоки из 3D алгоритма не включены в работу. В целом, 2D вариант оказывается в 12–15 раз быстрее, чем 3D. Заметим, что легко ввести чередование во времени 2D и 3D алгоритмов. Эта версия нами пока не проверялась.

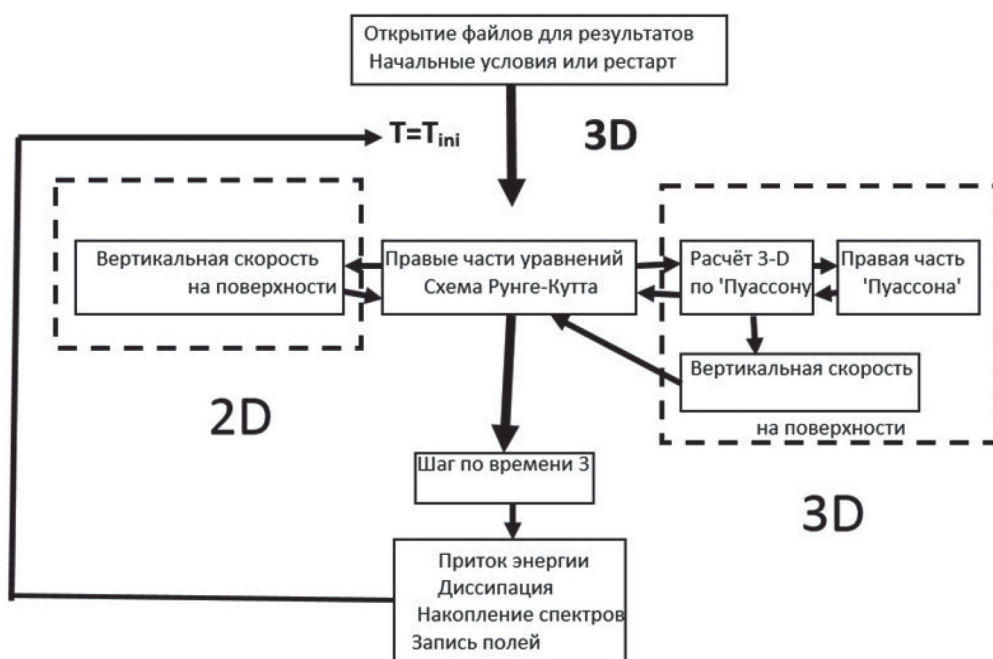


Рис. 1. Схема TRIDWAVE модели

Fig. 1. The TRIDWAVE model scheme

Завершающий шаг по времени происходит по окончании процедуры Рунге-Кутты. Заметим, что вычисления неадиабатических эффектов (притока энергии и диссипации) выведены из алгоритмов вычисления правых частей в схеме Рунге-Кутты. Это сильное упрощение позволило разъединить сложные и точные вычисления дифференциальных правых частей и расчёты, реализующие физические параметризацию. Правомомерность этого подхода была тщательно проверена многократными вычислениями. В одном блоке, вычисляющем приток энергии и диссипация по флагу, происходит накопление данных об одномерных спектрах притоков и диссипации энергии, а также следующих характеристик: (1) уровень η ; (2) $\eta_x^2 + \eta_y^2$; (3) лапласиан поверхности $\Delta\eta$; (4) полная вертикальная скорость на поверхности $\varphi_\zeta(0)$; (5) нелинейная компонента вертикальной скорости на поверхности $\tilde{\varphi}_\zeta(0)$; (6) давление на поверхности p ; (7) тангенциальное трение на поверхности τ_0 ; (8) производная от вертикальной скорости $\varphi_{\zeta\zeta}$; (9) крутизна поверхности $k\eta$; (10) линейная компонента вертикальной скорости $\bar{\varphi}_\zeta(0)$; Здесь же помещён алгоритм поддержания квазистационарного режима. Этот механизм обеспечивает неизменность полной энергии, но, разумеется, не исключает потока энергии по спектру и дауншифтинг (приток энергии в область малых волновых чисел). В этот блок можно добавить расчёт одномерных спектров любых характеристик. Необходимость такой структуры объясняется сильной изменчивостью мгновенных спектров, при которой многие закономерности проявляются только после осреднения по времени. В режиме счёта с заданной периодичностью выдаётся информация, необходимая для заключения о целесообразности продолжения счёта.

Вычисления на длительные периоды целесообразно разделять на короткие отрезки времени, длина которых определяется скоростью компьютера и принятым разрешением. При шаге по времени $\Delta t = 0,01$ мы использовали число шагов $N_t = 1000 \div 10000$. Обычно задача генерирует очень большие объёмы информации, что следует учитывать при планировании эксперимента. При неразумном использовании модели расчёты могут заполнить сколь угодно большую память. Многократная запись «рестарта» позволяет восстанавливать любую информацию в режиме «эмуляции», т. е. счёте с полной моделью на один или любое заданное число шагов с оперативной генерацией и обработкой основных и дополнительных данных или с целью записи для последующей обработки.

3. Описание переменных

Все переменные в модели представлены в двух видах: в виде массива коэффициентов Фурье с размерностью $(-M_x : M_x, -M_y : M_y)$ для двумерных полей и $(-M_x : M_x, -M_y : M_y, 0 : L)$ для трёхмерных полей (L — число уровней, не считая поверхности) и соответствующих сеточных массивов: (N_x, N_y) , (N_x, N_y, L) , где $N_x = 4M_x$, $N_y = 4M_y$. В данной конфигурации параметры M_x и M_y должны быть равны целой степени 2 (т. е. их значение равно 2^n). Сеточные массивы определяются обратным преобразованием Фурье:

$$G(\xi, \vartheta) = \sum_{k=-M_x}^{k=M_x} \sum_{l=-M_y}^{l=M_y} F_{k,l} \Theta_{k,l}, \quad (1)$$

где $\Theta_{k,l}$ — базисные функции преобразования Фурье:

$$\Theta_{k,l} = \begin{cases} \cos(k\xi + l\vartheta) & -M_x \leq k \leq M_x & -M_y \leq l \leq 0 \\ \cos(k\xi) & -M_x \leq k \leq 0 & l = 0 \\ \sin(k\xi) & 0 \leq k \leq M_y & l = 0 \\ \sin(k\xi + l\vartheta) & -M_x \leq k \leq M_x & 0 \leq l \leq M_y \end{cases}. \quad (2)$$

В большинстве случаев Фортран позволяет оперировать с массивами как со скалярными переменными. Размер сеточных полей почти в 4 раза больше размеров полей Фурье, поэтому целесообразно проводить линейные операции и хранить результаты преимущественно в терминах Фурье переменных. Нелинейные операции, разумеется, проводятся в сеточном пространстве в соответствии с правилами Фурье-трансформ метода. Для всех переменных представление Фурье возобновляется на каждом шаге. При этом, модам Фурье не приписывается физического смысла. Наоборот, решается континуальная задача эволюции поверхности $\eta(\xi, \vartheta, \tau)$ и поверхностного потенциала $\phi(\xi, \vartheta, \tau)$ в физическом пространстве и времени на сетке с заданным разрешением. Моды Фурье используются для экономии в линейных вычислениях, в алгоритмах параметризации физических процессов (например, обмена энергией между волнами и ветром) и для представления спектральных результатов. Континуальный подход, в частности, предполагает, что допускаются все возможные нелинейные взаимодействия между всеми модами. Начальные условия задаются в виде

совокупности амплитуд линейных мод поверхности и поверхностного потенциала, например, на основе линейной теории. Этот набор может, в частности, задавать в начальных условиях нелинейные объекты, например, суперпозицию волн Стокса.

4. Дифференциальные уравнения

4.1. Трёхмерная формулировка

Используется нестационарная неортогональная система координат:

$$\xi = x, \quad \vartheta = y, \quad \zeta = z - \eta(\xi, \vartheta, \tau), \quad \tau = t, \quad (3)$$

где функция $\eta(x, y, t) = \eta(\xi, \vartheta, \tau)$ описывает форму поверхности:

$$\eta(\xi, \vartheta) = \sum_{-M \leq k, l \leq M} \eta_{k,l} \Theta_{k,l}. \quad (4)$$

Трёхмерные уравнения потенциальных волн в системе координат (3) [2, глава 12] принимают вид:

$$\eta_\tau = -\eta_\xi \varphi_\xi - \gamma^2 \eta_\vartheta \varphi_\vartheta + (1 + \eta_\xi^2 + \gamma^2 \eta_\vartheta^2) \Phi_\zeta, \quad (5)$$

$$\varphi_\tau = -\frac{1}{2} (\varphi_\xi^2 + \gamma^2 \varphi_\vartheta^2 - (1 + \eta_\xi^2 + \gamma^2 \eta_\vartheta^2) \Phi_\zeta^2) - \eta - p_0, \quad (6)$$

$$\Phi_{\xi\xi} + \gamma^2 \Phi_{\vartheta\vartheta} + \Phi_{\zeta\zeta} = 2\eta_\xi \Phi_{\xi\zeta} + 2\gamma^2 \eta_\vartheta \Phi_{\vartheta\zeta} + (\eta_{\xi\xi} + \gamma^2 \eta_{\vartheta\vartheta}) \Phi_\zeta - (\eta_\xi^2 + \gamma^2 \eta_\vartheta^2) \Phi_{\zeta\zeta}, \quad (7)$$

где Φ — трёхмерный потенциал скорости, p_0 — внешнее давление, φ — значение потенциала скорости Φ на поверхности $\zeta = 0$. Уравнения (5)–(7) инвариантны к преобразованию масштаба длины, поэтому они записаны в безразмерной форме с использованием следующих масштабов: длины L ($2\pi L$ — размерная длина области), времени $L^{1/2} g^{-1/2}$, потенциала скорости $L^{3/2} g^{1/2}$ (g — ускорение свободного падения). Давление p_0 отнесено к единице плотности воды, его масштаб равен Lg .

Уравнения (5) и (6) относятся к свободной поверхности. Уравнения формально выглядят как двумерные, однако они содержат вертикальную производную от потенциала Φ_ζ , для расчёта которой приходится решать трёхмерное эллиптическое уравнение (7) с нижним граничным условием $\Phi_\zeta(\zeta \rightarrow -\infty) = 0$ и верхним граничным условием $\Phi(\zeta = 0) = \varphi$.

Численное решение существенно упрощено предположением (см. [3]), что потенциал скорости может быть точно представлен суммой аналитической компоненты $\bar{\Phi}(\xi, \vartheta, \zeta)$, ($\bar{\varphi} = \bar{\Phi}(\xi, \vartheta, 0)$) и нелинейного возмущения $\tilde{\Phi}(\xi, \vartheta, \zeta)$, ($\tilde{\varphi} = \tilde{\Phi}(\xi, \vartheta, 0)$). Уравнение для компоненты потенциала скорости $\tilde{\Phi}$ решается на основе трехдиагонального матричного алгоритма. Алгоритм обобщён на трёхмерный случай на основе Фурье-представления по продольным координатам ξ и ϑ . Уравнение решается итерациями с последовательной коррекцией правой части. Начальные значения функции Φ задаются на основе линейной теории. Точность решения контролируется максимальной невязкой $\varepsilon \sim (10^{-5} - 10^{-6}) \|\eta\|$ ($\|\eta\|$ — норма для возмущения поверхности). Детали численной схемы и результаты всесторонней проверки модели можно найти в [2].

Этот вариант модели назван FWM (*Full Wave Model*, FWM).

4.2. Двумерная формулировка

Все трёхмерные модели, основанные на полных уравнениях, имеют общее ограничение, т. е. низкую вычислительную эффективность. Работа с такими моделями даже со скромным разрешением превращается в бесконечное ожидание результатов. Это свойство моделей замедляет их совершенствование, в частности, разработку схем параметризации физических процессов, поскольку такая работа требует многократного повторения прогонов.

Недавно в ряде наших работ (см., например, [3, 5]) была предпринята попытка разработать новый подход к моделированию двумерных периодических волновых полей. Основная идея схемы вытекает из представления потенциала скорости как суммы линейных и нелинейных составляющих, предложенного в [2]. Решение для линейной составляющей известно; следовательно, нелинейная составляющая должна быть вычислена с помощью уравнения Пуассона с нулевым граничным условием на поверхности. Такой подход предлагает новый способ упростить вычисления, рассматривая двумерное уравнение Пуассона на поверхности. Уравнение, которое можно рассматривать как дополнительное поверхностное условие, содержит как первую, так и вторую вертикальные производные потенциала. Таким образом, система уравнений остаётся

незамкнутой. Эмпирически было обнаружено, что эти переменные тесно связаны друг с другом. Линейная зависимость между первой и второй вертикальной производной была многократно проверена. Было показано, что использование таких гипотез приводит к формулировке замкнутой системы уравнений, которая позволяет получить результаты, близкие к тем, которые получены с помощью полной волновой модели.

Подробный вывод двумерного уравнения приведён в [3]. Полученная система двумерных уравнений для моделирования эволюции многомодового волнового поля включает стандартные эволюционные кинематические и динамические условия поверхности и дополнительное диагностическое условие для расчёта вертикальной скорости поверхности:

$$\eta_\tau = -\eta_\xi \varphi_\xi - \eta_\eta \varphi_\eta + (1+s)w, \quad (8)$$

$$\varphi_\tau = -\frac{1}{2}(\varphi_\xi^2 + \varphi_\eta^2 - (1+s)w^2) - \eta - p, \quad (9)$$

$$\tilde{w} = \frac{A(2(\eta_\xi w_\xi + \eta_\eta w_\eta) + \Delta\eta w - s\bar{w}_\zeta)}{1+s}, \quad (10)$$

здесь $\Delta = \eta_{\xi\xi} + \eta_{\eta\eta}$ — лапласиан возвышения поверхности η , $w = \bar{w} + \tilde{w}$ — полная вертикальная скорость. Линейная компонента ($\bar{w} = \bar{\varphi}_\zeta$) вычисляется аналитически из уравнения $\bar{\varphi}_{\xi\xi} + \bar{\varphi}_{\eta\eta} + \bar{\varphi}_{\zeta\zeta} = 0$, которое решается с граничными условиями $\bar{\varphi}(\zeta = 0) = \varphi$ и $\bar{\varphi}_\zeta(\zeta \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Нелинейная компонента ($\tilde{w}$) рассчитывается по уравнению (10).

Коэффициент A в (10) рассчитывается по формуле:

$$A = \sigma F(\mu), \quad (11)$$

где $\sigma = \left((\eta - \bar{\eta})^2 \right)^{1/2}$ — среднеквадратичное отклонение возвышения η , и μ — параметр

$$\mu = \sigma \sigma_L, \quad (12)$$

где $\sigma_L = \left((\Delta\eta - \Delta\bar{\eta})^2 \right)^{1/2}$ — среднеквадратичное отклонение горизонтального лапласиана высоты $\Delta\eta$. Функция F аппроксимируется следующим образом:

$$F = \frac{A_0 + A_1 \mu}{A_2 + \mu}, \quad (13)$$

где $A_0 = 0,0524$, $A_1 = 1,193$, $A_2 = 0,0053$. Коэффициенты в (13) были найдены на основе многочисленных численных экспериментов с FWM и эмпирического (в вычислительном смысле) выбора безразмерных переменных и численных параметров. Этот вариант модели назван эвристической волновой моделью (*Heuristic Wave Model*, HWM).

Численная схема основана на методе преобразования Фурье с использованием представлений переменных коэффициентов Фурье и сеточных переменных; число степеней свободы в сеточном пространстве в четыре раза превышает число степеней свободы в пространстве Фурье.

Уравнение (10) представлено в форме, удобной для итераций. Оно также решается с помощью метода Фурье. Поскольку итерации начинаются с начального условия, взятого из предыдущего временного шага, типичное число итераций равно двум и редко превышает четыре. Упрощённая модель даёт почти те же статистические результаты, что и полная модель. Легко видеть, что предложенные выше уравнения полностью аналогичны полным уравнениям, с одним исключением: небольшая нелинейная поправка к общей вертикальной скорости вычисляется не из трехмерного уравнения Пуассона, а из простого двумерного уравнения (10), что увеличивает скорость решения задачи в 15–20 раз. Можно добавить, что упрощённая модель имеет гораздо более простую структуру, чем FWM, и легко программируется.

Таким образом, алгоритмы отличаются только способом вычисления вертикальной скорости. В остальных моделях были полностью идентичны, что позволило их объединить в одном пакете. Блоки вычисления двумерного поля вертикальной скорости окаймлены пунктирными линиями на рис. 1 (справа — для FWM, слева — для HWM). Выбор 3D или 2D алгоритма задаётся перед счётом. Переключение от одного режима к другому возможно также при возобновлении счёта.

Успешность двумерной формулировки трёхмерной задачи была подтверждена многочисленными свидетельствами совпадения многих статистических характеристик и даже прямых (point-to-point) сопоставлений двумерных полей. Не лишним здесь будет приведение дополнительных данных этого рода.

На рис. 2 дано сопоставление вертикальной скорости (т. е. объекта параметризации, различающей 3D и 2D подходы) рассчитанной по уравнению (10) и формулам (11)—(13). Жирная линия показывает линейную зависимость между w_2 и w_3 :

$$w_2 = b_0 + b_1 w_3, \quad (14)$$

где $b_0 = -(3 \pm 2) \cdot 10^{-5}$, $b_1 = 0,990 \pm 5 \cdot 10^{-4}$. Дисперсия между аппроксимацией (13) и исходными данными составила $1,6 \cdot 10^{-4}$. Данные на рисунке получены интегрированием с тремя вариантами модели TRID-WAVE с разными параметрами на длительные периоды. Общее число пар (w_3, w_4) было равно $\approx 1,55 \cdot 10^8$. Очевидно, что полученные данные доказывают очень надёжное согласование значений вертикальной скорости, рассчитанных полной и упрощённой моделями.

Сопоставление результатов расчётов по двум моделям показано на рис. 3 на примере вероятностей возвышения поверхности η и вертикальной скорости w (т. е. объекту параметризации в W2). Использовались результаты длительного интегрирования в режиме, близком к стационарному (при сохранении полной энергии). Как видно, распределение вероятностей полученные по двум разным моделям очень близки друг к другу. Несовпадение кривых заметно лишь для экстремальных значений.

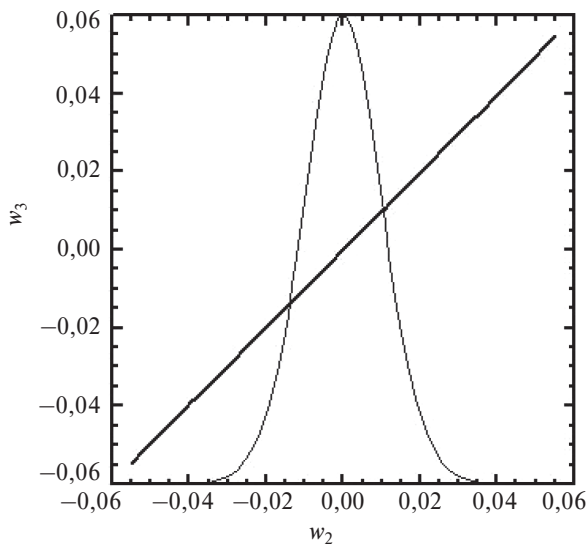


Рис. 2. Сопоставление значений вертикальной скорости на поверхности, рассчитанных по 3D (w_3) 2D (w_2) алгоритмам. Жирная линия — линейная аппроксимация зависимости, тонкая линия — распределение вероятности для w_3

Fig. 2. Comparison of surface vertical velocity calculated with 3D (w_3) 2D (w_2) algorithms. The thick line is a linear approximation of the dependence, the thin line is the probability distribution for w_3

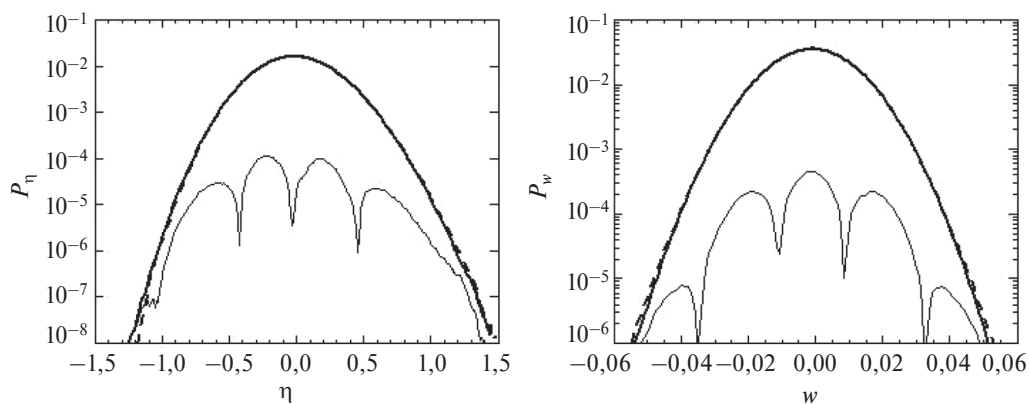


Рис. 3. Распределение вероятностей возвышения η и вертикальной скорости w . Сплошные кривые — расчёт по модели W3, пунктирные — по модели W2. Кривые для этих моделей практически совпадают, поэтому абсолютная разность между ними показана тонкой кривой

Fig. 3. Probability distribution of surface elevation η and vertical velocity w . Solid curves are calculations done with W3 model, dashed lines are calculations done with W2 model. The curves for these models are almost identical, so the absolute difference between them is demonstrated as a thin curve

5. Приток энергии к волнам и диссипация

Описание притока энергии к волнам основано на теории Майлза [6], согласно которой для каждой моды комплексные амплитуды поверхности $\bar{\eta}_{k,l}$ связаны с комплексными амплитудами поверхностного давления $\bar{p}_{k,l}$ линейным соотношением:

$$\bar{p}_{j,k} = \bar{\beta}_{j,k}(\Omega) \bar{\eta}_{j,k}, \quad (15)$$

где $\bar{\beta}_{k,l}$ — комплексный коэффициент пропорциональности,

$$\Omega_{k,l} = \frac{U(\lambda_{k,l} / 2)}{c_{k,l}} \cos(\psi_{k,l}), \quad (16)$$

$(-M_x \leq k \leq M_x, -M_y \leq l \leq M_y)$ — номера мод в Фурье-пространстве, $\lambda_{k,l} = 2\pi / k_{k,l}$ — длина волны, $k_p = (k^2 + l^2)^{1/2}$, $c_{k,l} = k_{k,l}^{-1/2}$ — фазовая скорость моды, $\psi_{k,l} = \arctg(l/k)$ — угол между направлением моды и направлением ветра.

Подробное описание этого метода дано в [2]. Несмотря на простоту соотношения (15), его конкретизация и применение оказываются довольно сложными. Функция $\bar{\beta}$ должна быть определена на основе одновременных измерений скорости ветра, регистрации поверхностного давления и регистрации поверхности. Понятно, измерения давления на быстро меняющейся поверхности — технически трудная задача. Основная проблема состоит в том, что давление содержит несколько компонент разного происхождения. Во-первых, в сдвиговом потоке существует широкий спектр турбулентных пульсаций давления. В течении над искривлённой движущейся поверхностью возникают флуктуации давления, порождённые возмущениями поверхности. Нелинейность развивает дополнительные моды давления, которые прямо не связаны с поверхностью. Специфика пограничного слоя над волнами состоит в том, что амплитуды мод поверхностного давления, коррелированные с модами поверхности, на 1–2 порядка меньше, чем турбулентные и не связанные прямо с волнами амплитуды давления, поэтому встаёт задача извлечения требуемого слабого сигнала с наложенным сильным шумом. Наиболее перспективным методом генерации подходящих данных является длительное численное моделирование волнового пограничного слоя над многомодовой волновой поверхностью (см. пример в [7]). Функция β показана на рис. 4. Функция определена в массовых расчётах структуры пограничного слоя с помощью объединённой модели пограничного слоя (описываемого уравнениями Рейнольдса) и модели нелинейных волн. Обе записаны в конформной системе. Заметим, что квадратичный рост мнимой части функции β (сплошная кривая) наблюдается лишь в сравнительно узком интервале ($1 < \Omega < 6$). Линейный рост β — функции при $\Omega > 6$ ответственной за передачу энергии к модам установлен вполне надёжно.

Зависимость β от Ω аппроксимирована кусочно-полиномиальной функцией:

$$\begin{aligned} \beta_{-k} &= -0,01055 + 0,199\Omega_k + 0,0098\Omega_k^2 + 0,00019\Omega_k^3 & \Omega \leq -1 \\ \beta_{-k} &= -0,05 + 0,1\Omega_k - 0,05\Omega_k^2 & -1 < \Omega \leq 1 \\ \beta_{-k} &= -0,0385 + 0,055\Omega_k - 0,0147\Omega_k^2 + 0,00496\Omega_k^3 & 1 < \Omega \leq 8 \\ \beta_{-k} &= -4,329 + 0,794\Omega_k & 8 < \Omega \\ \beta_k &= -0,5068 + 0,6648\Omega_k - 0,2097\Omega_k^2 & -1,5 \geq \Omega < 4,7 \\ \beta_k &= 0,647 + 1,778\Omega_k & \Omega < 1,5 \\ \beta_k &= 3,1507 - 1,0959\Omega_k & \Omega \geq 4,7 \end{aligned} \quad (17)$$

где положительный индекс относится к действительной части функции, а отрицательный — к мнимой.

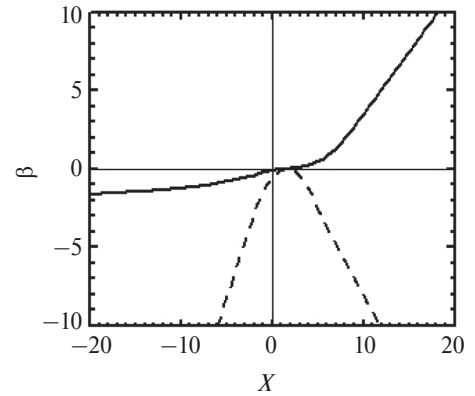


Рис. 4. Мнимая (сплошная кривая) и действительная (пунктир) части функции β

Fig. 4. Imaginary (solid line) and real (dashed line) parts of β -function

Было бы рано считать, что проблема, описания обмена энергией и импульсом между волнами и ветром, полностью решена. Тем не менее, для её решения имеется солидный базис в виде теории Майлза, которая оказалась удивительно способной к обобщениям. Важно, что формулировка этого процесса дано в рамках потенциальной теории, что нельзя сказать о не менее важном явлении — диссипации волн.

Рост волновых амплитуд на высоких волновых числах создаёт участки с очень высокой крутизной поверхности и быстро вызывает вычислительную неустойчивость. Это явление, хорошо известное в вычислительной гидродинамике, устраняется использованием высокоселективных фильтров, имитирующих нелинейную вязкость. Для сохранения устойчивости в правые часть уравнений (5) и (6) вводятся дополнительные члены:

$$\frac{\partial \eta_{k,l}}{\partial \tau} = E_{k,l} - \mu_{k,l} \eta_{k,l}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \varphi_{k,l}}{\partial \tau} = F_{k,l} - \mu_{k,l} \varphi_{k,l}, \quad (19)$$

(E_k и F_k — Фурье амплитуды правых частей уравнений (5) и (6). Коэффициенты μ_k равны нулю внутри эллипса с полуосями aM_x и aM_y , линейно по $|k|$ растут до значения c_M на эллипсе с полуосями M_x и M_y и сохраняют это значение вне этого эллипса (вполне очевидные но громоздкие формулы для коэффициентов $\mu_{k,l}$ опущены). В расчётах могут быть приняты значения: $a = 0,50-0,75$, $c_M = 0,01-0,1$.

Главным механизмом диссипации волн является их обрушение (опрокидывание). Многочисленные наблюдательные данные об обрушении пока не оформились в виде конкретных рекомендаций для формулировки алгоритма. Поэтому в модели процесс опрокидывания волн рассматривается как «вязкая» диссипация потенциальной и кинетической энергий, представленными возвышением поверхности и поверхностным потенциалом скорости. Моделирование показывает, что неустойчивость, сходная с обрушением возникает, когда поверхность достигает чрезмерной крутизны или кривизны. Само явление обрушения, связанное с перемещением некоторого объёма воды, частично смешанной с воздухом, разумеется не описывается в рамках потенциальной теории. Такие явления зарождаются и при интегрировании полных уравнений, что приводит к остановке вычислений. Вопрос состоит в том насколько реалистично модель способна приблизиться к начальной фазе неустойчивости. Опыт работы с полными моделями позволяет надеяться, крутизна $\partial \eta / \partial x$ или $\partial \eta / \partial y$ может превышать $\approx 1,2$. Ещё более чувствительным оказался лапласиан поверхности $\Delta \eta$, локальное значение перед опрокидыванием может превышать значения $\Delta \eta \approx 120-150$. Поскольку остановка счёта нежелательна, дальнейшее увеличение крутизны надо предотвращать.

Описание обрушения в прямом моделировании должно удовлетворять трём условиям: (1) предотвращать вычислительную неустойчивость, связанную с опрокидыванием; (2) реалистично описывать потери локальной потенциальной и кинетической энергии; (3) сохранять объём. Параметризация обрушения основана на локальном диффузионном операторе с подходящим коэффициентом диффузии. Довольно много схем такого рода было исследовано, и в конечном итоге была выбрана следующая схема, сформулированная в физическом пространстве:

$$\eta_\tau = E_\eta + J^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} B \frac{\partial \eta}{\partial \vartheta} \right), \quad (20)$$

$$\varphi_\tau = F_\varphi + J^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} B \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} B \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right), \quad (21)$$

где E_η и F_φ — правые части уравнений (5) и (6), включающие члены, введённые в (18) и (19), B — коэффициент диффузии. В первых вариантах схемы предполагалось, что коэффициент диффузии B зависит от локального уклона поверхности, но такая схема оказалась ненадёжной, т. е. алгоритм не улавливал все случаи обрушения, что приводило к неустойчивости. Намного более универсальной оказалась схема, основанная на значениях локальной кривизны поверхности, характеризуемой лапласианом $\Delta \eta$:

$$B = \begin{cases} C_b \delta |\Delta \eta| & \Delta \eta < \Delta_{cr} \eta \\ 0 & \Delta \eta > \Delta_{cr} \eta \end{cases}, \quad (22)$$

где $\delta = (\Delta \xi \cdot \Delta \vartheta)^{1/2}$ и $\Delta_{cr} \eta$ — параметры в интервалах: $C_b = 10^{-3} \div 10^{-4}$, $\Delta_{cr} \eta = -120 \div -80$. Отрицательное значение критической крутизны предполагает, что обрушение происходит преимущественно в районе гребней. Алгоритмы (18), (19) и (20)–(22) не изменяют объём и понижают кинетическую и потенциальную энергию волн.

Возникновение вычислительной неустойчивости обычно сигнализирует о том, что диссипация не может справиться с чрезмерно большой крутизной или кривизной поверхности. Алгоритмы (18), (19) и (20)–(22) способны полностью предотвратить опрокидывание и прекращение счёта, но может оказаться, что при заданном наборе параметров a , c_m , C_b , $\Delta_{cr}\eta$ диссипация слишком велика и энергия оказывается меньше, чем ожидалось. В этом, скорее типичном, случае значения параметров приходится подбирать. Схема параметризации для опрокидывания основана на противоречивой концепции поддержания устойчивости счёта при максимальном приближении к опрокидыванию волн. Сходная ситуация возникает при работе с другими гидродинамическими моделями, например, при LES (Large Eddy Simulation) [8] моделировании. Уровень энергии наиболее чувствителен к параметрам c_m и C_b . При подборе параметров целесообразно использовать данные о скорости роста энергии от разгона, изученные в проекте JONSWAP [9].

6. Заключение

В статье дано краткое описание структуры и основных компонент модели TRIDWAVE, предназначенной для моделирования многомодового волнового поля в квазистационарном или в развивающемся режиме с учётом притока энергии и диссипации. Создание модели на основе более или менее простых уравнений потенциальной гидродинамики оказалось непростым делом. Когда модель начала оживать, стало ясно, что она может оказаться, по крайней мере на располагаемых нами компьютерах, почти бесполезной, из-за крайне малой скорости вычислений. Решительный сдвиг произошёл, когда было введено разделение потенциала скорости на формально линейную часть и нелинейную добавку. Это представление точно и не использует никаких предположений. Преимущество такого представления состоит в том, что нелинейная поправка оказывается гораздо меньше линейной составляющей, поэтому её вычисление происходит быстрее. Решение трёхмерного уравнения для потенциала скорости осуществляется с единственной целью — для вычисления двумерного поля вертикальной скорости на поверхности. Решение это должно быть достаточно точным, для чего требуется довольно высокое разрешение по вертикали с сгущением сетки у поверхности. Новая схема оказалась эффективнее в 2–3 раза, чем схема, основанная на первичных уравнениях. После введения двухкомпонентного представления потенциала скорость вычислений всё же оказалась низкой. Далее была предпринята попытка ускорения вычислений за счёт введения нового алгоритма расчёта вертикальной скорости на поверхности. Это оказалось возможным благодаря эмпирически найденной тесной связи между первой и второй в вертикальных производных нелинейной компоненты потенциала у поверхности. (Не исключено, что этот факт может найти теоретическое обоснование, по крайней мере, в приближении малой амплитуды.) В результате, в новой схеме полностью отпала необходимость использовать трёхмерное уравнение для потенциала, на решение которого уходит 90 % вычислительного времени.

В предлагаемом варианте численной модели предусмотрено использование обеих схем решения, переход между которыми осуществляется значением одного внешнего параметра. Если в распоряжении специалиста имеется достаточно быстрый компьютер, он может полностью отказаться от упрощений и использовать «медленную», более точную схему. Если задача состоит в исследовании статистических свойств реального многомодового поля, отказ от упрощённой схемы не оправдан, поскольку статистические результаты, получаемые с FWM и HWM близки друг к другу.

При выборе схемы надо иметь в виду, что модель, снабжённая алгоритмами, описывающими физические процессы, ещё долгое время не может рассматриваться как точная модель. Полную схему целесообразно использовать при моделировании индивидуальных процессов с сильной нелинейностью. Если эти процессы можно рассматривать, как адиабатические, можно быть уверенным, что при задании достаточно-го разрешения результаты точны.

Изложенных в статье сведений достаточно для самостоятельного изготовления модели, учитывающей привычки и потребности новых авторов. Наибольшая польза от модели может быть в будущем достигнута с учётом опыта и предложений её потенциальных пользователей. Статья может быть рассмотрена как оповещение, что модель существует и доступна для получения.

Финансирование

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИО РАН по теме № FMWE-2024-0028.

Funding

The study was carried out within the framework of the Shirshov Institute of Oceanology state assignment (theme No. FMWE-2024-0028).

Литература

1. Чаликов Д.В. Различные подходы к моделированию морских волн // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2022. Т. 15, № 1. С. 19–32. doi:10.59887/fpg/uldf-m1x7-1bxg
2. Chalikov D. Numerical modeling of sea waves. Springer, (eBook). 2016. 330 p. doi:10.1007/978-3-319-32916-1
3. Chalikov D. A 2D Model for 3D Periodic Deep-Water Waves // Journal of Marine Science. 2022. Vol. 10, Iss. 3. 410. doi:10.3390/jmse10030410
4. Hasselmann K. On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum, Part 1 // Journal of Fluid Mechanics. 1962. Vol. 12. P. 481–500. doi:10.1017/S0022112062000373
5. Фокина К.В. Испытания ускоренной двумерной модели поверхностных потенциальных волн // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2023. Т. 16, № 2. С. 34–43. doi:10.59887/2073-6673.2023.16(2)-3
6. Miles J.W. On the generation of surface waves by shear flows // Journal of Fluid Mechanics. 1957. Vol. 3, Iss. 2. P. 185–204. doi:10.1017/S0022112057000567
7. Chalikov D., Rainchik S. Coupled numerical modelling of wind and waves and the theory of the wave boundary layer / Boundary-Layer Meteorology. 2010. Vol. 138, Iss. 1. P. 1–41. doi:10.1007/s10546-010-9543-7
8. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations // Monthly Weather Review. 1963. Vol. 91, Iss. 3. P. 99–164. doi:10.1175/1520-0493(1963)091<0099: GCEWTP>2.3.CO;2
9. Hasselmann K., Barnett T.P., Bouws E. Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP) // Deutsches Hydrographische Zeitschrift. 1973. Vol. 8, N 12. P. 1–95.

References

1. Chalikov D.V. Different Approaches to Numerical Modeling of Sea Waves. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2022;15(1):19–32. doi:10.59887/fpg/uldf-m1x7-1bxg
2. Chalikov D. *Numerical modeling of sea waves*. Springer; 2016. 330 p. doi:10.1007/978-3-319-32916-1
3. Chalikov D. A 2D Model for 3D Periodic Deep-Water Waves. *Journal of Marine Science*. 2022;10(3):410. doi:10.3390/jmse10030410
4. Hasselmann K., Barnett T.P., Bouws E. On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum, Part 1. *Journal of Fluid Mechanics*. 1962;12:481–500. doi:10.1017/S0022112062000373
5. Fokina K.V. Testing of the Accelerated Two-Dimensional Model of Surface Potential Waves. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2023;16(2):34–43. doi:10.59887/2073-6673.2023.16(2)-3 (in Russian).
6. Miles J.W. On the generation of surface waves by shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*. 1957;3(2):185–204. doi:10.1017/S0022112057000567
7. Chalikov D., Rainchik S. Coupled numerical modelling of wind and waves and the theory of the wave boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*. 2010;138(1):1–41. doi:10.1007/s10546-010-9543-7
8. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*. 1963;91(3):99–164. doi:10.1175/1520-0493(1963)091<0099: GCEWTP>2.3.CO;2
9. Hasselmann K., Barnett T.P., Bouws E. Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). *Deutsches Hydrographische Zeitschrift*. 1973;8(12):1–95.

Об авторах

ЧАЛИКОВ Дмитрий Викторович, ведущий научный сотрудник СПбФ ИО РАН, доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: 0000-0001-8698-9558, WoS ResearcherID: AAO-3528-2020, Scopus AuthorID: 57203700718, SPIN-код (РИНЦ): 4192–7324, e-mail: dmitry-chalikov@yandex.ru

ФОКИНА Карина Владимировна, младший научный сотрудник СПбФ ИО РАН, кандидат физико-математических наук, ORCID: 0000-0003-1826-0452, WoS ResearcherID MCI-7658-2025, Scopus AuthorID: 57225150215, SPIN-код (РИНЦ): 9395-5822, e-mail: fokinakarina@yandex.ru