

УДК 551.463

© Д. В. Макаров*, Е. В. Соседко, 2023

Тихоокеанский океанологический институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН, 690041, Приморский край,
г. Владивосток, ул. Балтийская, 43.

*makarov@poi.dvo.ru

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ ДЛЯ ОПИСАНИЯ РАССЕЯНИЯ ЗВУКА НА ФОНОВЫХ ВНУТРЕННИХ ВОЛНАХ В УСЛОВИЯХ МЕЛКОГО МОРЯ

Статья поступила в редакцию 16.03.2023, после доработки 07.08.2023, принята в печать 10.08.2023

Аннотация

Рассматривается задача о распространении низкочастотного звука в мелководном волноводе со случайной гидрологической неоднородностью, обусловленной фоновыми внутренними волнами. Новый подход к статистическому моделированию акустических полей, основанный на теории случайных матриц и ранее успешно применявшийся для глубоководных акустических волноводов, использован для мелководных волноводов. В данном подходе рассеяние звука на случайной неоднородности описывается с помощью статистического ансамбля матриц пропагатора, которые описывают трансформацию акустического поля в пространстве нормальных мод волновода. Проведено исследование эффекта «высвечивания» звука из волновода. Термин «высвечивание» здесь означает перекачку энергии в моды с повышенным поглощением за счет рассеяния на внутренних волнах. Рассмотрена модель подводного звукового канала с осью на глубине около 45 метров. Обнаружено, что первые несколько мод, распространяющихся внутри водной толщи, в очень малой степени подвержены потерям, обусловленным «высвечиванием». Наиболее сильное «высвечивание» испытывает средняя группа мод, способная достигать морской поверхности. Это проявляется как значительное усиление потерь по сравнению с горизонтально однородным волноводом. С другой стороны, выявлено существование линейных модовых комбинаций, для которых усиление потерь практически отсутствует. Данные линейные комбинации соответствуют собственным функциям пропагатора для неоднородного волновода. Статистический анализ собственных функций пропагатора указывает на качественные отличия механизмов рассеяния звука при частотах 100 и 500 Гц.

Ключевые слова: подводный звуковой канал, внутренние волны, лучевой хаос, пропагатор акустического поля, теория случайных матриц

© D. V. Makarov*, E. V. Sosedko, 2023

V.I. P'ichev Pacific Oceanological Institute, Far Eastern Branch Russian Academy of Sciences, 690041, Vladivostok,
Baltiyskaya Street, 43, Russia

*makarov@poi.dvo.ru

RANDOM MATRIX THEORY FOR DESCRIPTION OF SOUND SCATTERING ON BACKGROUND INTERNAL WAVES IN A SHALLOW SEA

Received 16.03.2023, Revised 07.08.2023, Accepted 10.08.2023

Abstract

The problem of propagation of low-frequency sound in a shallow waveguide with random hydrological inhomogeneity caused by background internal waves is considered. A new approach to statistical modeling of acoustic fields, based on the application of the random matrix theory and previously successfully used for deep-water acoustic waveguides, is used to the case of shallow-water waveguides. In this approach, sound scattering on random inhomogeneity is described using an ensemble of random propagator matrices which describe the transformation of the acoustic field in the space of normal waveguide modes. A study of the effect of sound “escaping” from a waveguide was carried out. The term “escaping” here means energy transfer to modes with stronger attenuation due to scattering on internal waves. A model of an underwater sound channel with an axis at a depth of about 45 meters is considered. It is shown that the first few modes propagating inside the water column are very little subject to losses due to the “escaping”. The strongest impact of the leakage scattering is experienced by the middle group of modes capable of reaching the sea surface. It is revealed as significant increasing of losses as compared to a horizontally homogeneous waveguide. On the other

Ссылка для цитирования: Макаров Д.В., Соседко Е.В. Теория случайных матриц для описания рассеяния звука на фоновых внутренних волнах в условиях мелкого моря // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2023, 16, 3, 142–155. doi:10.59887/2073-6673.2023.16(3)-11

For citation: Makarov D.V., Sosedko E.V. Random Matrix Theory for Description of Sound Scattering on Background Internal Waves in a Shallow Sea. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2023, 16, 3, 142–155. doi:10.59887/2073-6673.2023.16(3)-11

hand, the existence of linear mode combinations for which loss enhancement is practically absent has been revealed. These linear combinations correspond to the eigenfunctions of an inhomogeneous waveguide. Statistical analysis of propagator eigenfunctions indicates on qualitative differences of mechanisms of scattering for frequencies of 100 and 500 Hz.

Keywords: underwater sound channel, internal waves, ray chaos, acoustic wavefield propagator, random matrix theory

1. Введение

Рассеяние звука на океанических внутренних волнах в океане представляет собой один из главных механизмов декогеренции акустических сигналов при распространении на средние и дальние дистанции. Главным фактором влияния внутренних волн являются вызываемые ими вариации вертикального профиля скорости звука, влияющие на рефракцию звуковых волн. Если не брать во внимание уединенные пакеты нелинейных внутренних волн, эти вариации являются достаточно слабыми, порядка 1 м/с. Тем не менее, накопленный эффект от рассеяния на случайных полях линейных внутренних волн может быть очень значительным. В частности, именно фоновые внутренние волны рассматриваются в качестве главного ограничительного фактора на возможности гидроакустической томографии [1, 2] и звукоподводной связи [3, 4] на больших дистанциях.

С математической точки зрения рассеяние звука на внутренних волнах относится к классу задач о распространении волн в случайно-неоднородных средах в режиме многократного рассеяния [5]. В последние десятилетия был разработан новый подход к задачам такого рода, основанный на теории лучевого и волнового хаоса [6–11]. Он основан на обобщении идей теории динамического хаоса в классической и квантовой механике на распространение волн в неоднородных средах. Явление лучевого хаоса связано с ляпуновской неустойчивостью траекторий звуковых лучей, что порождает крайне нерегулярную и непредсказуемую картину звукового поля. Термин волновой хаос относится к проявлениям лучевого хаоса при конечной длине акустической волны. Волновой хаос является прямым аналогом квантового хаоса. Методы и представления теории квантового хаоса, адаптированные для задач акустики океана, представляют особую ценность, поскольку они позволяют не только выделить основные механизмы декогеренции акустических сигналов, но и корректно учесть влияние интерференционных и дифракционных поправок, что особенно актуально для низкочастотных сигналов.

Одним из наиболее продвинутых подходов теории волнового хаоса в акустике океана, позаимствованных из квантовой теории, является теория случайных матриц. В акустике океана теория случайных матриц используется для построения и анализа пропагатора акустического поля, представляющего собой оператор эволюции акустического поля в процессе распространения. Теория пропагатора акустического поля в случайно-неоднородных глубоководных акустических волноводах была развита в работах [11–16]. Вместе с тем, существует потребность в адаптации этой теории на случай мелкого моря. Именно этой задаче и посвящена данная работа. Обобщение на случай мелкого моря предполагает, в первую очередь, учет влияния дна. Кроме того, в условиях мелкого моря необходимо учитывать звуковые волны, распространяющиеся под достаточно большими углами относительно горизонтальной плоскости, что предполагает использование широкоугольного параболического уравнения. Наше внимание будет сосредоточено на эффекте «высвечивания» звука из подводного звукового канала, возникающем вследствие накачки мод с повышенным затуханием. Как было показано в работах [17, 18], рассеяние на внутренних волнах является одним из механизмов повышенного высвечивания.

Статья построена следующим образом. В следующем разделе представлено обобщение теории случайных матриц на случай мелководных акустических волноводов. В разделе 3 описывается модель мелководного акустического волновода с биэкспоненциальным профилем скорости звука, используемая в данной работе. Раздел 4 посвящен результатам численного моделирования для рассматриваемой модели. В разделе 5 приведены основные результаты работы и обсуждаются пути дальнейшего исследования.

2. Теория случайных матриц для распространения звука в мелком море

Рассмотрим режим двумерного распространения звука в вертикальной плоскости, соединяющей источник и приемник. Этот режим соответствует случаю, когда горизонтальная неоднородность среды является настолько слабой, что можно пренебречь взаимодействием различных азимутальных угловых компонент акустического поля. В этом случае звуковое поле в подводном акустическом волноводе описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} \right] + k_0^2 n^2 u = 0, \quad (1)$$

где z — глубина, r — горизонтальная координата, $u = u(r, z)$ — звуковое поле, k_0 — опорное волновое число, связанное с частотой звука f с помощью формулы $k_0 = 2\pi f / c_0$ (c_0 — референтное значение скорости звука,

обычно принимаемое равным скорости звука на оси волновода), n — показатель преломления звуковых волн, ρ — плотность среды. Пренебрегая обратным рассеянием, мы можем преобразовать уравнение Гельмгольца (1) в однонаправленное уравнение для огибающей акустического поля $\Psi(r, z) = u(r, z) \times \Psi(r, z) = u(r, z) \sqrt{k_0 r} \exp(-ik_0 r)$ [19]:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = ik_0 (\hat{Q} - 1) \Psi, \quad (2)$$

где действие оператора \hat{Q} описывается выражением

$$\hat{Q} = \sqrt{n^2 + \frac{1}{k_0^2} \rho \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \right]}. \quad (3)$$

Уравнение (2) называется широкоугольным параболическим уравнением. Его решение может быть формально выражено как

$$\Psi(r'', z) = \hat{G}(r'', r') \Psi(r', z), \quad (4)$$

где $\hat{G}(r'', r')$ — пропагатор акустического поля. Чтобы найти представление пропагатора в явном виде, целесообразно воспользоваться базисом нормальных мод волновода. Нормальные моды являются решениями задачи Штурма-Лиувилля [19]

$$k_0^2 \hat{Q}^2 \Psi_m = k_{m}^2 \Psi_m, \quad (5)$$

также включающей в себя соответствующие граничные условия. Акустическое поле может быть представлено как суперпозиция нормальных мод

$$\Psi(r, z) = \sum_m a_m(r) \Psi_m(z), \quad (6)$$

где модовые амплитуды определяются формулой

$$a_m(r) = \int \frac{\Psi_m^*(z) \Psi(r, z)}{\rho(z)} dz, \quad (7)$$

Представляя модовые амплитуды в виде вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_M)^T$, где M — общее число мод дискретного спектра, мы можем переписать (4) в матричном виде

$$\vec{a}(r'') = \mathbf{G}(r'', r') \vec{a}(r'), \quad (8)$$

где $\mathbf{G}(r_0, r_f)$ — матрица, элементы которой определяются по формуле

$$G_{mn}(r'', r') = \int \Psi_m^*(z) \hat{G}(r'', r') \Psi_n(z) dz. \quad (9)$$

Здесь $\hat{G}(r'', r') \Psi_n(z)$ — решение уравнения (2) при $r = r'$ с начальным условием $\Psi(r = r', z) = \Psi_n(z)$.

В дальнейшем мы ограничимся случаем волноводов со слабой случайной горизонтальной неоднородностью. В этом случае оператор \hat{Q} может быть представлен в виде суммы «невозмущенного» оператора \hat{Q}_0 , соответствующего распространению звука в горизонтально-однородном волноводе, и случайного возмущения \hat{V} , описывающего влияние неоднородности. Тогда уравнение (2) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = ik_0 [\hat{Q}_0 + \hat{V}(r) - 1] \Psi. \quad (10)$$

Разобьем волноводную трассу на сегменты длиной Δr . Тогда результирующий пропагатор трассы между $r = r_0$ и $r = r_f$ может быть представлен в виде произведения пропагаторов для отдельных сегментов:

$$\hat{G}(r_f, r_0) = \hat{G}(r_f, r_f - \Delta r) \hat{G}(r_f - \Delta r, r_f - 2\Delta r) \dots \hat{G}(r_0 + \Delta r, r_0).$$

В матричном представлении это выражение выглядит следующим образом:

$$\mathbf{G}(r_f, r_0) = \mathbf{G}(r_f, r_f - \Delta r) \mathbf{G}(r_f - \Delta r, r_f - 2\Delta r) \dots \mathbf{G}(r_0 + \Delta r, r_0). \quad (11)$$

В случае слабой неоднородности и/или при малых Δr мы можем воспользоваться теорией возмущений для расчета пропагатора отдельного сегмента. В первом порядке теории возмущений уравнение (10) может быть представлено в матричной форме

$$\mathbf{G} \approx \mathbf{D}(\mathbf{I} + i\mathbf{A}), \quad (12)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица, \mathbf{D} — диагональная матрица с элементами, определяемыми по формуле

$$D_{mn} = \delta_{mn} e^{(ik_m - \alpha_m)\Delta r}, \quad (13)$$

δ_{mn} — символ Кронекера, $k_m = \text{Re}k_{rm}$, $\alpha_m = \text{Im}k_{rm}$, а \mathbf{A} — случайная матрица, описывающая межмодовое взаимодействие, обусловленное действием оператора возмущения. Матричные элементы \mathbf{A} определяется выражением

$$A_{mn}(r'', r') = k_0 \int_{r'}^{r''} V_{mn}(r) e^{i(k_n - k_m)r} dr, \quad (14)$$

где $V_{mn}(r)$ — матричный элемент возмущения,

$$V_{mn}(r) = \int \frac{\Psi_m^*(z) \hat{V}(r) \Psi_n(z)}{\rho(z)} dz. \quad (15)$$

При $\Delta r \ll \alpha_m^{-1}$ мы можем положить в показателе экспоненты $k_{rm} = k_m$. В действительности, это условие не выполняется для донных мод. Однако влияние поля внутренних волн на донные моды является достаточно слабым, поэтому мы используем упрощенную модель взаимодействия водных и донных мод, не учитывающую вклад мнимых частей волновых чисел в показатель экспоненты в (14). Таким образом, (14) приводится к виду

$$A_{mn}(r'', r') \approx k_0 \int_{r'}^{r''} V_{mn}(r) e^{i(k_n - k_m)r} dr. \quad (16)$$

Очевидно, что вид матрицы \mathbf{A} определяется как моделью неоднородности, так и опорным профилем скорости звука, определяющим вид нормальных мод. Поле фоновых внутренних волн приводит к флуктуациям показателя преломления звуковых волн:

$$n^2(r, z) = n_0^2(z) + \varepsilon(r, z), \quad |\varepsilon| \ll 1. \quad (17)$$

Флуктуации показателя преломления связаны с полем вертикальных смещений жидкости $\zeta(r, z)$ посредством формулы [20]

$$\varepsilon(r, z) = -2qN^2(z)\zeta(r, z), \quad (18)$$

где $q \approx 2,4 \text{ с}^2/\text{м}$, $N(z)$ — профиль частоты Ваясяля-Брента. Здесь и в дальнейшем мы используем приближение «замороженной» среды, считая, что изменения поля внутренних волн за время прохождения акустического сигнала являются пренебрежимо малыми.

Чтобы выделить соответствующий оператор возмущения \hat{V} из операторного квадратного корня \hat{Q} , можно воспользоваться следующей приближенной формулой [21]:

$$\hat{Q} = \sqrt{n_0^2(z) + \frac{1}{k_0^2} \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial}{\partial z} \right]} + \sqrt{1 + \varepsilon} - 1. \quad (19)$$

Принимая во внимание, что $\sqrt{1 + \varepsilon} \approx 1 + 0,5\varepsilon$, получаем простую формулу

$$\hat{V} = \frac{\varepsilon(r, z)}{2}, \quad (20)$$

т. е. действие оператора возмущения на акустическое поле сводится к простому умножению на $\varepsilon/2$.

Поле вертикальных смещений может быть представлено в виде двойной суммы [22]

$$\zeta(r, z) = \sum_l \sum_j F(k_l, j) \phi(k_l, j, z) e^{ik_l r}, \quad (21)$$

где $F(k_l, j)$ — комплексные гауссовы случайные величины с нулевым средним и некоторой спектральной плотностью, $\phi(k_l, j, z)$ — вертикальные моды внутренних волн, являющиеся решениями задачи Штурма-Лиувилля

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + k_l^2 \left[\frac{N^2(z) - \omega^2}{\omega^2 - f_l^2} \right] \phi(z) = 0 \quad (22)$$

с граничными условиями

$$\phi(z=0) = \phi(z=h) = 0, \quad (23)$$

где h — глубина морского дна. С помощью разложения по эмпирическим ортогональным функциям [23], либо с применением приближения ВКБ для соответствующего вида функции $N(z)$ [24], выражение для возмущения ε можно переписать следующим образом:

$$\varepsilon(r, z) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J W_j(z) \sum_{n=-N_L}^{N_L} \Upsilon_{j,n} e^{in\kappa r}, \quad (24)$$

где $\Upsilon_{j,l}$ — случайные комплексные амплитуды, статистические свойства которых определяются спектральной плотностью внутренних волн, $\Upsilon_{j,-l}^* = \Upsilon_{j,l}$,

$$\kappa = \frac{2\pi}{\Delta r}, \quad (25)$$

и функции $W_j(z)$ не зависят от горизонтального волнового числа внутренней волны. Тогда матричные элементы оператора возмущения выражаются формулой

$$V_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J W_{mn,j} \sum_{l=-N_k}^{N_k} \Upsilon_{j,l} e^{il\kappa r}, \quad (26)$$

где

$$W_{mn,j} = \int \frac{\Psi_m^*(z) W_j(z) \Psi_n(z)}{\rho(z)} dz. \quad (27)$$

Подставляя (26) в (16) и интегрируя, получаем выражение для элементов матрицы межмодового взаимодействия

$$A_{mn} = \frac{k_0 \Delta r}{4} \sum_{j=1}^J W_{mn,j} \sum_{l=-L}^L \Upsilon_{j,l} \text{sinc}(\chi_{lmn}) \exp(i\chi_{lmn}), \quad (28)$$

где

$$\text{sinc}(\chi_{mn}) = \frac{\sin \chi_{mn}}{\chi_{mn}}, \quad (29)$$

$$\chi_{lmn} = \frac{(l\kappa + k_n - k_m) \Delta r}{2}. \quad (30)$$

Таким образом, мы можем построить пропагатор акустической трассы, учитывающий рассеяние звука на внутренних волнах, выполнив последовательность из нескольких шагов. Во-первых, если речь идет о протяженной трассе, мы должны разбить ее на сегменты. Длина сегмента не должна быть слишком большой, чтобы обеспечивались условия применимости теории возмущений, на которой основана формула (12). С другой стороны, не следует брать шаг пропагатора слишком малым — он должен достаточно большим, чтобы можно было пренебречь корреляциями между матрицами пропагаторов для соседних сегментов. Вопрос о выборе шага пропагатора подробно рассмотрен в работе [15]. Затем мы должны решить задачу Штурма-Лиувилля для невозмущенного волновода и построить статистическую модель поля внутренних волн. Выполнив эти процедуры, мы можем построить статистический ансамбль матриц возмущения с помощью формулы (28), которому соответствует статистический ансамбль матриц пропагатора.

3. Модель акустического волновода

В качестве примера рассмотрим подводный звуковой канал (ПЗК) глубиной 250 метров с биэкспоненциальным опорным профилем скорости звука, описываемым формулой

$$c(z) = c_0 \left[1 + \frac{b^2}{2} (e^{-z/z_a} - \eta)^2 \right], \quad (31)$$

где $c_0 = 1485$ м/с, $z_a = 50$ м, $b = 0,4$, $\eta = 0,4$. Волноводы с биэкспоненциальным профилем скорости звука были впервые рассмотрены в работах [25, 26]. Детальный анализ свойств таких волноводов был дан в рабо-

тах [17, 27] (см. также [9]). Как следует из рис. 1, рассматриваемый волновод допускает в общей сложности четыре типа мод: (i) чисто водные моды, распространяющиеся вблизи оси канала и характеризующиеся практически нулевым затуханием, (ii) моды, испытывающие рефракционный разворот в верхнем слое океана и при этом отражающиеся от дна, (iii) моды, отражающиеся и от дна, и от морской поверхности, и (iv) моды, распространяющиеся преимущественно внутри осадочного слоя. В данной модели принято, что осадочный слой снизу на горизонте $z = 700$ м граничит со слоем твердых пород. Плотность осадочного слоя принята равной $1,7$ г/см³, скорость звука считается постоянной и равна 1600 м/с. Затухание в осадочном слое учитывалось как мнимая добавка к показателю преломления, зависящая от частоты звука по закону

$$\text{Im} n(f) = 0,2 \times 10^{-3} f. \quad (32)$$

Ось ПЗК, соответствующая минимуму скорости звука, расположена на глубине

$$z_0 = -z_a \ln \eta = 45,8 \text{ м.}$$

В качестве модели поля внутренних волн используется модифицированная модель Гарретта-Манка, предложенная в работе [28]. В ней пространственный спектр внутренних волн описывается формулой

$$\Xi(k_l, j) \equiv \langle |F(k_l, j)|^2 \rangle = E_0 M (j^2 + j_*^2)^{-p/2} S_j(k_l), \quad (33)$$

где спектральная плотность описывается выражением

$$S_j(k_l) = \frac{\Lambda_j k_j k_l^2}{(k_l^2 + k_j^2)^{3/2} \left(k_l^2 + \frac{\bar{N}^2}{f_i^2} k_j^2 \right)^{1/2}}, \quad (34)$$

а константа M определяется как

$$M = \frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} (j^2 + j_*^2)^{-p/2}}, \quad (35)$$

Входящая в (34) величина Λ_j определяется условием нормировки

$$\sum_l S_j(k_l) = 1. \quad (36)$$

Как было показано в [28], условиям мелкого моря соответствует $j_* = 1$, и $p = 3$ или 4 , что соответствует усиленному подавлению высоких мод поля внутренних волн, ответственных за формирование тонкоструктурных искажений профиля скорости звука. В данной работе мы остановимся на случае $p = 3$. Вместе с тем, подавление тонкой структуры, обусловленной внутренними волнами, способно качественно повлиять на свойства рассеяния. Известно, что возмущение профиля скорости звука с малым вертикальным масштабом способно породить сильную неустойчивость наиболее пологих звуковых лучей, распространяющихся почти горизонтально вдоль оси волновода [9, 27, 29–31]. Если вертикальные осцилляции возмущения являются слабыми, то наиболее сильную неустойчивость испытывают наиболее крутые лучи, что способствует усиленным потерям за счет высвечивания звука в поглощающее дно.

Чтобы определить значение параметра E_0 , определяющее энергию внутренних волн, введем профиль среднеквадратичного смещения,

$$\sigma_{\zeta}(z) = \sqrt{\langle \zeta^2 \rangle - \langle \zeta \rangle^2}, \quad (37)$$

где угловые скобки означают усреднение по множеству статистически независимых вертикальных профилей $\zeta(z)$. В данной работе подбирается таким образом E_0 , чтобы значение $\sigma_{\zeta}(z)$ в точке максимума было равно 3 м.

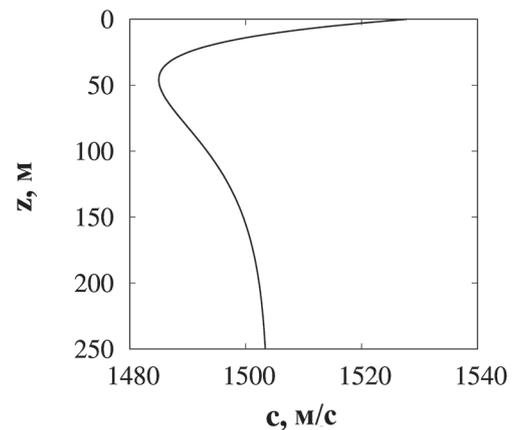


Рис. 1. Биэкспоненциальный профиль скорости звука, адаптированный для мелкого моря

Fig. 1. Biexponential sound-speed profile adapted for a shallow sea

В работе рассматривается случай экспоненциально спадающего профиля частоты Вэйсяля-Брента

$$N(z) = N_0 \exp(-z/B), \quad (38)$$

где $B = 30$ м — глубина термоклина. В приближении ВКБ функции $W_j(z)$ имеют вид

$$W_j(z) = w_j e^{-2z/B} \sin[j\pi\xi(z)], \quad (39)$$

где $\xi(z) = e^{-z/B} - e^{-h/B}$, w_j — нормировочная константа.

Мы можем считать комплексные амплитуды $\Upsilon_{j,l}$ в (26) случайными гауссовыми величинами,

$$\langle \Upsilon_{j,n}^* \Upsilon_{j',n'} \rangle = \sigma_\Upsilon^2(j,n) \delta_{jj'} \delta_{nn'}, \quad (40)$$

где $\delta_{kk'}$ — символ Кронекера. Величины σ_Υ^2 могут быть найдены аналитически:

$$\sigma_\Upsilon^2(j,n) = \frac{1}{4} \sum_l \sqrt{\Xi(k_l, j)} \left[\text{sinc}^2\left(\frac{k_l - n\kappa}{2} \Delta r\right) + \text{sinc}^2\left(\frac{k_l + n\kappa}{2} \Delta r\right) \right]. \quad (41)$$

4. Численное моделирование

Влияние фоновых внутренних волн на затухание звука исследовано с помощью численного моделирования, включающего в себя статистический анализ с использованием ансамбля из 1000 реализаций пропатора, рассчитанного по формулам (11), (12) и (28). Каждой реализации пропатора соответствует своя реализация поля внутренних волн. Очевидно, что скорость затухания акустического волнового пакета должна зависеть от геометрии его распространения. Чтобы оценить эту зависимость, рассмотрим начальные условия в виде отдельной нормальной моды невозмущенного волновода и отследим зависимость затухания от номера этой моды. Для этого введем интенсивность акустического поля, порождаемого отдельной модой:

$$J_n(r) = \sum_m |G_{mn}(r, 0)|^2. \quad (42)$$

На рис. 2 представлены зависимости J_n от n . В качестве начальных условий рассматривались только моды, преимущественно распространяющиеся в водной толще. В первую очередь обращает на себя внимание сходство кривых, соответствующих разным частотам, особенно если принять во внимание, что плотность модового спектра пропорциональна акустической частоте. В обоих приведенных случаях мы наблюдаем практически незатухающие поля, создаваемые группами наименьших мод, распространяющихся в окрестности оси канала и не достигающих ни дна, ни морской поверхности. Наибольшее влияние внутренние волны оказывают на акустические моды, достигающие морской поверхности: в этом случае мы наблюдаем существенное падение интенсивности по сравнению с горизонтально-однородным волноводом.

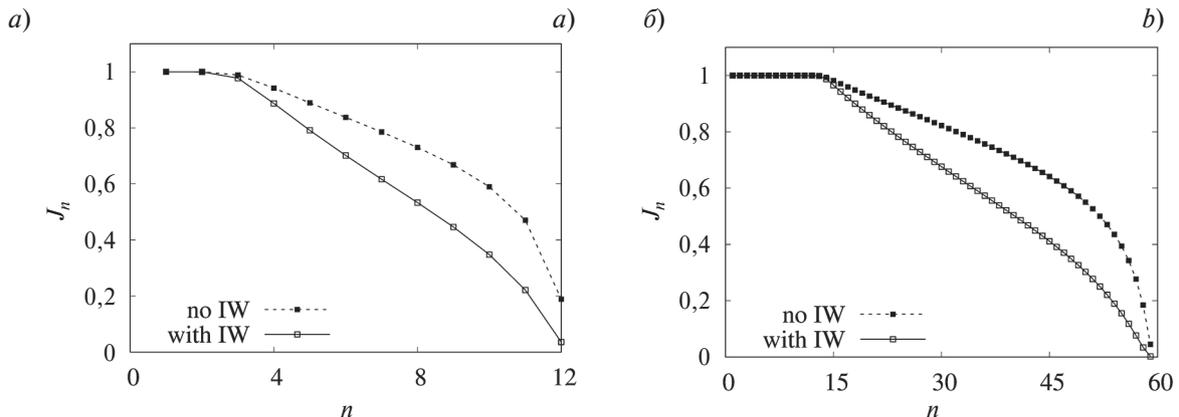


Рис. 2. Зависимость интенсивности акустического поля, создаваемого начальным условием в виде отдельной моды, от номера этой моды, $r = 20$ км. Частота звука: 100 Гц (а), 500 Гц (б). Штриховая линия — горизонтально-однородный волновод (“no IW”), сплошная кривая — волновод с возмущением скорости звука, обусловленным внутренними волнами (“with IW”)

Fig. 2. Dependence of the intensity of the acoustic field created by the single-mode initial condition on the number of this mode, km. Sound frequency: 100 Hz (a), 500 Hz (b). The dashed line corresponds to the horizontally homogeneous waveguide (“no IW”), the solid curve corresponds to the waveguide with sound-speed perturbation caused by internal waves (“with IW”)

Значительную информацию о свойствах распространения звука дает спектральный анализ пропагатора. Собственные функции $\Phi_n(r, z)$ и собственные волновые числа ξ_n пропагатора могут быть найдены как решения уравнения

$$\hat{G}\Phi_n(r, z) = e^{i\xi_n \Delta r} \Phi_n(r, z), \quad (43)$$

где $\Phi_n(r + \Delta r, z) = \Phi_n(r, z)$. Уравнение (43) может быть переписано в матричном виде как

$$\mathbf{G}\mathbf{b}_n = e^{i\xi_n \Delta r} \mathbf{b}_n, \quad (44)$$

где $e^{i\xi_n \Delta r}$ и \mathbf{b}_n — собственные числа и собственные векторы матрицы пропагатора, соответственно. Величина

$$\gamma_n = \text{Im} \xi_n \quad (45)$$

определяет скорость затухания соответствующей собственной функции. Связь между собственными функциями и собственными векторами пропагатора устанавливается выражением

$$\Phi_n(z) = \sum_m b_{mn} \Psi_m(z), \quad (46)$$

где b_{mn} — m -й элемент n -го собственного вектора матрицы пропагатора. В случае горизонтально-однородного волновода сумма (46) содержит только одно ненулевое слагаемое. В некотором смысле мы можем называть функции $\Phi_n(z)$ модами неоднородного волновода.

Чтобы классифицировать собственные функции пропагатора, введем параметр [7]

$$\mu_n = \sum_m |b_{mn}|^2 m. \quad (47)$$

Мы выбрать такой порядок нумерации собственных функций пропагатора, который соответствовал бы возрастанию параметра μ_n , т.е. μ_1 соответствовал бы наименьшему значению, μ_2 — следующему за ним, и т.д. При таком порядке нумерации в горизонтально-однородном волноводе мы имеем $\mu_n = n$.

На рис. 3 представлена зависимость коэффициента затухания собственной функции пропагатора от соответствующего значения параметра μ_n . Приведены данные только для мод, преимущественно распространяющихся в водной толще, поэтому значения коэффициентов затухания являются очень низкими. Действительно, в данной работе затухание звука непосредственно в воде считается нулевым, поэтому полученные значения полностью определяются степенью проникновения волн в морское дно. Как следует из приведенных данных, значения коэффициентов затухания для мод неоднородного волновода практически идеально «нализуются» на кривую, формируемую коэффициентами затухания для мод невозмущенного волновода. Некоторые отклонения наблюдаются только на рис. 3, б, в области значений μ_n , соответствующей границе между чисто водными модами, не достигающими ни дна, ни морской поверхности, и модами, отражающимися от дна.

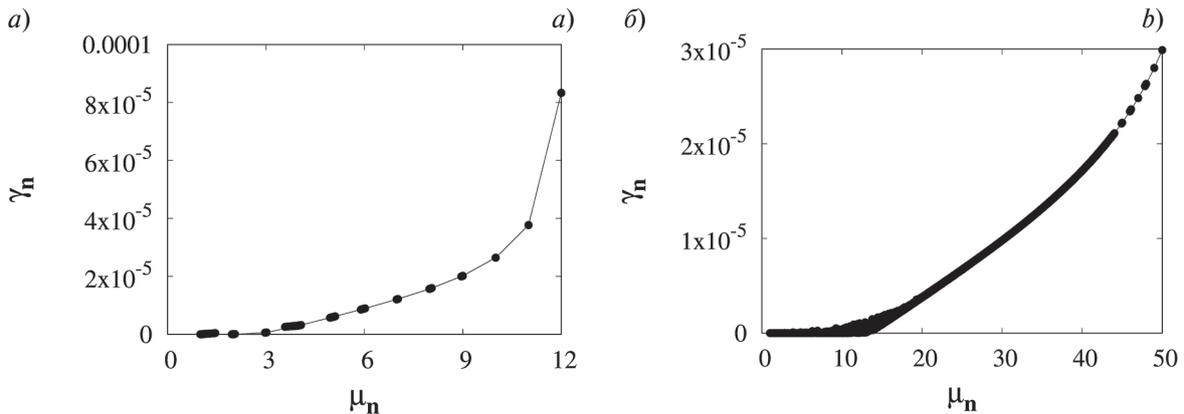


Рис. 3. Зависимость коэффициента затухания собственной функции пропагатора от значения параметра μ_n . Жирными точками обозначены значения, соответствующие различным реализациям пропагатора в горизонтально-неоднородном волноводе, тонкая сплошная линия соответствует невозмущенному волноводу. Частота звука: 100 Гц (а), 500 Гц (б)

Fig. 3. Dependence of the propagator eigenfunction attenuation rate on value of the parameter μ_n . Bold dots indicate values corresponding to different realizations of the propagator in a range-dependent waveguide, the thin solid line corresponds to the unperturbed waveguide. Sound frequency: 100 Hz (a), 500 Hz (b)

Таким образом, мы можем сделать важный физический вывод: несмотря на то, что рассеяние на внутренних волнах в целом приводит к перекачке акустической энергии в моды с более высоким затуханием и тем самым увеличивает потери, существуют линейные комбинации мод волновода, характеризующиеся практически таким же затуханием, что и невозмущенные моды. Эти линейные комбинации являются собственными функциями пропагатора для неоднородного океана. К сожалению, эти функции имеют значительный элемент стохастичности и, как следствие, не известны априори, что затрудняет проверку данного эффекта в условиях натурального эксперимента.

Степень взаимодействия мод, обусловленного рассеянием на неоднородности, можно количественно охарактеризовать с помощью числа главных компонент в разложении (46), определяемого как

$$v(n) = \frac{1}{\sum_m |\bar{b}_{mn}|^4}, \quad (48)$$

где \bar{b}_{mn} — перенормированные модовые амплитуды, удовлетворяющие условию

$$\sum_m |\bar{b}_{mn}|^2 = 1. \quad (49)$$

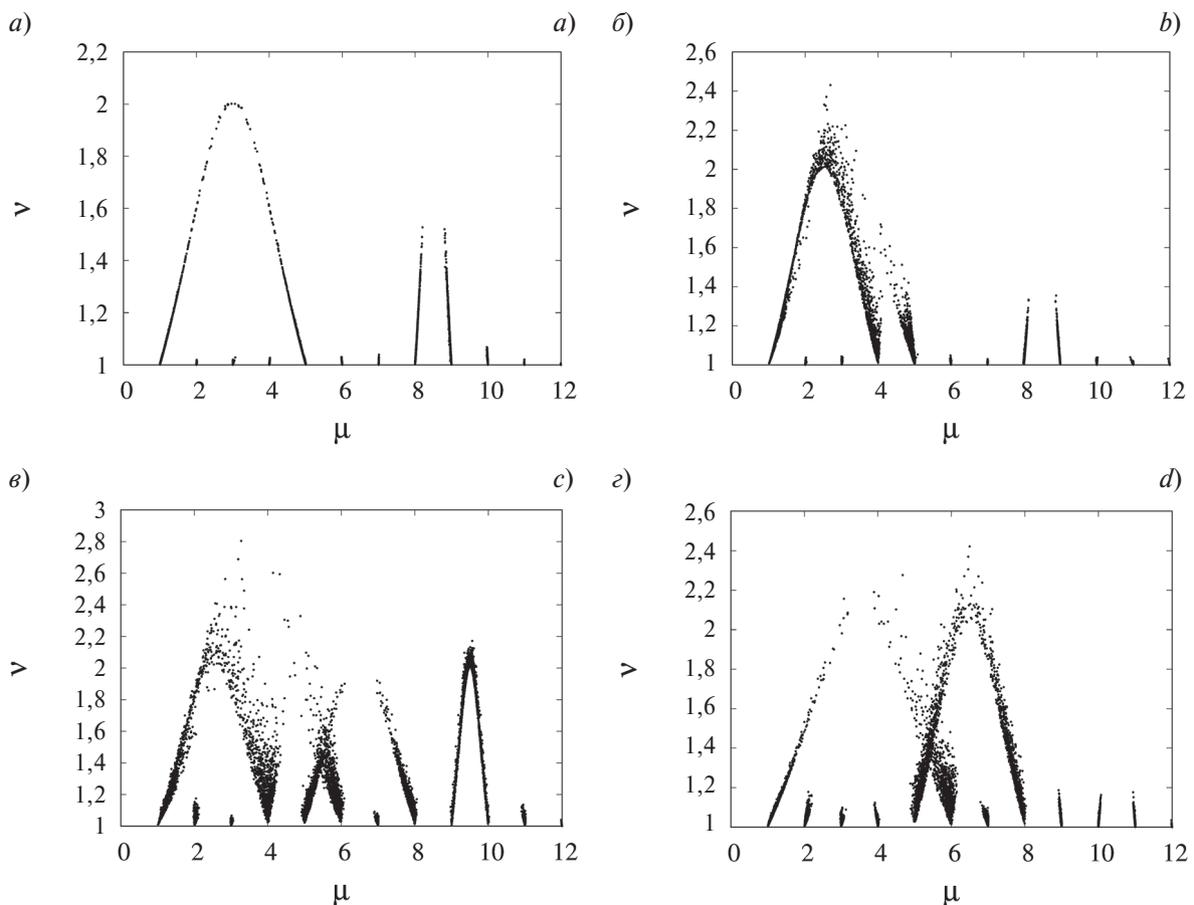


Рис. 4. Распределение собственных функций пропагатора для частоты звука 100 Гц в плоскости параметров μ и ν . Каждая точка на рисунке соответствует отдельной собственной функции для отдельно взятой реализации пропагатора. Представленные данные сформированы ансамблем из 1000 реализаций. Значения длины акустической трассы: 2 км (а), 4 км (б), 10 км (в), 20 км (г). Индекс n при параметре μ опущен

Fig. 4. Distribution of propagator eigenfunctions for frequency 100 Hz in the space of parameters μ and ν . Each point in the figure corresponds to an eigenfunction for an individual realization of the propagator. The presented data corresponds to an ensemble consisted of 1000 realizations. Distance values: 2 km (a), 4 km (b), 10 km (c), 20 km (d). Index n at μ is dropped out

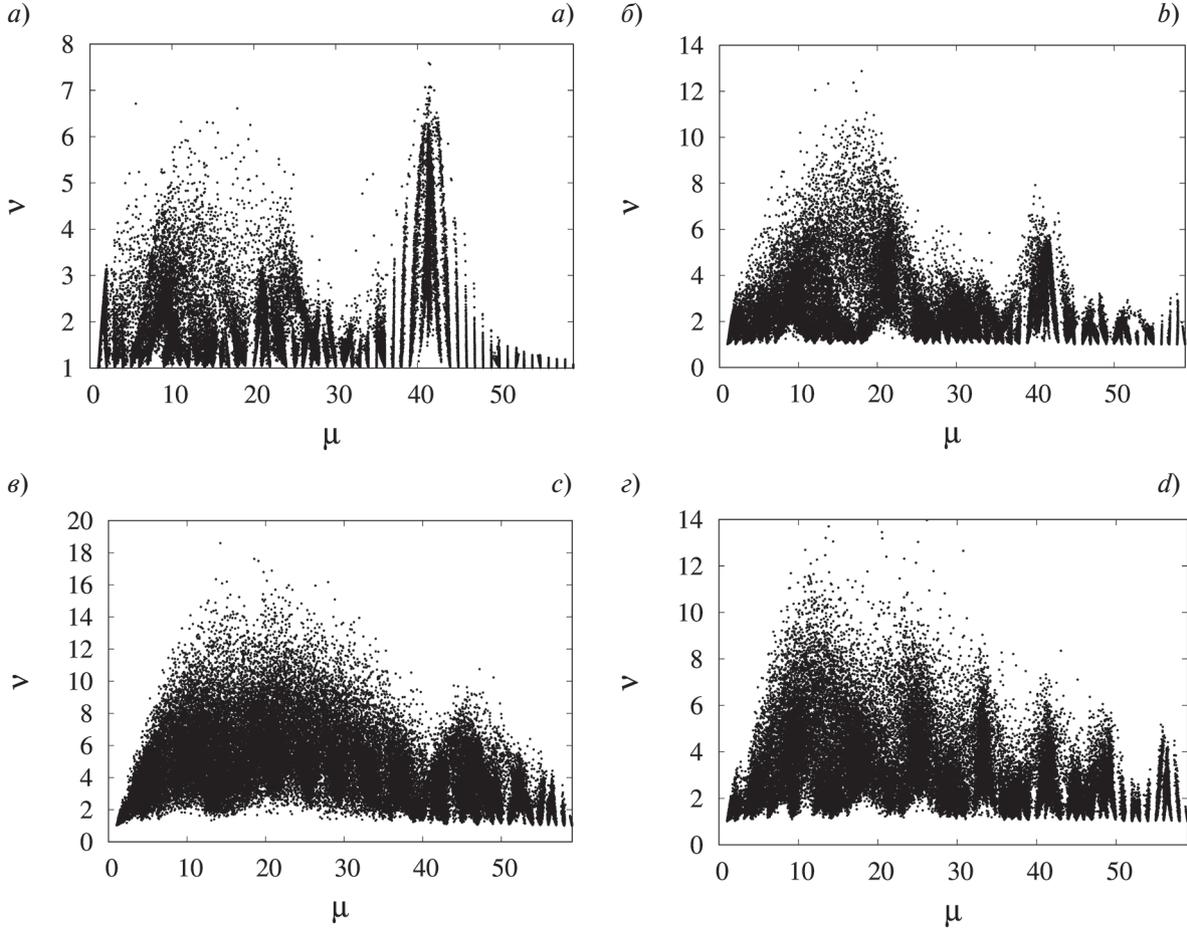


Рис. 5. То же самое, что и на рис. 4, но для частоты звука 500 Гц

Fig. 5. The same as in Fig. 4, but for frequency 500 Hz

На рис. 4 и 5 представлены распределения собственных функций пропагатора в пространстве параметров μ_n (в дальнейшем мы опустим индекс n) и ν . На рис. 4 представлены данные для частоты звука 100 Гц. Мы видим, что распределения собственных функций формируют регулярные структуры в виде «мостиков». Как было показано в работах [13, 14], каждый такой «мостик» соответствует собственному резонансу пропагатора, определяемому условием

$$|k_m - k_n| = \frac{2\pi}{r_f - r_0}. \quad (50)$$

Резонансно связанные моды могут одновременно участвовать еще в нескольких резонансах вида (50) — в таком случае «мостик» становится несколько размытым, что и наблюдается с ростом длины трассы $r_f - r_0$.

При частоте звука 500 Гц «мостики» практически не наблюдаются, но возникает несколько иной вид структур в виде характерных пучков сходящихся кверху вертикальных полос. Эти структуры имеют лучевое происхождение: они соответствуют резонансам лучевого аналога пропагатора — одношагового отображения Пуанкаре (см., например, [32]). Соответствующее условие резонанса имеет вид

$$m(r_f - r_0) = mD, \quad (51)$$

где m и n — целые числа, а D — длина полного цикла траектории луча. При перекрытии таких структур возникает режим усиленного взаимодействия мод, ассоциирующийся с динамическим хаосом [6–14]. С ростом шага пропагатора различные пучки полос сливаются и формируют общую обширную «гору», вершина которой соответствует собственным функциям с наибольшим вкладом рассеяния.

Таким образом, существенные отклонения числа главных компонент от единицы так или иначе связаны с собственными резонансами пропагатора, которые могут быть как волновыми (50), так и лучевыми (51). Влияние последних на межмодовое взаимодействие оказывается намного более сильным. На рис. 6

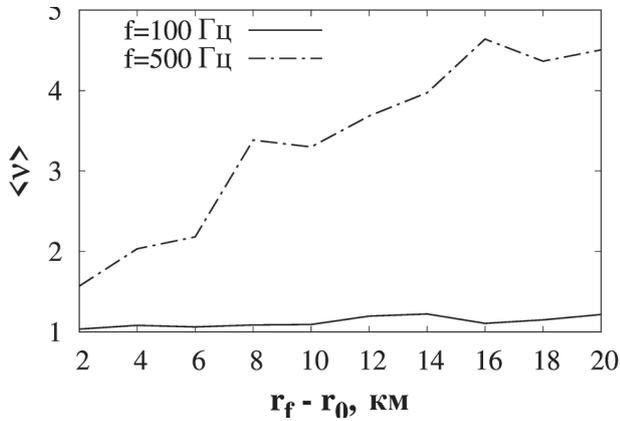


Рис. 6. Зависимость среднего значения числа главных компонент в разложении собственных функций пропегатора от длины акустической трассы пропегатора

Fig. 6. Range dependence of mean number of principal components in expansion of propagator eigenfunctions

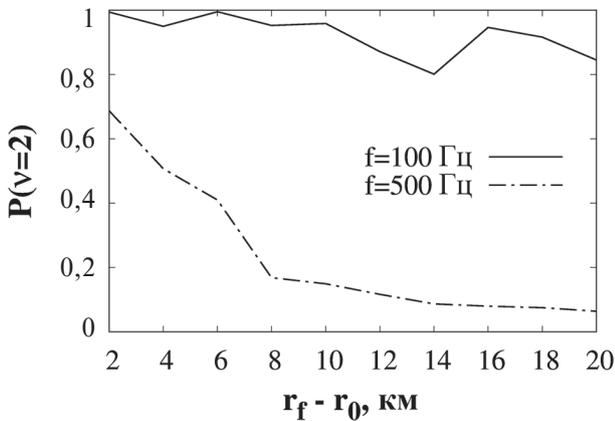


Рис. 7. Зависимость доли собственных функций пропегатора с сильной локализацией в пространстве мод невозмущенного волновода от длины акустической трассы

Fig. 7. Dependence of the fraction of the propagator eigenfunctions with strong localization in the mode space of an unperturbed waveguide on distance

обнаружено, что рассеяние звука на внутренних волнах способно значительно усиливать затухание акустических мод, достигающих поверхности океана и, соответственно, в наибольшей степени перекрывающимися с неоднородностями показателя преломления, порождаемыми внутренними волнами. С другой стороны, выявлено существование линейных комбинаций нормальных мод, являющихся собственными функциями для возмущенного пропегатора, которые практически не испытывают усиления затухания. Данный эффект имеет определенное практическое значение и заслуживает дальнейшего исследования. Например, возникает вопрос о его наблюдаемости в численных расчетах, соответствующих более высоким порядкам теории возмущений. Кроме того, мелководные волноводы часто характеризуются довольно существенными батиметрическим неоднородностями, поэтому целесообразно при построении случайных матриц пропегатора учесть и их.

Статистический анализ собственных функций пропегатора показал качественные отличия механизмов рассеяния при частотах звука 100 и 500 Гц. Показано, что в обоих случаях ключевую роль играют собственные резонансы пропегатора. Однако при низких частотах преобладают резонансы волнового типа, аналогичные квантовомеханическим резонансам, отвечающим за межуровневые переходы. В то же время при более высоких частотах реализуется лучевой тип рассеяния, обусловленный резонансами лучевого эквивалента пропегатора — так называемого одношагового отображения Пуанкаре.

представлена зависимость усредненного по всему статистическому ансамблю числа главных компонент от шага пропегатора. Как мы видим, при частоте звука 100 Гц эта величина близка к единице, что указывает на весьма слабое межмодовое взаимодействие. В то же время при частоте звука 500 Гц существенное межмодовое взаимодействие проявляется уже с первого волноводного сегмента. С ростом длины трассы среднее число главных компонент быстро нарастает, свидетельствуя об усилении обмена энергией между модами, сопровождающегося уширением пространственного спектра акустического поля.

С точки зрения практических приложений важно знать статистический вклад собственных функций, которые мало подвержены рассеянию на случайном поле неоднородности. Для этого можно использовать кумулятивную функцию распределения, определенную как

$$P(\nu) = \int_1^{\nu} p(\nu') d\nu', \quad (52)$$

где $p(\nu)$ — плотность распределения собственных функций по числам главных компонент. Как следует из рис. 7, подавляющее большинство собственных функций при частоте звука 100 Гц являются сильно локализованными в модовом пространстве — их значения числа главных компонент не превышают 2. При частоте звука 500 Гц ситуация качественно иная. Тем не менее, около 6 процентов собственных функций сохраняют высокую степень локализации в модовом пространстве при шаге пропегатора 20 км.

5. Заключение

Рассмотрена задача о рассеянии звука на океанических внутренних волнах с использованием модового представления и теории случайных матриц. Получены выражения для дисперсий матричных элементов, отвечающих за межмодовое взаимодействие в условиях мелкого моря. С помощью численного моделирования

Благодарности

Автор выражает благодарность П.С. Петрову за плодотворное обсуждение различных аспектов рассматриваемой проблемы.

Финансирование

Работа выполнена в рамках госбюджетной тематики ТОИ ДВО РАН «Моделирование разномасштабных динамических процессов в океане» (рег. номер темы 121021700341–2).

Funding

This work was carried out in the framework of the POI FEB RAS Program “Modelling of various-scale dynamical processes in the ocean” (registration number 121021700341–2).

Литература

1. *Tappert F.D., Xin Tang.* Ray chaos and eigenrays // The Journal of the Acoustical Society of America. 1996. Vol. 99, No. 1. P. 185–195. doi:10.1121/1.414502
2. *Вировлянский А.Л., Казарова А.Ю., Любавин Л.Я.* О возможности использования вертикальной антенны для оценки задержек звуковых импульсов на тысячекilометровых трассах // Акустический журнал. 2008. Т. 54, № 4. С. 565–574.
3. *Song H.-C.* An overview of underwater time-reversal communication // IEEE Journal of Oceanic Engineering. 2016. Vol. 41, No. 3. P. 644–655. doi:10.1109/joe.2015.2461712
4. *Вировлянский А.Л., Казарова А.Ю., Любавин Л.Я.* Фокусировка звуковых импульсов методом обращения времени на стокилометровых трассах в глубоком море // Акустический журнал. 2012. Т. 58, № 6. С. 723–732.
5. *Рытов С.М., Кравицов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Т. 2. Случайные поля. М.: Наука, 1978.
6. *Brown M.G., Colosi J.A., Tomsovic S., Virovlyansky A.L., Wolfson M.A.* Ray dynamics in long-range deep ocean sound propagation // The Journal of the Acoustical Society of America. 2003. Vol. 113, No. 5. P. 2533–2547. doi:10.1121/1.1563670
7. *Smirnov I.P., Virovlyansky A.L., Edelman M., Zaslavsky G.M.* Chaos-induced intensification of wave scattering // Physical Review E. 2005. Vol. 72, No. 2. 026206. doi:10.1103/PhysRevE.72.026206
8. *Вировлянский А.Л., Заславский Г.М.* Лучевой и волновой хаос в задачах о дальнем распространении звука в океане // Акустический журнал. 2007. Т. 53, № 3. С. 329–345.
9. *Makarov D., Prants S., Virovlyansky A., Zaslavsky G.* Ray and wave chaos in ocean acoustics: chaos in waveguides. Singapore: World Scientific, 2010. 388 p. doi:10.1142/7288
10. *Tomsovic S., Brown M.* Ocean acoustics: a novel laboratory for wave chaos // “New Directions in Linear Acoustics and Vibration”. Cambridge University Press, 2010. P. 169–187. doi:10.1017/CBO9780511781520.013
11. *Вировлянский А.Л., Макаров Д.В., Пранц С.В.* Лучевой и волновой хаос в подводных акустических волноводах // Успехи физических наук. 2012. Т. 182, № 1. С. 19–48.
12. *Hegewisch K.C., Tomsovic S.* Random matrix theory for underwater sound propagation // Europhysics Letters. 2012. Vol. 97. 34002. doi:10.1209/0295–5075/97/34002
13. *Makarov D.V., Kon'kov L.E., Uleysky M. Yu., Petrov P.S.* Wave chaos in a randomly inhomogeneous waveguide: Spectral analysis of the finite-range evolution operator // Physical Review E. 2013. № 1. 012911. doi:10.1103/PhysRevE.87.012911
14. *Makarov D.V.* Random matrix theory for low-frequency sound propagation in the ocean: A spectral statistics test // Journal of Theoretical and Computational Acoustics. 2018. Vol. 26, No. 1. P. 205–217. doi:10.1142/S2591728518500020
15. *Makarov D.V.* Random matrix theory for an adiabatically-varying oceanic acoustic waveguide // Wave Motion. 2019. Vol. 90. P. 205–217. doi:10.1016/j.wavemoti.2019.05.007
16. *Макаров Д.В., Комиссаров А.А.* Хаос и обращение волнового фронта при дальнем распространении звука в океане // Доклады РАН. Науки о Земле. 2022. Т. 507, № 2. С. 316–322. doi:10.31857/S2686739722601740
17. *Makarov D.V., Uleysky M. Yu., Prants S.V.* Ray chaos and ray clustering in an oceanic waveguide // Chaos. 2004. Vol. 14, No. 1. P. 79–95. doi:10.1063/1.1626392
18. *Макаров Д.В., Улейский М.Ю.* Высвечивание лучей и горизонтально-неоднородного подводного звукового канала // Акустический журнал. 2007. Т. 53, № 4. С. 565–573.
19. *Jensen F.B., Kuperman W.A., Porter M.B., Schmidt H., Tolstoy A.* Computational Ocean Acoustics. New York: Springer New York, 2011.

20. Кузькин В.М., Лаврова О.Ю., Переселков С.А., Петников В.Г., Сабинин К.Д. Анизотропное поле фоновых внутренних волн на морском шельфе и его влияние на распространение низкочастотного звука // Акустический журнал. 2006. Т. 52, № 1. С. 74–86.
21. Thomson D.J., Chapman N.R. A wide-angle split-step algorithm for the parabolic equation // The Journal of the Acoustical Society of America. 1983. Vol. 74, No. 6. P. 1848–1854. doi:10.1121/1.390272
22. Tielburger D., Finette S., Wolf S. Acoustic propagation through an internal wave field in a shallow water waveguide // The Journal of the Acoustical Society of America. 1997. Vol. 101, No. 2. P. 789–808. doi:10.1121/1.418039
23. Макаров Д.В., Коньков Л.Е., Петров П.С. Влияние океанических синоптических вихрей на длительность модовых акустических импульсов // Известия вузов. Радиофизика. 2016. Т. 59, № 7. С. 638–654.
24. Colosi J.A., Brown M.G. Efficient numerical simulation of stochastic internal-wave-induced sound-speed perturbation fields // The Journal of the Acoustical Society of America. 1998. Vol. 103, No. 4. P. 2232–2235. doi:10.1121/1.421381
25. Макаров Д.В., Пранц С.В., Улейский М.Ю. Структура пространственного нелинейного резонанса лучей в неоднородном подводном звуковом канале // Доклады РАН. Науки о Земле. Т. 382, № 3. 2002. С. 394–396.
26. Макаров Д.В., Улейский М.Ю., Пранц С.В. О возможности определения характеристик внутренних волн по данным распределения времен прихода лучей в подводном звуковом канале в условиях хаоса // Письма в Журнал Технической Физики. 2003. Т. 29, № 10. С. 70–76.
27. Kon'kov L.E., Makarov D.V., Sosedko E.V., Uleysky M. Yu. Recovery of ordered periodic orbits with increasing wavelength for sound propagation in a range-dependent waveguide // Physical Review E. 2007. Vol. 76, No. 5. 056212. doi:10.1103/PhysRevE.76.056212
28. Yang T.C., Yoo K. Internal wave spectrum in shallow water: measurement and comparison with the Garrett-Munk model // IEEE Journal of Oceanic Engineering. 1983. Vol. 74, No. 6. P. 1848–1854. doi:10.1109/48.775295
29. Макаров Д.В., Коньков Л.Е. Хаотическая диффузия при распространении звука в неоднородном подводном звуковом канале // Нелинейная динамика. 2007. Т. 3, № 2. С. 157–174. doi:10.20537/nd0702003
30. Макаров Д.В., Коньков Л.Е., Улейский М.Ю. Соответствие между лучевой и волновой картинами и подавление хаоса при дальнем распространении звука в океане // Акустический журнал. 2008. Т. 54, № 3. С. 439–450.
31. Makarov D.V., Kon'kov L.E., Uleysky M. Yu. Wave chaos in underwater acoustics // Journal of Siberian Federal University. 2010. Vol. 3, No. 3. P. 336–348. URL: <https://elib.sfu-kras.ru/handle/2311/1734>
32. Makarov D.V., Uleysky M. Yu., Budyansky M.V., Prants S.V. Clustering in randomly driven Hamiltonian systems // Physical Review E. 2006. Vol. 73, No. 6. 066210. doi:10.1103/PhysRevE.73.066210

References

1. Tappert F.D., Xin Tang. Ray chaos and eigenrays. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1996, 99, 1, 185–195. doi:10.1121/1.414502
2. Virovlyansky A.L., Kazarova A. Yu., Lyubavin L. Ya. The possibility of using a vertical array for estimating the delays of sound pulses at multimegameter ranges. *Acoustical Physics*. 2008, 54, 4, 486–494. doi:10.1134/S1063771008040088
3. Song H.-C. An overview of underwater time-reversal communication. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*. 2016, 41, 3, 644–655. doi:10.1109/joe.2015.2461712
4. Virovlyansky A.L., Kazarova A.Y., Lyubavin L.Y. Focusing of sound pulses using the time reversal technique on 100-km paths in a deep sea. *Acoustical Physics*. 2012, 58, 6, 678–686. doi:10.1134/S1063771012060152
5. Rytov S.M., Kravtsov Yu.A., Tatarsky V.I. Introduction to statistical radiophysics. Part 2. Random fields. *Moscow, Nauka*, 1978. 463 p. (in Russian).
6. Brown M.G., Colosi J.A., Tomsovic S., Virovlyansky A.L., Wolfson M.A. Ray dynamics in long-range deep ocean sound propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2003, 113, 5, 2533–2547. doi:10.1121/1.1563670
7. Smirnov I.P., Virovlyansky A.L., Edelman M., Zaslavsky G.M. Chaos-induced intensification of wave scattering. *Physical Review E*. 2005, 72, 2, 026206. doi:10.1103/PhysRevE.72.026206
8. Virovlyansky A.L., Zaslavsky G.M. Ray and wave chaos in problems of sound propagation in the ocean. *Acoustical Physics*. 2007, 53, 3, 282–297. doi:10.1134/S1063771007030050
9. Makarov D., Prants S., Virovlyansky A., Zaslavsky G. Ray and wave chaos in ocean acoustics: chaos in waveguides. *Singapore: World Scientific*. 2010, 388 p. doi:10.1142/7288
10. Tomsovic S., Brown M. Ocean acoustics: a novel laboratory for wave chaos. *New Directions in Linear Acoustics and Vibration*. Cambridge University Press, 2010, 169–187. doi:10.1017/CBO9780511781520.013
11. Virovlyansky A.L., Makarov D.V., Prants S.V. Ray and wave chaos in underwater acoustic waveguides. *Physics-Uspekhi*. 2012, 55, 1, 18–46. doi:10.3367/UFNe.0182.201201b.0019
12. Hegewisch K.C., Tomsovic S. Random matrix theory for underwater sound propagation. *Europhysics Letters*. 2012, 97, 34002. doi:10.1209/0295–5075/97/34002

13. Makarov D.V., Kon'kov L.E., Uleysky M. Yu., Petrov P.S. Wave chaos in a randomly inhomogeneous waveguide: Spectral analysis of the finite-range evolution operator. *Physical Review E*. 2013, 1, 012911. doi:10.1103/PhysRevE.87.012911
14. Makarov D.V. Random matrix theory for low-frequency sound propagation in the ocean: A spectral statistics test. *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*. 2018, 26, 1, 205–217. doi:10.1142/S2591728518500020
15. Makarov D.V. Random matrix theory for an adiabatically-varying oceanic acoustic waveguide. *Wave Motion*. 2019, 90, 205–217. doi:10.1016/j.wavemoti.2019.05.007
16. Makarov D.V., Komissarov A.A. Chaos and wavefront reversal for long-range sound propagation. *Doklady Earth Sciences*. 2022, 507, 2, 1118–1123. doi:10.1134/S1028334X22600931
17. Makarov D.V., Uleysky M. Yu., Prants S.V. Ray chaos and ray clustering in an oceanic waveguide. *Chaos*. 2004, 14, 1, 79–95. doi:10.1063/1.1626392
18. Makarov D.V., Uleyskiy M. Yu. Ray escape from a range-dependent underwater sound channel. *Acoustical Physics*. 2007, 53, 4, 495–502. doi:10.1134/S1063771007040100
19. Jensen F.B., Kuperman W.A., Porter M.B., Schmidt H., Tolstoy A. *Computational Ocean Acoustics*. New York, Springer New York, 2011.
20. Kuz'kin V.M., Petnikov V.G., Lavrova O. Yu., Pereselkov S.A., Sabinin K.D. Anisotropic field of background internal waves on a sea shelf and its effect on low-frequency sound propagation. *Acoustical Physics*. 2006, 52, 1, 65–76. doi:10.1134/S106377100601009X
21. Thomson D.J., Chapman N.R. A wide-angle split-step algorithm for the parabolic equation. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1983, 74, 6, 1848–1854. doi:10.1121/1.390272
22. Tielburger D., Finette S., Wolf S. Acoustic propagation through an internal wave field in a shallow water waveguide. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1997, 101, 2, 789–808. doi:10.1121/1.418039
23. Makarov D.V., Kon'kov L.E., Petrov P.S. Influence of oceanic synoptic eddies on the duration of modal acoustic pulses. *Radiophysics and Quantum Electronics*. 2016, 59, 7, 576–591. doi:10.1007/s11141-016-9724-4
24. Colosi J.A., Brown M.G. Efficient numerical simulation of stochastic internal-wave-induced sound-speed perturbation fields. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1998, 103, 4, 2232–2235. doi:10.1121/1.421381
25. Makarov D.V., Prants S.V., Uleysky M. Yu. Structure of spatial nonlinear resonance of rays in an inhomogeneous underwater sound channel. *Doklady Earth Sciences*. 2002, 382, 1, 106–108.
26. Makarov D.V., Uleysky M. Yu., Prants S.V. On the possibility of determining internal wave characteristics from the ray arrival time distribution in an underwater sound channel under conditions of ray chaos. *Technical Physics Letters*. 2003, 29, 5, 430–432. doi:10.1134/1.1579816
27. Kon'kov L.E., Makarov D.V., Sosedko E.V., Uleysky M. Yu. Recovery of ordered periodic orbits with increasing wavelength for sound propagation in a range-dependent waveguide. *Physical Review E*. 2007, 76, 5, 056212. doi:10.1103/PhysRevE.76.056212
28. Yang T.C., Yoo K. Internal wave spectrum in shallow water: measurement and comparison with the Garrett-Munk model. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*. 1983, 74, 6, 1848–1854. doi:10.1109/48.775295
29. Makarov D.V., Kon'kov L.E. Chaotic diffusion at sound propagation in a range-dependent underwater sound channel. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2007, 3, 2, 157–174. doi:10.20537/nd0702003 (in Russian)
30. Makarov D.V., Kon'kov L.E., Uleysky M. Yu. The ray-wave correspondence and the suppression of chaos in long-range sound propagation in the ocean. *Acoustical Physics*. 2008, 54, 3, 382–391. doi:10.1134/S1063771008030147
31. Makarov D.V., Kon'kov L.E., Uleysky M. Yu. Wave chaos in underwater acoustics. *Journal of Siberian Federal University*. 2010, 3, 3, 336–348. URL: <https://elibrary.sfu-kras.ru/handle/2311/1734>
32. Makarov D.V., Uleysky M. Yu., Budyansky M.V., Prants S.V. Clustering in randomly driven Hamiltonian systems. *Physical Review E*. 2006, 73, 6, 066210. doi:10.1103/PhysRevE.73.066210

Об авторах

МАКАРОВ Денис Владимирович, РИНЦ Author ID: 41768, ORCID ID: 0000-0002-2568-8927,
Scopus Author ID: 57196559649, WoS Researcher ID: D-6389–2015, makarov@poi.dvo.ru

СОСЕДКО Екатерина Владимировна, РИНЦ Author ID: 38924, ORCID ID: 0000-0001-7810-9047,
Scopus Author ID: 6507031107, WoS Researcher ID: AAF-7922–2021, soosedko@poi.dvo.ru