

УДК 627.22+627.52

© А. Г. Гогин*, И. Г. Кантаржи, 2023

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, 129337, Москва, Ярославское шоссе, д. 26.

*alex.gogin@bk.ru

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ МОРСКИХ ВОЛН НА АКВАТОРИИ ПОРТА

Статья поступила в редакцию 06.03.2023, после доработки 04.06.2023, принята в печать 24.07.2023

Аннотация

Получены аналитические выражения метода параболического приближения для расчета дифракции морских волн за сходящимися оградительными сооружениями, расположенными под углом к подходящим волнам. Для этого использован способ линейной суперпозиции результатов, полученных отдельно для каждого из молов. На основе сравнения результатов, получаемых этим методом, с результатами физических (в волновом бассейне) и численных (с помощью DHI MIKE 21 BW) экспериментов при разных постановках задачи (всего 40) сделан вывод о допустимости применения полученных выражений. Результаты исследования позволяют рекомендовать полученные выражения для прикладного использования при прогнозировании параметров волнового режима на акватории морских портов, где сильны дифракционные явления. Комплексность используемой в методе параболического уравнения функции становится причиной появления «лепестков» изолиний коэффициента дифракции на защищаемой акватории. Представлены аппроксимативные выражения для сглаживания осциллирующей функции комплексной амплитуды по линиям, параллельным и перпендикулярным оси оградительных сооружений. В результате получено, что комплексность используемой функции является причиной получения ошибки при определении коэффициента дифракции, оцениваемой в среднем в пределах от 2 до 5 %. Максимальная амплитуда осциллирующей функции дифракции составила 12,5 % от значения, полученного с помощью аппроксимативного выражения.

Ключевые слова: морской порт, волновой режим, морские волны, ветровые волны, дифракция, параболическое уравнение, параболическое приближение, диффузия волновой амплитуды

© A. G. Gogin*, I. G. Kantarzhi, 2023

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavl'skoe shosse, Moscow, 129337, Russia

*alex.gogin@bk.ru

DEVELOPMENT OF THE PARABOLIC EQUATION FOR CALCULATION OF SEA WAVES DIFFRACTION IN PORT AREA

Received 06.03.2023, Revised 04.06.2023, Accepted 24.07.2023

Abstract

Application method of parabolic equations is presented in this paper for calculating diffraction of sea waves behind converging breakwaters, which entrance is not parallel to front of approaching waves. For this, the method of linear superposition of results obtained separately for each breakwater was used. Based on a comparison of results obtained by this method with results of physical (obtained in a wave basin) and numerical (obtained using DHI MIKE 21 BW) model experiments with different settings (40 models in total), a conclusion about using allowability of the obtained equations was made. Results of the study make it possible to recommend the obtained equations for practical use in studies of seaports wave regimes, where diffraction phenomena are strong. Complexity of a function used in the parabolic method causes appearance of “petals” of diffraction coefficient isolines in protected water area. Approximate equations are presented for smoothing the oscillations of the complex amplitude function along lines parallel and perpendicular to axis of breakwaters. It is shown that associated error in obtaining diffraction coefficient varies on average within 2–5 %, and maximum error obtained was 12.5 %.

Keywords: seaport, wave regime, sea waves, wind waves, diffraction, parabolic equation, wave amplitude diffusion

Ссылка для цитирования: Гогин А.Г., Кантаржи И.Г. Развитие метода параболического приближения в задачах дифракции морских волн на акватории порта // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2023. Т. 16, № 3. С. 106–119. doi:10.59887/2073-6673.2023.16(3)-8

For citation: Gogin A. G., Kantarzhi I. G. Development of the Parabolic Equation for Calculation of Sea Waves Diffraction in Port Area. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2023, 16, 3, 106–119. doi:10.59887/2073-6673.2023.16(3)-8

1. Введение

Прогнозирование параметров ветрового волнения на акватории проектируемого порта является первоочередной задачей для обоснованного принятия решений о компоновке защитных (оградительных) сооружений морского порта. Оградительные сооружения — самые дорогостоящие сооружения морского порта, что делает их расчет одним из самых важных аспектов технико-экономического обоснования проекта. Связанные с этим расчеты остаточного волнового режима на защищаемой акватории часто становятся определяющими для принятия решений о целесообразности реализации всего проекта [1]. Определяющей для волнового режима является дифракция волн за входным створом, образуемым в разрыве между оградительными сооружениями.

Задача дифракции морских волн на практике сегодня решается одним из известных способов: физическим моделированием в волновом бассейне [2, 3], численным моделированием с помощью гидродинамических моделей [4, 5] или инженерным нормативным расчетом. Каждый из способов имеет свои преимущества и недостатки, но разброс результатов часто весьма велик [6]. В последние годы также отмечается отсутствие теоретико-аналитических подходов к задаче дифракции при реализации проектов морских портов. Тем не менее, развитие таких методов остается востребованным в связи с необходимостью верификации используемых численных моделей, а также при определении погрешностей вышеперечисленных методов в качестве независимого эталона.

Одним из независимых теоретико-аналитических методов расчета дифракции волн является метод поперечной диффузии волновой амплитуды. Термин «метод поперечной диффузии» был введен Малюжиным [7] на основе сходства явления дифракции с обычной диффузией и теплопроводностью и является обобщением параболического уравнения Леонтовича-Фока [8–10] (изначально выведенного для электромагнитных волн) для волн различной физической природы в неоднородных средах. Кроме того, уравнение для комплексной амплитуды волнового пакета схоже с уравнением Шредингера в квантовой механике.

Впоследствии метод параболического приближения получил развитие для расчета дифракции морских волн в работах Ю.М. Крылова с соавторами [11], которые оперируют понятием «метод поперечной диффузии волновой амплитуды», и Н.Н. Загрядской [12, 13], в которых используется термин «метод параболического приближения», и позволил получить некоторые надежные результаты в ряде классических модельных задач. За рубежом основное внимание в части задачи дифракции морских волн было уделено методу Зоммерфельда [14], который в конце XIX века вывел основные выражения для расчета на основе явления дифракции электромагнитных волн. В дальнейшем метод Зоммерфельда получил свое развитие в методе Пенни и Прайса [15], разработанном для исследований дифракции морских волн и верифицированном большим количеством лабораторных экспериментов. Однако на сегодняшний день отмечается отсутствие научного и практического интереса к методу параболического приближения. Возможными причинами этого являются, в том числе, неясные граничные условия и неочевидные криволинейные координаты расчетной области, а также интенсивное внедрение численного моделирования. Исключением являются лишь редкие работы [16, 17].

Тем не менее, использование метода параболического приближения позволяет получить решение задачи дифракции, которое может применяться для более глубокого изучения процессов трансформации волн на исследуемой акватории. В настоящей работе предлагается использовать способ суперпозиции решений метода параболического приближения для расчета дифракции волн за сходящимися оградительными сооружениями, которые расположены на одной линии под произвольным углом к фронту набегающих волн. Предлагаемый способ не является точным решением даже в рамках параболического уравнения, поэтому для подтверждения возможности его использования проведен ряд модельных экспериментов с помощью физического и численного моделирования.

Комплексный вид параболического уравнения является причиной получения «расчетных» осцилляций амплитуды волны, которые далеки от физики явления и не подтверждаются в натуре. Представлены выражения для сглаживания осцилляций, с помощью которых возможно определить среднее значение коэффициента дифракции. На основе сравнения абсолютных и средних значений коэффициента дифракции оценена погрешность результатов, которые могут быть получены с помощью метода параболического уравнения.

2. Методы

2.1. Развитие метода параболического приближения

Согласно [11], классическое уравнение метода параболического приближения для расчета комплексной волновой амплитуды за оградительным сооружением на плоском дне в зоне света имеет вид:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \quad (1)$$

а в зоне тени — вид:

$$\frac{\partial A}{\partial r} = \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 A}{\partial l^2} - \frac{A}{2r}, \quad (2)$$

где $A(x, y)$ (или $A(r, \theta)$ в полярных координатах) — безразмерная комплексная амплитуда волны; $l = r\theta$ — длина дуги; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; λ — длина подходящих волн. Здесь и далее координаты отнесены к длине исходных волн. Переход к термину коэффициента дифракции, k_d , представляющим собой отношение высот подходящих и дифрагированных волн и характеризующим остаточную высоту волн на акватории, осуществляется с помощью выражения:

$$k_d = |A(x, y)|. \quad (3)$$

Практическое использование уравнений метода параболического приближения в явном виде возможно как для одиночного мола, так и для сходящихся моллов, но при условии параллельности фронта волн и входного створа. Согласно [11], при подходе к одиночному молу фронта волн с единичной амплитудой (рис. 1, слева) волновую амплитуду за сооружением можно найти с помощью следующего выражения:

$$A(x, y, \theta_0) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{i}} y \sqrt{\frac{\pi}{x}} \right) + \exp[-i4\pi\theta_0(y + \theta_0 x)] \times \left[1 - \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{i}} (y + 2\theta_0 x) \sqrt{\frac{\pi}{x}} \right) \right] \right\}, \quad (4)$$

где $\Phi \left(\frac{1}{\sqrt{i}} z \right) = \frac{2}{\sqrt{i}} [C(z) + iS(z)]$, а $C(z)$ и $S(z)$ — табулированные интегралы Френеля. Функцию $\Phi \left(\frac{1}{\sqrt{i}} z \right)$ также можно выразить следующим образом:

$$\Phi \left(\frac{1}{\sqrt{i}} z \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^z e^{it^2} dt. \quad (5)$$

Введем $z_1 = y \sqrt{\frac{\pi}{x}}$; $z_2 = (y + 2\theta_0 x) \sqrt{\frac{\pi}{x}}$. Тогда функцию $A(x, y, \theta_0)$ можно записать следующим образом:

$$A(x, y, \theta_0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{z_1} e^{it^2} dt \pm \frac{1}{2} \exp[-i4\pi\theta_0(y + \theta_0 x)] \times \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{z_2} e^{it^2} dt \right). \quad (6)$$

Применение выражений (6) и (3) позволяет получить распределение коэффициента дифракции на акватории за одиночным моллом.

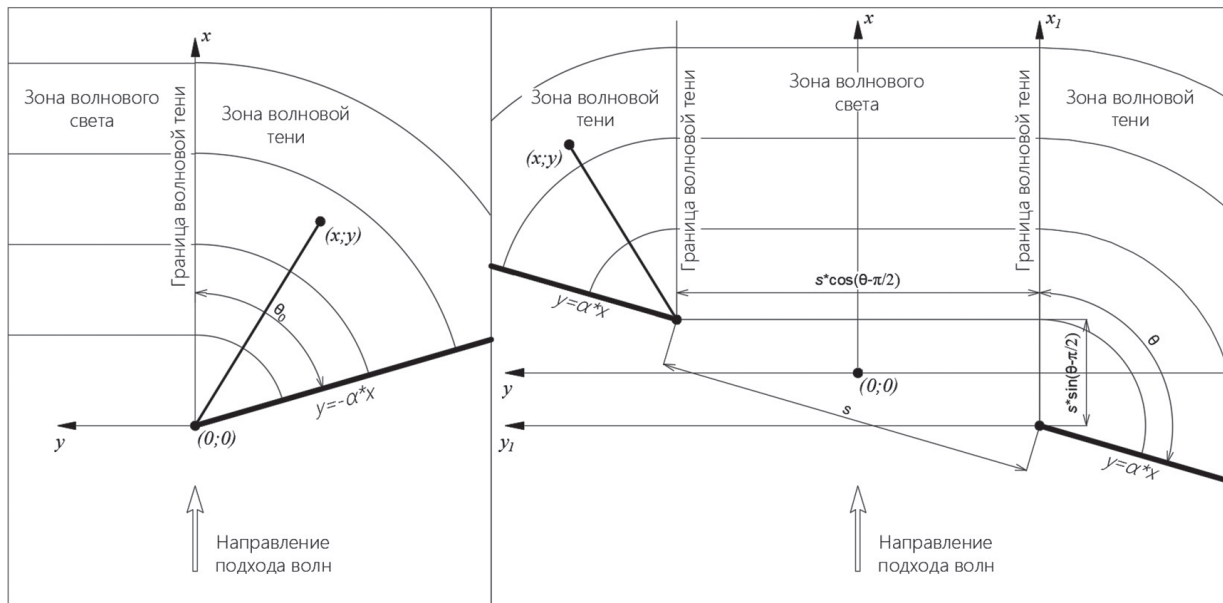


Рис. 1. Схемы к расчету дифракции волн

Fig. 1. Scheme for wave diffraction calculation

Решение задачи дифракции волн за сходящимися молами, створ между которыми расположен на линии, параллельной фронту волн, также получено в [11] в явном виде. Не повторяя сказанного там, приведем выражение для функции $A(x, y, s, \theta_1, \theta_2)$ с упомянутыми выше допущениями и вспомогательными функциями, в которых символ степени обозначает левый, «I», и правый, «II», мол:

$$A(x, y, s, \theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{z_1^I} e^{it^2} dt + \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{z_1^{II}} e^{it^2} dt \pm \frac{1}{2} \exp \left(-i4\pi\theta_1 \left(\frac{s}{2} + y + \theta_1 x \right) \right) \times \\ \times \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{z_2^I} e^{it^2} dt \right] \pm \frac{1}{2} \exp \left(-i4\pi\theta_2 \left(\frac{s}{2} - y + \theta_2 x \right) \right) \times \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{z_2^{II}} e^{it^2} dt \right], \quad (7)$$

где θ_1 и θ_2 — угол между границей волновой тени и осью левого и правого оградительного сооружения соответственно.

Далее, аналогичными преобразованиями получим выражение для расчета дифракции за сходящимися оградительными сооружениями, когда створ между ними не параллелен фронту подходящих волн (рис. 1, справа).

Для начала преобразуем выражение (6) в новых координатах для первого по ходу движения волны мола:

$$A(x_1, y_1, \theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{z_1} e^{it^2} dt \pm \frac{1}{2} \exp \left[-i4\pi\theta_1 (y_1 + \theta x_1) \right] \times \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{z_2} e^{it^2} dt \right), \quad (8)$$

где вспомогательные функции выражаются как: $z_1 = y_1 \sqrt{\frac{\pi}{x_1}}$; $z_2 = (y_1 + 2\theta x_1)$, а получаемые коэффициенты

дифракции будут решением на промежутке $0 < x_1 \leq s \cdot \sin(\theta - \pi/2)$.

Начальным условием для второго по ходу движения волны мола будет отличное от единичного распределение амплитуды. Но в таком случае получить уравнение в явном виде не удастся. Расположение оградительных сооружений на одной линии позволяет пренебречь взаимовлиянием молот друг на друга и рассмотреть задачу дифракции на втором моле как на одиночном, к которому подходит волна единичной амплитуды с шириной фронта: $s_2 = s \cdot \cos(\theta - \pi/2)$. Решением задачи дифракции за сооружениями в таком случае станет линейная суперпозиция решений для первого и второго мола. Выразив координаты для второго по ходу движения волны мола:

$$x_1 = x + \frac{s \cdot \sin(\theta - \pi/2)}{2}; \quad y_1 = y + \frac{s \cdot \cos(\theta - \pi/2)}{2}, \quad (9)$$

получим за сооружениями:

$$A(x, y, s, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{z_1^I} e^{it^2} dt + \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{z_1^{II}} e^{it^2} dt \pm \frac{1}{2} \exp \left(-i4\pi\theta_1 \left(\frac{s \cdot \cos(\theta - \pi/2)}{2} + y + \theta \left(x + \frac{s \cdot \sin(\theta - \pi/2)}{2} \right) \right) \right) \times \\ \times \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{z_2^I} e^{it^2} dt \right] \pm \frac{1}{2} \exp \left(-i4\pi\theta_2 \left(\frac{s \cdot \cos(\theta - \pi/2)}{2} - y + \theta \left(x - \frac{s \cdot \sin(\theta - \pi/2)}{2} \right) \right) \right) \times \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{z_2^{II}} e^{it^2} dt \right], \quad (10)$$

где вспомогательные функции z выражаются как:

$$z_1^I = \left(\frac{s \cdot \cos(\theta - \pi/2)}{2} - y \right) \sqrt{\frac{\pi}{x + \frac{s \cdot \sin(\theta - \pi/2)}{2}}}, \quad (11)$$

$$z_1^{II} = \left(\frac{s \cdot \cos(\theta - \pi/2)}{2} + y \right) \sqrt{\frac{\pi}{x - \frac{s \cdot \sin(\theta - \pi/2)}{2}}}, \quad (12)$$

$$z_2^I = \frac{s \cdot \cos(\theta - \pi/2)}{2} + y + 2\theta \left(x + \frac{s \cdot \sin(\theta - \pi/2)}{2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{x + \frac{s \cdot \sin(\theta - \pi/2)}{2}}}, \quad (13)$$

$$z_2^{II} = \frac{s \cdot \cos(\theta - \pi/2)}{2} - y + 2\theta \left(x - \frac{s \cdot \sin(\theta - \pi/2)}{2} \right) \sqrt{\frac{\pi}{x - \frac{s \cdot \sin(\theta - \pi/2)}{2}}}. \quad (14)$$

Таким образом, с помощью выражений (10)–(14) может быть получено решение задачи дифракции за двумя сходящимися сооружениями, расположенными на одной линии под углом к фронту набегающих волн. Переходя к системе координат для первого по ходу движения волны мола, (x_1, x_2) , на интервале $0 < x_1 \leq s \cdot \sin(\theta - \pi/2)$ решение находится с помощью выражения (8), а на интервале $x_1 > s \cdot \sin(\theta - \pi/2)$ — с помощью выражения (10). Подобное использование способа линейной суперпозиции решений для сходящихся молв в отдельности не является точным решением даже в рамках параболического уравнения, но на практике позволяет получить достаточно надежные результаты, что подтверждается ниже сравнением получаемых результатов с результатами физического и численного моделирования.

2.2. Влияние комплексности параболического уравнения на точность решения

Основные уравнения метода параболического приближения, (1) и (2), содержат мнимый коэффициент, что делает их комплексными. Как показано в фундаментальной работе Малюжинца [7], это приводит к тому, что диффузия амплитуды волн в зону волновой тени происходит со сдвигом фаз, из-за чего в этих областях наблюдаются осцилляции функции $|A|$. При использовании метода параболического приближения на практике это приводит к физически неясным осцилляциям коэффициента дифракции на акватории и последующему образованию «лепестков» изолиний коэффициента дифракции (рис. 2, слева). Кроме этого, уравнение Зоммерфельда, которое легло в основу метода Пенни и Прайса, также является комплексным, что становится причиной получения лепестков в зонах волновой тени (рис. 2, справа).

Для того чтобы определить причину появления осцилляций, разложим уравнение (7) на составляющие функции $h(z)$:

$$h_1(x, y, s) = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{1}{\sqrt{i}} \left(\frac{s}{2} + y \right) \sqrt{\frac{\pi}{x}} \right) + \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{i}} \left(\frac{s}{2} - y \right) \sqrt{\frac{\pi}{x}} \right) \right], \quad (15)$$

$$h_2^I(x, y, s, \theta_1) = \frac{1}{2} \exp \left(-i4\pi\theta_1 \left(\frac{s}{2} + y + \theta_1 x \right) \right) \times \left[1 - \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{i}} \left(\frac{s}{2} + y + 2\theta_1 x \right) \sqrt{\frac{\pi}{x}} \right) \right], \quad (16)$$

$$h_2^{II}(x, y, s, \theta_2) = \frac{1}{2} \exp \left(-i4\pi\theta_2 \left(\frac{s}{2} - y + \theta_2 x \right) \right) \times \left[1 - \Phi \left(\frac{1}{\sqrt{i}} \left(\frac{s}{2} - y + 2\theta_2 x \right) \sqrt{\frac{\pi}{x}} \right) \right]. \quad (17)$$

Здесь h_1 — выражение для дифракционного эффекта «излучающей полосы» в зоне света; h_2^I — дифракционный эффект левого мола; h_2^{II} — дифракционный эффект правого мола. Анализ полученных функций показал, что наибольший вклад в распределение комплексной амплитуды за сооружениями вносит первое слагаемое, выраженное функцией $h_1(x, y, s)$. В этой же функции и проявляются исследуемые осцилляции. Преобразуя выражение (15) аналогично выражению (7), получим:

$$h_1(x, y, s) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{z^I} e^{it^2} dt + \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_0^{z^{II}} e^{it^2} dt. \quad (18)$$

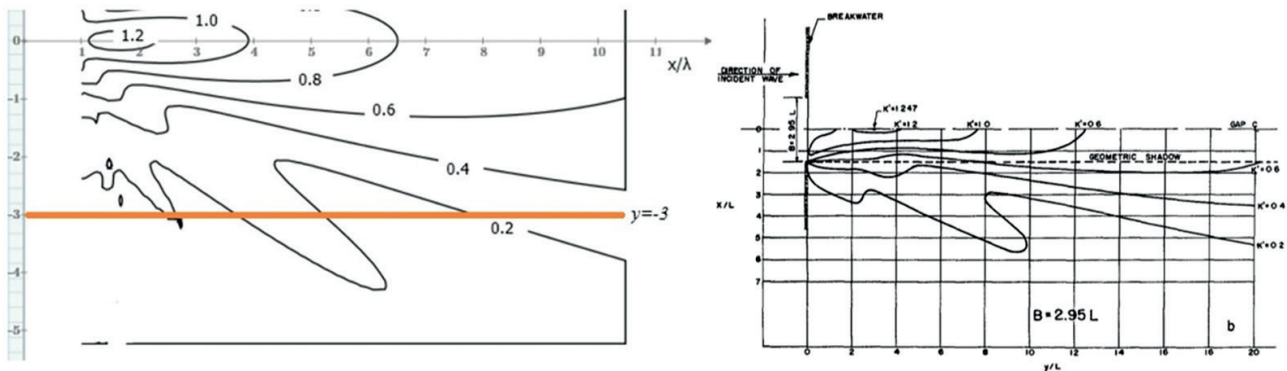


Рис. 2. Примеры появления «лепестков» при решении задачи дифракции методом параболического приближения (слева) и методом Зоммерфельда в [18] (справа)

Fig. 2. Examples of obtaining of “petals” by diffraction calculation using the parabolic equation method (left) and the Sommerfeld method in [18] (right)

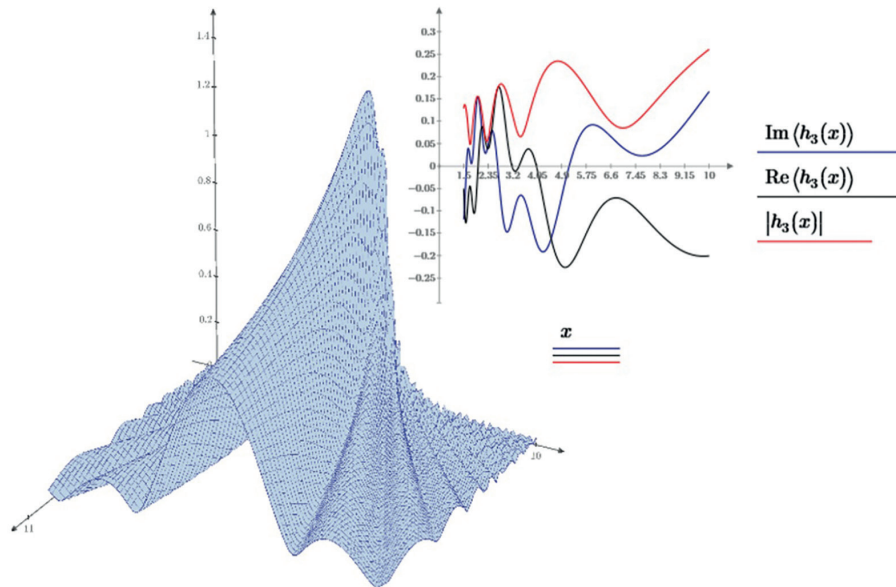


Рис. 3. Трехмерный вид графика комплексной функции $h_1(x, y)$ и ее график при $y = -3$

Fig. 3. 3D view of the complex function $h_1(x, y)$ and her graph by $y = -3$

Поведение функции (18) при $s = 2$ представлено на рис. 3, на котором наглядно проявляются осцилляции комплексной функции. На этом же рисунке представлено поведение функции по линии $y = -3$, показанной выше на рис. 2 оранжевой линией. Поскольку рассматривается комплексная функция, графики функций $h_1(x)$ разделяются на мнимую ($\text{Im}(h_1(x))$) и вещественную ($\text{Re}(h_1(x))$) части. Значение коэффициента дифракции определяется как $k_{dif} = |h_1(x)|$.

На графике заметны существенные осцилляции, а при дискретизации диапазонов проведения изолиний коэффициента дифракции в волновой тени увеличится и количество «лепестков». Таким образом, показано, что появление лепестков обусловлено комплексной формой используемой функции для «излучающей полосы». Дальнейшее разбиение функции $h_1(x, y, s)$ на составляющие покажет, что наибольший вклад в осцилляции вносит эффект «излучающей полосы» от ближнего к расчетной линии мола.

Таким образом, анализ выражений метода параболического приближения показал, что образование лепестков при построении изолиний коэффициента дифракции обусловлено исключительно математическим аппаратом метода, не учитывающим сдвиг фаз при диффузии амплитуды в зоне волновой тени. В работе [12] при анализе причин проявления лепестков авторы приходят к выводу о том, что возникновение осцилляций обусловлено интерференцией дифрагированных волн. Однако, этим не объясняется увеличение частоты осцилляций при приближении к молу, то есть при стремлении x к нулю.

Предварительный анализ графиков функции $h_1(x, y)$ по сечениям x и y показал, что получаемые методом параболического приближения результаты могут быть с достаточной точностью аппроксимированы с помощью функции гиперболического секанса и сложной составной функции соответственно. Например, рассмотрим поведение функции $h_1(x, y)$ по линиям, параллельным оси y (параллельно оградительным сооружениям). Аппроксимирующая функция в этом случае запишется следующим образом:

$$f(y) = A \cdot (\text{sech}(B \cdot y))^C, \quad (19)$$

где A , B и C — параметры аппроксимации. Подбор параметров аппроксимации может осуществляться, например, с помощью нелинейной регрессии по методу наименьших квадратов, реализуемого в современных программных комплексах.

Для демонстрации применения полученного выражения были построены графики функции $h_1(y)$ при $x = 1$; $x = 5$ и $x = 10$ с построением аппроксимирующих их функций (рис. 4).

Аналогично было получено выражение для аппроксимации поведения функции $h_1(x)$ по линиям, перпендикулярным оси оградительных сооружений, которое предлагается записывать в следующем виде:

$$f(x) = D \cdot \ln(x + E) + \frac{F}{G \cdot x^H} + \frac{K}{L \cdot x^M}, \quad (20)$$

где D , E , F , G , H , K , L , M — параметры аппроксимации. Примеры его использования показаны для функции $h_1(x)$ при $y = 0$; 1; 5; 10 на рис. 5.

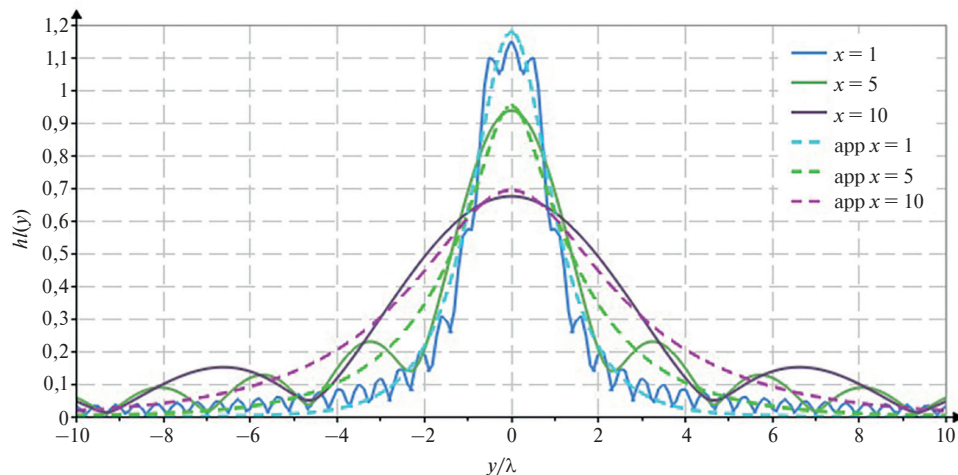


Рис. 4. Графики функции $h_1(y)$ при различных значениях x и $s = 2$ и их аппроксимирующие функции

Fig. 4. Graphs of the function $h_1(y)$ for various values of x and $s = 2$ and their approximating functions

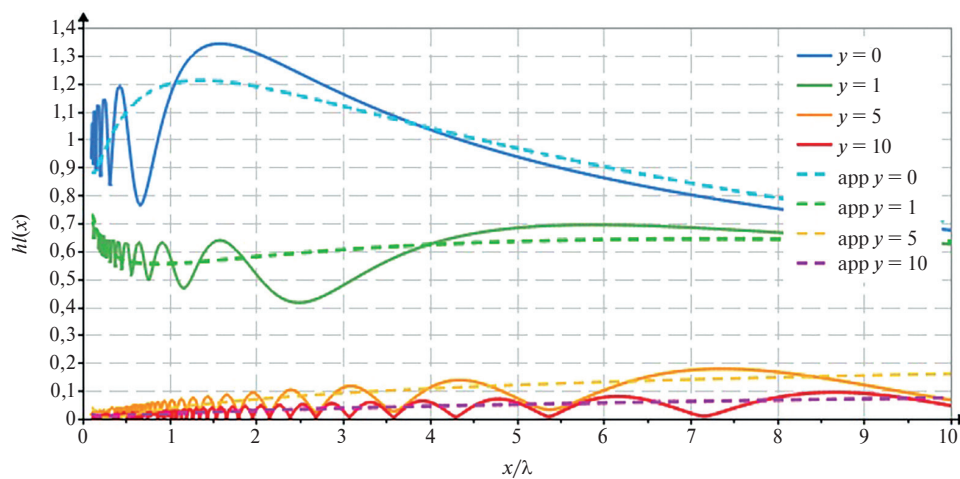


Рис. 5. Графики функции $h_1(x)$ при различных значениях y и $s = 2$ и их аппроксимирующие функции

Fig. 5. Graphs of the function $h_1(x)$ for various values of y and $s = 2$ and their approximating functions

В табл. 1 представлены полученные параметры аппроксимации рассмотренных выше функций, а также статистические показатели точности аппроксимации.

Таблица 1

Table 1

Параметры и точность аппроксимации комплексной функции $h_1(x, y)$ при некоторых значениях x и y и при $s = 2$
Parameters and accuracy of approximation of the complex function $h_1(x, y)$ при for some values of x and y and for $s = 2$

Функция $h_1(x, y)$ при:	A			B			C			Коэффициент корреляции
$x = 1$	1,179			1,569			0,697			0,993
$x = 5$	0,953			2,433			0,245			0,981
$x = 10$	0,693			0,702			0,574			0,975
	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>		
$y = 0$	-2,17	2,11	4,11	1,14	-0,23	0,28	5,86	1		0,982
$y = 1$	-5,05	34,48	4,62	0,26	0,02	0,77	0,92	-0,5		0,944
$y = 5$	-0,16	141,34	1,11	1,35	-0,07	0,06	4,29	1		0,875
$y = 10$	-0,01	248,08	0,87	26,95	-0,45	0,01	1,57	1		0,940

В результате проведенного анализа было получено, что в среднем разброс результатов, которые могут быть получены с помощью метода параболического приближения, находится в пределах от 2 до 5 %. Максимальная амплитуда осцилляций коэффициента дифракции составила 12,5 % от значения, полученного с помощью аппроксимативного выражения.

3. Результаты

Для проверки надежности получаемых с помощью метода параболического приближения результатов был спроектирован и проведен модельный эксперимент, в котором дифракция волн играет решающее значение. В рамках эксперимента рассматривалась условная портовая акватория, ограниченная двумя сходящимися оградительными сооружениями. Глубина воды постоянна по всей акватории и принята равной 10 м. В рамках экспериментов было рассмотрено две ширины входного створа: 130 и 195 м. Кроме этого, варьировался также период (и связанная с ним длина) подходящих волн: 4,3; 5,7; 7,1; 8,5 и 9,9 с; а также угол подхода волн: 90° (нормальный подход волн к сооружениям); $67,5^\circ$; 45° и $22,5^\circ$. Амплитуда волн в данном случае имеет вторичное значение ввиду оперирования относительным коэффициентом дифракции.

Серия модельных экспериментов была проведена с помощью физического моделирования в волновом бассейне, расположенном в НИЦ «Морские берега», и смоделирована численно с помощью программного комплекса DHI MIKE 21 BW, который реализует фазоразрешающую волновую модель. Подробную информацию о численной модели можно найти в [19].

Масштаб физической модели в волновом бассейне составил 1:50. На рис. 6 представлена схема физической модели в бассейне, а также фотографии моделей.

Результаты физического моделирования определялись в контрольных точках, показанных на схеме эксперимента (рис. 6), путем отнесения получаемых высот волн в точках за сооружениями к высоте волн в точке, расположенной перед сооружениями.

Для численного моделирования серии модельных экспериментов была использована численная фазоразрешающая волновая модель, основанная на уравнениях Буссинеска. Моделирование выполнялось в натурном масштабе. Некоторые результаты численного моделирования представлены на рис. 7.

Постановки модельного эксперимента были также рассчитаны с помощью метода параболического приближения, в том числе, с использованием полученных в настоящей работе выражений для косого подхода волн к сооружениям. В качестве примера на рис. 8 показаны полученные изополя относительной амплитуды для створа шириной 195 м и подходящих под углом 90° и 45° волн с периодом 9,9 с.

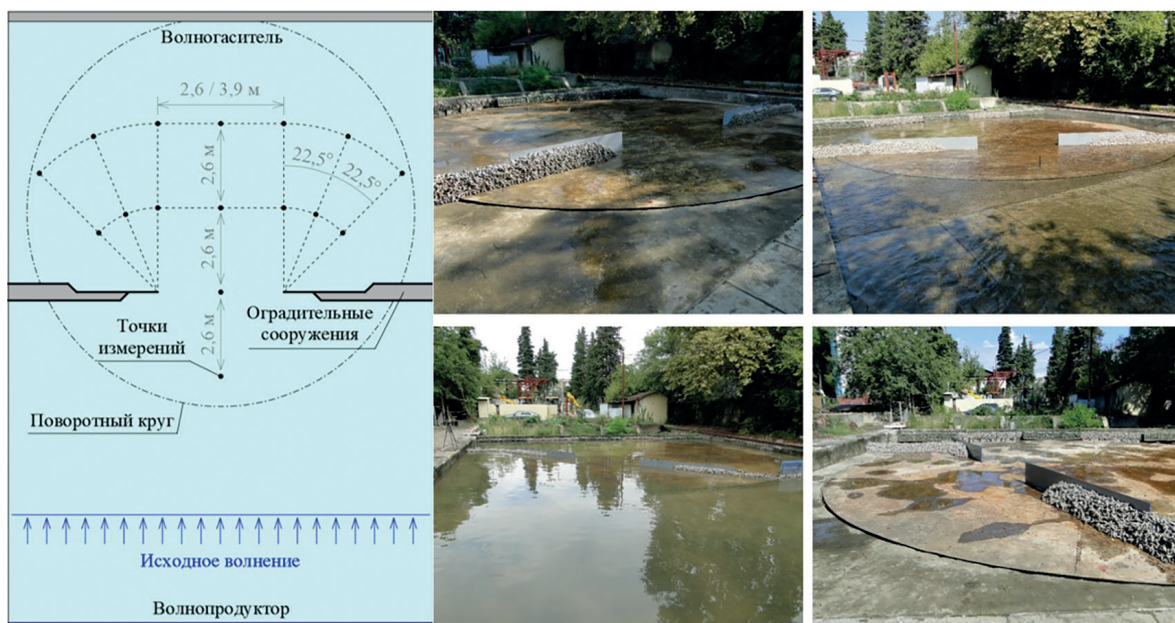


Рис. 6. Схема физической модели в бассейне и фотографии моделей

Fig. 6. Scheme of physical model in basin and model photos

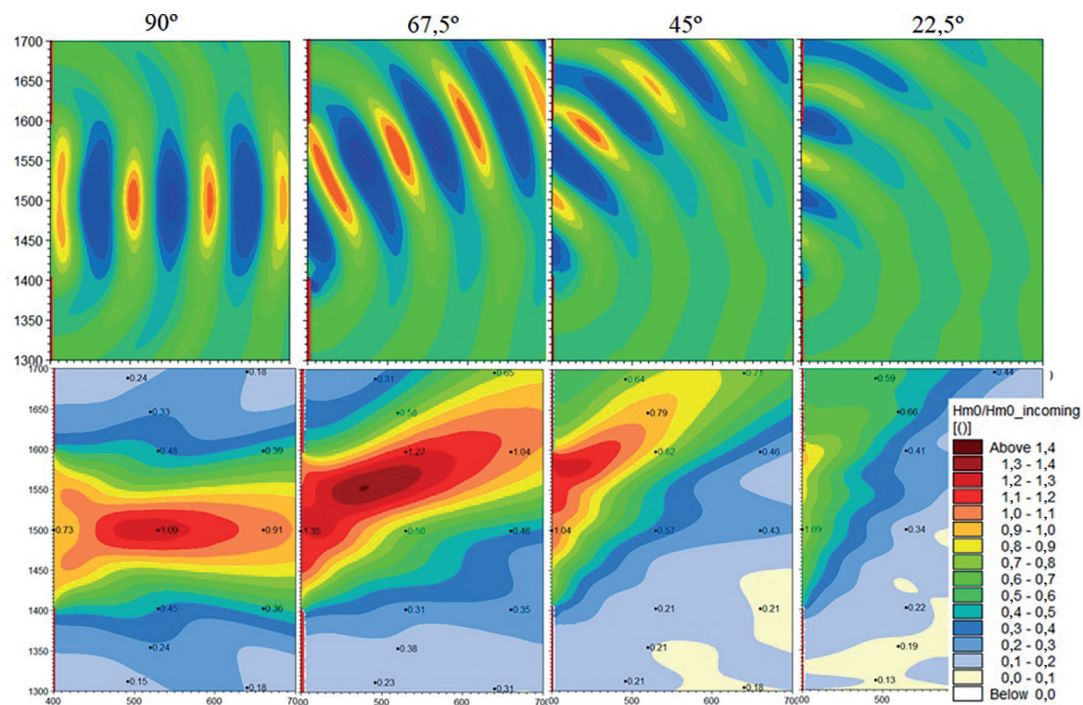


Рис. 7. Результаты численного моделирования для ширины створа 195 м при различных углах подхода волн с периодом 9,9 с. Сверху: изополя мгновенных отметок взволнованной поверхности. Снизу: изополя коэффициентов дифракции

Fig. 7. Results of numerical simulation for entrance width of 195 m at different angles of wave approach with period of 9.9 s. Top: isofields of instantaneous marks of elevation surface. Bottom: isofields of diffraction coefficients

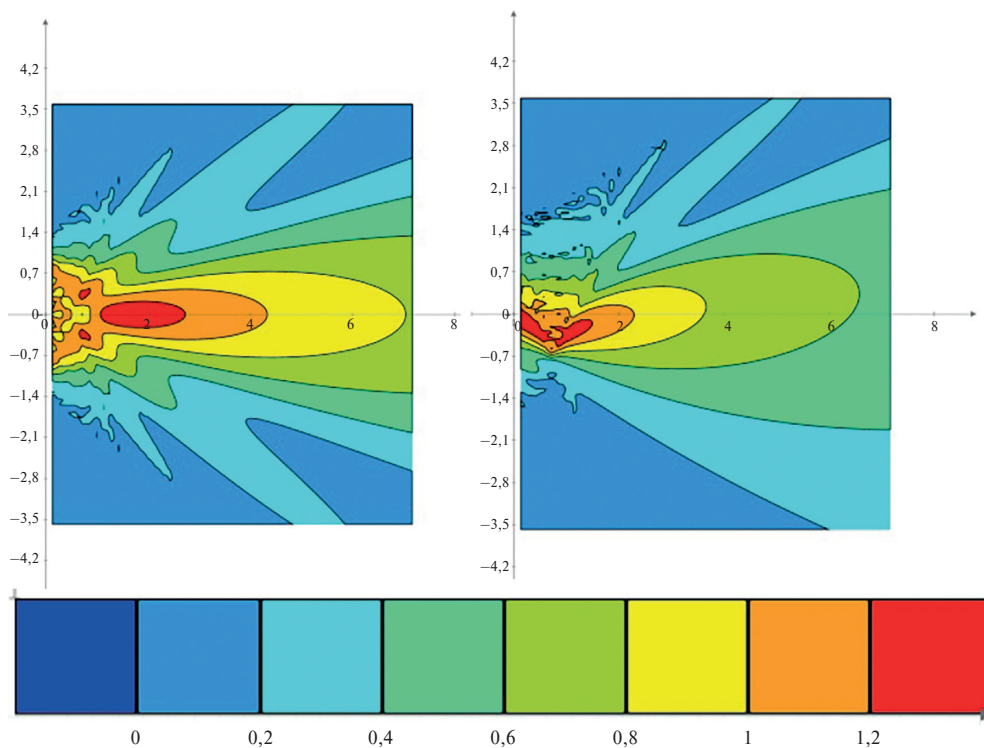


Рис. 8. Результаты аналитического расчета коэффициентов дифракции при ширине створа 195 м и подходящих под углом 90° (слева) и 45° (справа) волн с периодом 9,9 с

Fig. 8. Results of analytical calculation of diffraction coefficients for entrance width of 195 m and waves approaching at an angle of 90° (left) and 45° (right) with a period of 9.9 s

Сравнение результатов, полученных разными методами, было выполнено по двум линиям, проведенным через контрольные точки получения результатов в физическом моделировании (показаны пунктиром на рис. 6). Ближнюю к оградительным сооружениям линию обозначим «первой», дальнюю — «второй». Наглядные графики сравнения некоторых результатов представлены на рис. 9. На графиках синим цветом обозначены результаты по первой линии, зеленым — по второй. Сплошные линии соответствуют результатам, полученным с помощью метода параболического приближения; пунктирные — численному моделированию; точки — физическим экспериментам.

Подобные графики были построены для всех постановок модельных экспериментов, всего 40. Анализ приведенных графиков, а также аналогичных, полученных для других условий, позволяет отметить качественное совпадение полученных разными методами коэффициентов дифракции. При этом результаты, полученные с помощью метода параболического приближения, очень хорошо совпадают с результатами численного моделирования. Средняя разница между ними составила 6 % в зоне волнового света. Это позволяет говорить о том, что полученные выше выражения метода параболического приближения пригодны для решения задачи дифракции.

Сравнение с результатами физического моделирования показывает несколько большие различия. В первую очередь, это относится к зоне волнового света, где в волновом бассейне были получены более низкие коэффициенты дифракции по сравнению с полученными аналитическими вычислениями и численным моделированием. Средняя разница между результатами здесь составила около 18 %. Во вторую очередь, напротив, в зонах волновой тени «экспериментальные» коэффициенты дифракции больше «вычисленных», а средняя ошибка — около 10 %. При этом на границе волновой тени коэффициенты дифракции совпадают с хорошей точностью.

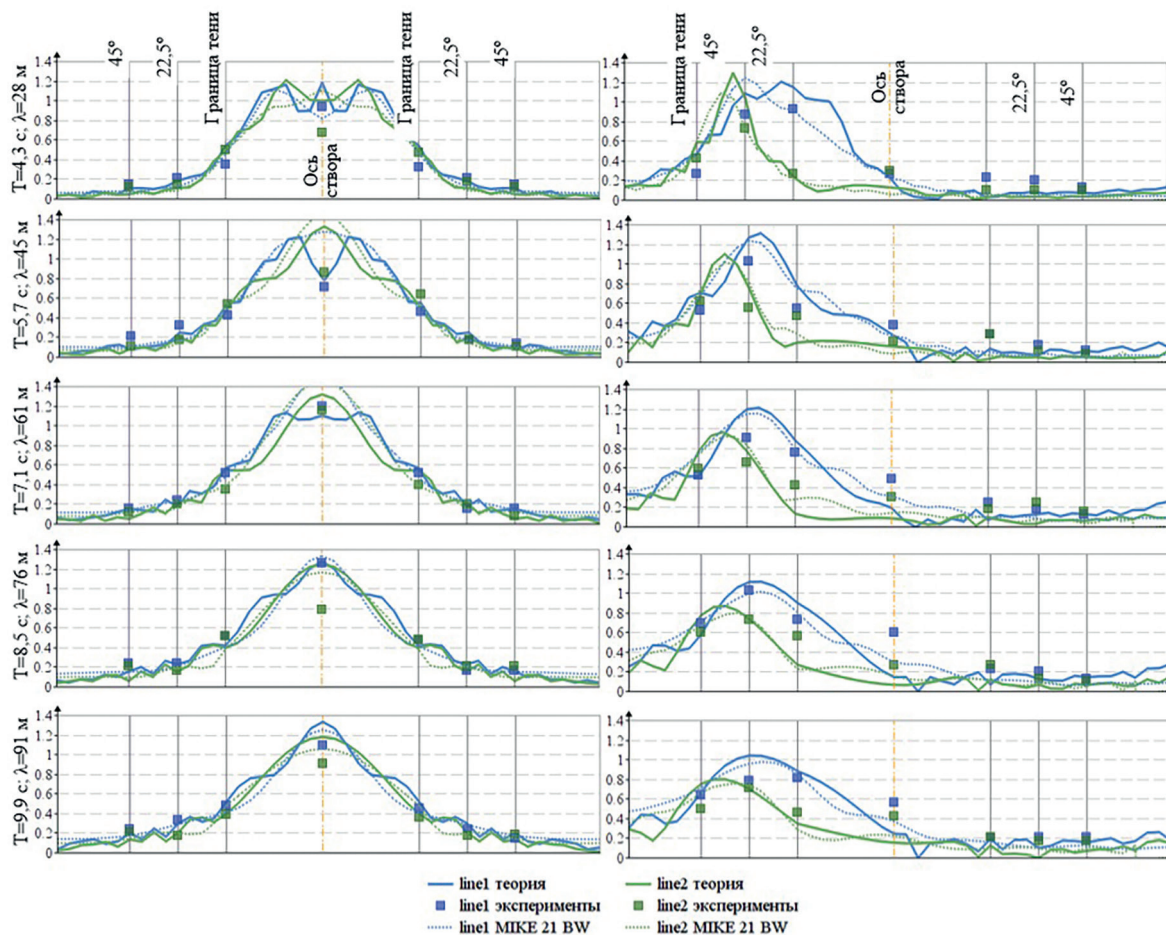


Рис. 9. Сравнение результатов, полученных разными методами, при ширине створа 195 м и подходящих под углом 90° (слева) и 45° (справа) волн различного периода

Fig. 9. Comparison of results obtained by different methods, for entrance width of 195 m and waves approaching at an angle of 90° (left) and 45° (right) of different periods

Таблица 2

Table 2

Результаты статистического анализа

Results of statistical analysis

Угол подхода волн	Створ	Абсолютное среднеквадратичное отклонение	Относительное среднеквадратичное отклонение	Коэффициент корреляции, R
90°	130 м	0,21	15 %	0,93
	195 м	0,16	11 %	0,96
67,5°	130 м	0,17	12 %	0,92
	195 м	0,15	11 %	0,95
45°	130 м	0,17	12 %	0,91
	195 м	0,18	13 %	0,92
22,5°	130 м	0,16	11 %	0,90
	195 м	0,14	10 %	0,94

Для количественного сопоставления полученных результатов был произведен расчет набора стандартных статистических показателей, используемых для верификации численных моделей. Результаты анализа представлены в табл. 2.

4. Обсуждение

Полученные решения задач дифракции методом параболического приближения при различных параметрах и углах подхода волн к сооружениям, а также при различной ширине входного створа, показывают очень близкие результаты с результатами численного моделирования. В сравнении с результатами физического моделирования метод параболического приближения дает ошибку в среднем от 10 до 15 %. Но необходимо учитывать, что практически такую же ошибку дает и численное моделирование. Помимо этого, физическое моделирование как метод также имеет свои недостатки. Среди прочих, это и влияние границ бассейна на развитие вторичного волнения, и точность снятия результатов.

Вопрос о точности того или иного способа волн сложен, тут необходимо учитывать несколько факторов. Первый — среднее согласие точности результатов моделирования и натурных измерений с опубликованными работами при использовании различных моделей (см., например, [20–23]). Точность совпадения должна быть примерно в том же диапазоне, что была получена в аналогичных работах. Второй — оценка погрешности прогнозирования волн, допустимая при решении инженерных задач. Эти факторы дают примерную допустимую оценку точности моделирования в 10–15 %. Кроме того, для нормативных методов расчета вопрос точности неизвестен вовсе. Поэтому представляется оправданным считать, что результаты, полученные в настоящей работе численным и аналитическим методом, с достаточной точностью верифицированы данными физических экспериментов.

Возвращаясь к осцилляциям комплексной функции, на которой основан метод параболического приближения, необходимо отметить, что полученные выражения для аппроксимации призваны только оценить влияние осцилляций функции на общие результаты, которые дает метод параболического приближения, но не уточняют абсолютных значений коэффициентов дифракции.

Следует также отметить, что в настоящей работе были рассмотрены только регулярные (двумерные, монохромные) волны. Однако реальное ветровое волнение имеет стохастический характер, а взволнованную поверхность формируют трехмерные нерегулярные волны. В более ранних работах авторов [24] были получены выражения для перехода от результатов расчета коэффициентов дифракции регулярных волн к коэффициентам дифракции нерегулярных волн, что также может быть легко применено к аналитическим методам, в том числе, к методу параболического приближения. В упомянутых работах показано, что расчеты коэффициента дифракции в регулярном и нерегулярном приближении могут давать сильно различающиеся результаты.

5. Выводы

В работе предложено развитие метода параболического приближения для расчета дифракции волн за сходящимися оградительными сооружениями, которые расположены на одной линии, не параллельной фронту набегающих волн. Вывод полученных выражений основан на способе линейной суперпозиции решений для двух сходящихся молв в предположении отсутствия их взаимовлияния друг на друга.

На основе анализа сравнения полученных методом параболического приближения результатов с результатами физических и численных экспериментов, сделан вывод о принципиально возможном использовании полученных в работе выражений на практике. Коэффициент корреляции результатов для разных постановок модельных экспериментов (всего 40) составил от 0,90 до 0,96.

В работе предлагаются аппроксимативные функции для выравнивания осцилляций значений коэффициента дифракции, которые могут быть получены с помощью комплексного параболического уравнения. На основе сравнения исходной и аппроксимирующей ее функций получено количественное значение погрешности математического аппарата метода параболического приближения, в среднем составившее от 2 до 5 %. Максимальная амплитуда осцилляций коэффициента дифракции составила 12,5 %.

Финансирование

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-38-90169.

Funding

The reported study was particularly funded by RFBR, project number 20-38-90169.

Литература

1. Кантаржи И.Г., Мордвинцев К.П., Гогин А.Г. Численное исследование защищенности акватории порта // Гидротехническое строительство. 2019. Т. 5. С. 45–52. doi:10.1007/s10749-019-01092-y
2. Шелушин Ю.А. Достоверность физического моделирования гидротехнических сооружений на примере объектов имеретинской низменности // Материалы XI Международной научно-практической конференции «Олимпийское наследие и крупномасштабные мероприятия: влияние на экономику, экологию и социокультурную сферу принимающих дестинаций». Сочи: СГУ, 2019. С. 260–264.
3. Kantarzi I., Anshakov A., Gogin A. Composite modelling of wind waves in designing of port hydraulic structures // Proceedings of the 31st International Offshore and Polar Engineering Conference. OnePetro, 2021. P. 2254–2261.
4. Kantarzi I., Gogin A. Calculation of wave conditions in water area with sharp bottom unevenness // MATEC Web of Conferences. EDP Sciences, 2018. Vol. 251. P. 04048. doi:10.1051/mateconf/201825104048
5. Kleefsman K.M.T., Fekken G., Veldman A.E.P., Iwanowski B., Buchner B. A volume-of-fluid based simulation method for wave impact problems // Journal of Computational Physics. 2005. Vol. 206, No. 1. P. 363–393. doi:10.1016/j.jcp.2004.12.007
6. Кантаржи И.Г. Композитное моделирование взаимодействия волновых процессов с портовыми гидротехническими сооружениями // Актуальные проблемы строительной отрасли и образования. 2020. С. 648–653.
7. Малюжинец Г.Д. Развитие представлений о явлениях дифракции (к 130-летию со дня смерти Томаса Юнга) // Успехи физических наук. 1959. Т. 69, № 10. С. 321–334.
8. Леонтович М.А. Об одном методе решения задач о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности земли // Известия АН СССР. Физика. 1944. Т. 8, № 1. С. 16–22.
9. Леонтович М.А., Фок В.А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1946. Т. 16. С. 557–573.
10. Фок В.А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970. 517 с.
11. Крылов Ю.М. и др. Ветер, волны и морские порты. Л.: Гидрометиздат, 1986. 263 с.
12. Загрядская Н.Н. Морские волны на акваториях и у сооружений вертикального типа. СПб.: Издательство Политехнического университета, 2006. 224 с.
13. Загрядская Н.Н. Применение метода параболического приближения в задачах дифракции поверхностных волн // Журнал технической физики. 1995. Т. 65, № 8. С. 25–37.
14. Sommerfeld A. Mathematische theorie der diffraction // Mathematische Annalen. 1896. Vol. 47, No. 2. P. 317–374.
15. Penney W.G. et al. Part I. The diffraction theory of sea waves and the shelter afforded by breakwaters // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1952. Vol. 244, No. 882. P. 236–253.
16. Попов А.В. Работы Лаборатории дифракции ИЗМИРАН // Электромагнитные и плазменные процессы от недр Солнца до недр Земли. 2015. С. 97–115.
17. Запуниди С.А., Попов А.В. Физическая картина излучения волн в клиновидной области: обобщение метода поперечной диффузии // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47, № 9. С. 1576–1590.
18. Johnson J.W. Generalized wave diffraction diagrams // Coastal Engineering. 1951. No. 2. P. 6–23. doi:10.9753/icce.v2.2

19. MIKE21 — A Modelling System of Boussinesq Waves. Reference Manual. DHI Water Environment Health. — Denmark. 2008. 16 p.
20. Zheng J., Tang Y. Verifications of Diffraction Modeling Capability in a Coastal Spectral Wave Model // International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering. 2009. Vol. 43444. P. 1–6. doi:10.1115/OMAE2009-79004
21. Booij N., Ris R.C., Holthuijsen L.H. A third-generation wave model for coastal regions: 1. Model description and validation // Journal of Geophysical Research: Oceans. 1999. Vol. 104, No. C4. P. 7649–7666. doi:10.1029/98JC02622
22. Ris R.C., Holthuijsen L.H., Booij N. A third-generation wave model for coastal regions: 2. Verification // Journal of Geophysical Research: Oceans. 1999. Vol. 104, No. C4. P. 7667–7681. doi:10.1029/1998JC900123
23. Zijlema M. Computation of wind-wave spectra in coastal waters with SWAN on unstructured grids // Coastal Engineering. 2010. Vol. 57, No. 3. P. 267–277. doi:10.1016/j.coastaleng.2009.10.011
24. Гогин А.Г. Дифракция случайных ветровых волн через суперпозицию решений для регулярных гармоник // Системные технологии. 2022. № 42. С. 140–145. doi:10.55287/22275398_2022_1_140

References

1. Kantarzhi I.G., Mordvintsev K.P., Gogin A.G. Numerical Analysis of the Protection of a Harbor Against Waves. *Power Technology and Engineering*. 2019, 53, 410–416. doi:10.1007/s10749-019-01092-y
2. Shelushinin Y.A. Reliability of physical modeling of hydraulic structures on the example of objects of the Imereti lowland. *Proceedings of the XI International Scientific and Practical Conference “Olympic Legacy and Large-Scale Events: Impact on the Economy, Ecology and Socio-Cultural Sphere of Host Destinations”*. Sochi, SSU, 2019, 260–264.
3. Kantarzhi I., Anshakov A., Gogin A. Composite modelling of wind waves in designing of port hydraulic structures. *Proceedings of the 31st International Offshore and Polar Engineering Conference. OnePetro*, 2021, 2254–2261.
4. Kantarzhi I., Gogin A. Calculation of wave conditions in water area with sharp bottom unevenness. *MATEC Web of Conferences. EDP Sciences*, 2018, 251, 04048. doi: 10.1051/mateconf/201825104048
5. Kleefsman K.M.T., Fekken G., Veldman A.E.P., Iwanowski B., Buchner B. A volume-of-fluid based simulation method for wave impact problems. *Journal of Computational Physics*. 2005, 206(1), 363–393. doi:10.1016/j.jcp.2004.12.007
6. Kantarzhi I.G. Composite modeling of the interaction of wave processes with port hydraulic structures. *Aktual'nye Problemy Stroitel'noj Otraski i Obrazovaniya*. 2020, 648–653 (in Russian).
7. Malyuzhinets G.D. Development of ideas about the phenomena of diffraction (to the 130th anniversary of the death of Thomas Young). *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*. 1959, 69(10), 321–334 (in Russian).
8. Leontovich M.A. On one method for solving problems on the propagation of electromagnetic waves along the surface of the earth. *Izvestiya AN USSR*. 1944, 8(1), 16–22 (in Russian).
9. Leontovich M.A., Fok V.A. Solving the problem of propagation of electromagnetic waves along the surface of the Earth using the parabolic equation method. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 1946, 16, 557–573 (in Russian).
10. Fok V.A. Problems of diffraction and propagation of electromagnetic waves. *Moscow, Soviet Radio*, 1970. 517 p. (in Russian).
11. Krylov Y.M. et al. Wind, waves and seaports. *Leningrad, Gidrometeoizdat*, 1986. 263 p. (in Russian).
12. Zagryadskaya N.N. Sea waves in water areas and near vertical structures. *St Petersburg, Izdatel'stvo Politehnicheskogo Universiteta*, 2006. 224 p. (in Russian).
13. Zagryadskaya N.N. Application of the method of parabolic approximation in problems of diffraction of surface waves. *Technical Physics*. 1995, 65, 8, 25–37 (in Russian).
14. Sommerfeld A. Mathematische theorie der diffraction. *Mathematische Annalen*. 1896, 47(2), 317–374.
15. Penney W.G. et al. Part I. The diffraction theory of sea waves and the shelter afforded by breakwaters. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*. 1952, 244(882), 236–253.
16. Popov A.V. Research works of IZMIRAL Diffraction laboratory. *Elektromagnitnye i Plazmennye Processy ot Nedr Solnca do Nedr Zemli*. 2015, 97–115 (in Russian).
17. Zapunidi S.A., Popov A.V. Physical pattern of wave emission in a wedge-shaped region: Generalization of the transverse diffusion method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2007, 47(9), 1514–1527. doi:10.1134/S0965542507090126
18. Johnson J.W. Generalized wave diffraction diagrams. *Coastal Engineering*. 1951, 2, 6–23. doi:10.9753/icce.v2.2
19. MIKE21 — A Modelling System of Boussinesq Waves. Reference Manual. *DHI Water Environment Health, Denmark*. 2008. 16 p.
20. Zheng J., Tang Y. Verifications of Diffraction Modeling Capability in a Coastal Spectral Wave Model. *International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*. 2009, 43444, 1–6. doi:10.1115/OMAE2009-79004
21. Booij N., Ris R.C., Holthuijsen L.H. A third-generation wave model for coastal regions: 1. Model description and validation. *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 1999, 104(C4), 7649–7666. doi:10.1029/98JC02622

Развитие метода параболического приближения в задачах дифракции морских волн на акватории порта
Development of the parabolic equation for calculation of sea waves diffraction in port area

22. *Ris R.C., Holthuijsen L.H., Booij N.* A third-generation wave model for coastal regions: 2. Verification. *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 1999, 104(C4), 7667–7681. doi:10.1029/1998JC900123
23. *Zijlema M.* Computation of wind-wave spectra in coastal waters with SWAN on unstructured grids. *Coastal Engineering*. 2010, 57(3), 267–277. doi:10.1016/j.coastaleng.2009.10.011
24. *Gogin A.G.* Diffraction of wind waves via superposition of solutions for regular harmonics. *System Technologies*. 2022, 42, 140–145 doi:10.55287/22275398_2022_1_14 (in Russian)

Об авторах

ГОГИН Александр Григорьевич, РИНЦ Author ID: 994101, ORCID ID: 0000-0003-3894-3680,
Scopus Author ID: 57192663878, WoS Researcher ID: HCH-8254–2022, alex.gogin@bk.ru

КАНТАРЖИ Измаил Григорьевич, РИНЦ Author ID: 60202, 1086368, ORCID ID: 0000-0002-0587-4722,
Scopus Author ID: 6602848417, 57200265787, WoS Researcher ID: A-1922–2014, kantardgi@yandex.ru