

УДК 534.23

© Б. А. Касаткин¹, Н. В. Злобина¹, Л. Г. Стаценко^{2*}, С. Б. Касаткин¹, 2023

¹Институт проблем морских технологий ДВО РАН, 690091, Россия, Владивосток, Приморский край, ул. Суханова, д. 5а.

²Дальневосточный федеральный университет, 690922, Россия, Владивосток, Приморский край, о. Русский, п. Аякс, д. 10.

*statsenko.lg@dvfu.ru

НЕСАМОСОПРЯЖЕННАЯ МОДЕЛЬНАЯ ПОСТАНОВКА ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ АКУСТИКИ. ЧАСТЬ 1

Статья поступила в редакцию 14.10.2022, после доработки 27.02.2023, принята в печать 14.04.2023

Аннотация

На основе математического определения несамосопряженного оператора и физического смысла конкретной граничной задачи сформулирована несамосопряженная модельная постановка граничных задач акустики. В качестве примера рассмотрены граничные задачи на отражение плоской волны и сферической волны на границе раздела двух жидких сред. Введено новое определение коэффициента отражения сферической волны. В области докритических углов падения новое определение учитывает появление в суммарном звуковом поле сходящихся волн отдачи, соответствующих собственным функциям сопряженного оператора. В области закритических углов падения участие в суммарном звуковом поле собственных функций двух сопряженных операторов формирует отличный от нуля поток мощности через границу раздела и его трансформацию в вихревую составляющую вектора интенсивности на горизонте полного внутреннего отражения. Дано определение горизонта полного внутреннего отражения. Приведены экспериментальные данные, подтверждающие новое определение коэффициента отражения и физическую корректность несамосопряженной модельной постановки.

Ключевые слова: несамосопряженная модельная постановка, сходящиеся волны отдачи, горизонт трансформации, вихревая составляющая вектора интенсивности

© Б. А. Касаткин¹, Н. В. Злобина¹, Л. Г. Стаценко^{2*}, С. Б. Касаткин¹, 2023

¹Institute of Marine Technology Problems, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, 5a Sukhanova St., Vladivostok, Primorsky Krai, 690091, Russia

²Far Eastern Federal University, p. Ajaks, 10, Russkiy Isl., Vladivostok, Primorsky Krai, 690922, Russia

*statsenko.lg@dvfu.ru

NON-SELF-ADJOINT MODEL STATEMENT OF BOUNDARY PROBLEM OF ACOUSTICS. PART 1

Received 14.10.2022, Revised 27.02.2023, Accepted 14.04.2023

Abstract

Based on the mathematical definition of a non-self-adjoint operator and the physical meaning of a specific boundary value problem, a non-self-adjoint model statement of boundary value problems in acoustics is formulated. As an example, boundary value problems for the reflection of a plane wave and a spherical wave at the interface between two liquid media are considered. A new definition of the reflection coefficient of a spherical wave is introduced. In the region of subcritical angles of incidence, the new definition takes into account the appearance in the total sound field of converging recoil waves corresponding to the eigenfunctions of the adjoint operator. In the region of supercritical angles of incidence, the participation of the eigenfunctions of two conjugate operators in the total sound field forms a nonzero power flux through the interface and its transformation into the vortex component of the intensity vector at the total internal reflection horizon. The definition of the total internal reflection horizon is given. Experimental data are presented that confirm the new definition of the reflection coefficient and the physical correctness of the non-self-adjoint model statement.

Keywords: non-self-adjoint model setting, converging recoil waves, transformation horizon, vortex component of the intensity vector

Ссылка для цитирования: Касаткин Б.А., Злобина Н.В., Стаценко Л.Г., Касаткин С.Б. Несамосопряженная модельная постановка граничных задач акустики. Часть 1 // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2023. Т. 16, № 2. С. 111–125. doi:10.59887/2073-6673.2023.16(2)-8

For citation: Kasatkin B.A., Zlobina N.V., Statsenko L.G., Kasatkin S.B. Non-Self-Adjoint Model Statement of Boundary Problem of Acoustic. Part 1. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2023, 16, 2, 111–125. doi:10.59887/2073-6673.2023.16(2)-8

1. Введение

При решении традиционных граничных задач акустики в слоистом пространстве подразумевается задание соответствующего дифференциального уравнения, граничных условий и условий на бесконечности, означающих в совокупности задание некоторого оператора, описывающего данную граничную задачу. В соответствии с определением, приведенным в работе [1], граничная задача считается корректно поставленной при соблюдении двух условий: граничная задача имеет решение в каком-то классе функций, решение граничной задачи в этом классе функций является единственным. Согласно общепринятой терминологии, все операторы, описывающие граничную задачу, делятся на самосопряженные и несамопряженные. Формальным признаком самосопряженного оператора является вещественный спектр собственных значений, тогда как спектр собственных значений несамопряженного оператора является комплексным с конечным подмножеством вещественных значений.

Неформальным признаком самосопряженного оператора является тот факт, что он всегда описывает консервативную систему, в которой отсутствуют какие-либо потери, например, потери на поглощение звука, потери на трансформацию одного типа волн в волны другого типа, потери на излучение через границы раздела. Потери на трансформацию одного типа волн в волны другого типа хорошо известны в теории твердых волноводов, в которых продольные и поперечные волны связаны механизмом взаимной трансформации при отражении от границ раздела. В идеальных (без учета потерь) жидких слоистых средах звуковое поле описывается одним типом волн, а такой тип трансформации невозможен. Однако это не исключает появления других механизмов трансформации, которые могут сделать модельную постановку граничной задачи несамопряженной. Наконец, наличие границ раздела, как правило, означает утечку энергии из одной среды, где расположен источник энергии, в другие среды через границы раздела, что также означает, что соответствующая граничная задача должна описываться несамопряженным оператором. В свою очередь, это означает, что в акустике слоистых сред несамопряженные операторы должны играть ключевую роль при решении граничных задач, а несамопряженная модельная постановка должна быть корректно сформулирована.

В случае если несамопряженный оператор описывает граничную задачу волнового типа, собственные значения оператора λ_n связаны с горизонтальными волновыми числами ξ_n в направлении распространения волны соотношением $\lambda_n = \xi_n^2$. С учетом этого, комплексно-сопряженным значениям собственных чисел λ_n , λ_n^* несамопряженного оператора будет соответствовать четверка собственных значений волновых чисел ξ_n , ξ_n^* , $-\xi_n$, $-\xi_n^*$, описывающих волновой процесс. При учете потерь на распространение и при наличии в области определения решения бесконечно удаленной точки, условию погашаемости на бесконечности будет удовлетворять пара волновых чисел $(\xi_n, -\xi_n^*)$ или $(\xi_n^*, -\xi_n)$. Пары волновых чисел соответствует пара встречных волн, которые являются собственными функциями двух сопряженных операторов.

Иначе говоря, если граничная задача описывается несамопряженным оператором, в общем решении граничной задачи возможно появление гибридных волн, в которых встречные волны, как собственные функции двух сопряженных операторов, будут связаны механизмом взаимной трансформации на горизонтах трансформации, подлежащих определению. Таким образом, при определенных условиях в жидких слоистых средах возможен новый тип трансформации, а именно трансформация расходящейся волны в сходящуюся волну отдачи на горизонтах трансформации. Такая трансформация неизбежно связана с нарушением локальных условий непрерывности по давлению и нормальной компоненте вектора колебательной скорости. По этой причине границы раздела не могут быть горизонтами трансформации. Кроме того, разрывность решения на горизонтах трансформации не должна приводить к появлению новых источников энергии с отличной от нуля мощностью излучения, не указанных при постановке граничной задачи.

В случае если граничная задача описывается самосопряженным оператором, решение граничной задачи будет содержать только собственные функции одного оператора. Такими являются расходящиеся волны, удовлетворяющие условиям излучения в той или иной форме, в простейшем случае — условиям излучения Зоммерфельда, сформулированным для свободного пространства. В этом случае никаких дополнительных проблем не возникает, а самосопряженная модельная постановка оказывается наиболее привлекательной при решении граничных задач в акустике слоистых сред. Таким образом, если деление операторов на самосопряженные и несамопряженные имеет четкое математическое определение, то сама несамопряженная модельная постановка еще нуждается в определении, совместимом с условием физической и математической корректности соответствующего ей обобщенного решения.

2. Отражение плоской волны на границе раздела двух жидких сред

Рассмотрим простейшую граничную задачу на отражение плоской волны на границе раздела двух жидких сред, впервые сформулированную Ньютоном. Падающая волна, отраженная волна и преломленная волна, записанные в потенциалах, непрерывные по давлению на границе раздела, синхронно распространяются вдоль границы раздела. Угол падения θ_1 , угол отражения θ_1 и угол преломления θ_2 связаны законом Снеллиуса. Амплитудный коэффициент V отраженной волны записываются в виде:

$$V = V_{ie} = \frac{k_{31} - \rho_{12}k_{32}}{k_{31} + \rho_{12}k_{32}}, \quad (1)$$

в принятых обозначениях ρ_1, c_1, ρ_2, c_2 — плотность и скорость звука в верхнем и нижнем полупространствах соответственно, $\rho_{12} = \rho_1/\rho_2$, $k_{32} = \sqrt{k_2^2 - \xi^2}$, $k_{31} = \sqrt{k_1^2 - \xi^2}$, $k_{1,2} = \omega/c_{1,2}$, ω — круговая частота, p и v_z — давление и нормальная компонента колебательной скорости, ξ — горизонтальное волновое число (постоянная распространения).

В классической схеме поток мощности через границу раздела при докритических углах падения (потери на излучение для источника в верхнем полупространстве) отличен от нуля. По этому формальному признаку схема решения граничной задачи и определение коэффициента отражения плоской волны соответствуют несамосопряженной модельной постановке. При углах падения, больших критического, коэффициент отражения становится комплексным, равным по модулю единице, а преломленная волна становится неоднородной волной, амплитуда которой экспоненциально убывает в нижнем полупространстве:

$$V = e^{i2\psi}, k_{32} = -i\alpha, \theta_1 \geq \theta_{1, \text{кр}}, \operatorname{tg} \psi = \frac{\rho_{12}\alpha_2}{k_{31}}, \alpha_2 = \sqrt{\xi^2 - k_2^2}, \theta_{1, \text{кр}} = \operatorname{arcsinc}_{12}, c_{12} = c_1/c_2. \quad (2)$$

Классическое решение, полученное в несамосопряженной модельной постановке, не является физически корректным в силу его характерных особенностей:

- решение описывает полное отражение при закритических углах падения, только если под коэффициентом отражения понимать комплексное число, модуль которого равен единице;

- зависимость фазы коэффициента отражения от горизонтального волнового числа (от угла падения) означает горизонтальный сдвиг волнового процесса в верхнем полупространстве на величину $\Delta = \frac{2\partial\psi}{\partial\xi}$, который оказывается бесконечно большим при критическом угле падения и в предельном случае $\theta_1 = \pi/2$.

Экспериментально наблюдаемый сдвиг, известный как сдвиг Гооса — Генхена, имеет конечную величину и наблюдается только при возбуждении на границе раздела пограничной волны типа Рэлея — Шолте. Однако на границе раздела двух жидких полупространств пограничная волна отсутствует, а потому физический сдвиг волнового процесса вдоль границы раздела в классическом описании невозможен;

- отражение при закритических углах падения является полным, но не внутренним (по Ньютону). Отличный от нуля горизонтальный поток мощности в нижнем полупространстве не имеет источника энергии в нижнем полупространстве и не имеет энергетической связи с источником энергии, находящимся в верхнем полупространстве (поток мощности через границу раздела равен нулю).

Следует отметить, что решение граничной задачи на отражение плоской волны на границе раздела двух жидких сред было получено Ньютоном почти триста лет назад. Он же назвал полное отражение при углах падения, больших критического значения, полным внутренним отражением. Однако физическая некорректность классического описания полного внутреннего отражения, насколько нам известно, впервые была отмечена только в работе [2], но иная модельная постановка не была сформулирована и не получила должного математического обоснования.

Корректное (обобщенное) описание полного внутреннего отражения в несамосопряженной модельной постановке может быть построено с учетом того, что классическое решение, полученное в несамосопряженной модельной постановке, не является единственным при углах падения, больших критического значения. Второе решение, соответствующее комплексно-сопряженному значению вертикального волнового числа, экспоненциально растет по амплитуде в нижнем полупространстве. В классическом модельном решении граничной задачи это частное решение исключается из общего решения как не удовлетворяющее условию погашаемости в нижнем полупространстве. Однако с физической точки зрения подобный выбор единственного решения не является корректным.

Дело в том, что для неоднородной волны, амплитуда которой экспоненциально убывает в нижнем полупространстве, входной импеданс полупространства является реактивным, инерционным. В случае если

амплитуда неоднородной волны экспоненциально растет в полупространстве, входной импеданс полупространства становится реактивным, упругим. Хорошо известно, что реактивный импеданс во всех разделах физики проявляется двояко. В механике он может быть либо инерционным, либо упругим, в радиотехнике он может быть либо индуктивным, либо емкостным. Таким образом, любая реализация реактивного входного импеданса, либо инерционного, либо упругого, является физически возможной, а потому второе решение граничной задачи нужно не исключать из общего решения, а изменить его математическое описание, подвергнув процедуру регуляризации. Для этого можно воспользоваться механизмом трансформации расходящейся волны в сходящуюся волну отдачи на горизонте трансформации $z = -z_{\pi}$ с одновременным изменением знака вертикального волнового числа. Влияние регуляризации на исходную математическую модель заключается в том, что полученное решение непрерывно по давлению и нормальной компоненте вектора колебательной скорости всюду в области определения, за исключением горизонта трансформации (горизонта полного внутреннего отражения).

Процедура регуляризации поясняется рис. 1, а и сводится к построению собственной функции поперечного сечения, которая является разрывной по волновой функции и по нормальной производной на горизонте трансформации, который играет роль горизонта полного внутреннего отражения $z = -z_{\pi}$. В точке разрыва производная принимает конечные значения сверху при $z = z_{\pi} + 0$ и снизу при $z = z_{\pi} - 0$, что означает разрывность по нормальной компоненте вектора колебательной скорости на конечную величину. Как видно из рисунка, на этом горизонте расходящаяся волна, амплитуда которой экспоненциально растет по вертикальной координате, трансформируется в сходящуюся волну отдачи с убывающей амплитудой. Разрывность решения по волновой функции и по нормальной производной функции поперечного сечения означает одновременное появление и скачка давления, и скачка нормальной компоненты вектора колебательной скорости на горизонте трансформации. Однако возникающая на горизонте трансформации вертикальная компонента вектора интенсивности оказывается знакопеременной с периодом $\lambda/2$ (λ — длина волны), а поток мощности через горизонт трансформации тождественно равен нулю при всех углах падения, больших критического значения. Именно этот фактор обеспечивает корректность обобщенного решения, построенного в классе обобщенных функций, разрывных как по давлению, так и по нормальной компоненте вектора колебательной скорости. Сама вертикальная компонента вектора интенсивности оказывается вихревой компонентой, а горизонт трансформации обладает свойствами горизонта полного внутреннего отражения по Ньютону. На рис. 1, б показано расщепление падающей волны на две составляющие, регулярную и обобщенную.

Регулярная составляющая зеркально отражается со сдвигом в направлении распространения волны, тогда как обобщенная составляющая зеркально отражается со сдвигом в обратном направлении. Встречный

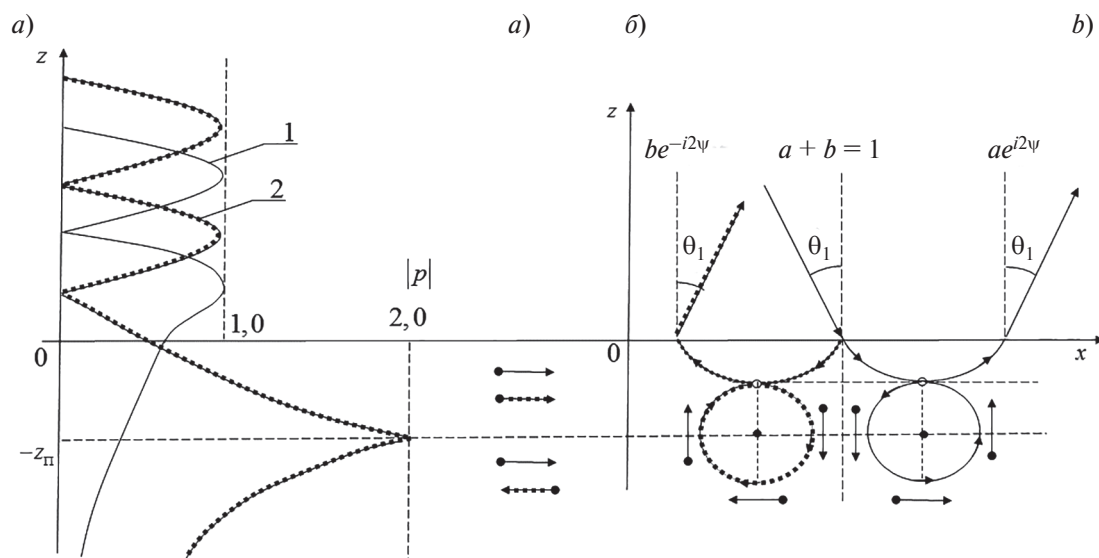


Рис. 1. Структура функций поперечного сечения для регулярной составляющей (1) и обобщенной составляющей (2) (а), лучевая трактовка полного внутреннего отражения с встречным сдвигом (б)

Fig. 1. The structure of the cross-sectional functions for the regular component (1) and the generalized component (2) (a), the ray interpretation of total internal reflection with a counter shift (b)

сдвиг порождает генерацию вихревой, знакопеременной составляющей вектора интенсивности в нижнем полупространстве, формирование узловых точек на горизонте трансформации и седловых точек в придонном слое, названных в работе [3] дислокациями фазового фронта. Суммарное решение граничной задачи в области закритических углов падения можно представить в виде суммы двух сопряженных решений:

$$\varphi(z, x) = a \begin{pmatrix} e^{ik_{31}z} + V e^{-ik_{31}z} \\ \rho_{12}(1+V)e^{\alpha_2 z} \\ \rho_{12}(1+V)e^{\alpha_2 z} \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} + b \begin{pmatrix} (e^{ik_{31}z} + V^* e^{-ik_{31}z})e^{-i\zeta x} \\ \rho_{12}(1+V^*)e^{-\alpha_2 z} e^{-i\zeta x} \\ \rho_{12}(1+V^*)e^{\alpha_2 z_{\Pi}} e^{\alpha_2(z+z_{\Pi})} e^{i\zeta x} \end{pmatrix} \begin{matrix} z \geq 0 \\ -z \leq z \leq 0, \\ z \leq -z_{\Pi} \end{matrix}, \quad a + b = 1. \quad (3)$$

Эффективный коэффициент отражения для волны давления в суммарном решении, названный в работе [2] коэффициентом отражения сферической волны, можно определить в виде линейной комбинации коэффициентов V и V^* . Этот коэффициент отражения является решением граничной задачи в несамосопряженной модельной постановке

$$V_{\text{сф}}(\theta_1) = aV(\theta_1) + bV^*(\theta_1) = \text{Re}V_{\text{пл}} + i(a-b)\text{Im}V_{\text{пл}}, \quad V_{\text{г.б.}} = V = \frac{k_{31} - \rho_{12}k_{32}}{k_{31} + \rho_{12}k_{32}}, \quad (4)$$

но с использованием двух сопряженных решений. Конкретному заданию коэффициентов $a + b = 1$ соответствует конкретное задание входного импеданса нижнего полупространства и единственное решение граничной задачи в классе обобщенных функций. Отметим основные особенности полученного решения.

Поток мощности через границу раздела в области закритических углов падения определяется формулой:

$$I_{z,1}(0) = I_{z,2}(0) = -I_0 D(0) \cos \theta_1, \quad I_0 = \frac{1}{2} \omega \rho_1 k_1, \quad D(0) = 4ab(\text{Im}V)^2. \quad (5)$$

Интерференция двух волн суммарного решения «открывает» границу по вертикальному потоку мощности и реализует механизм затекания энергии в нижнее полупространство. На горизонте трансформации, играющем роль горизонта полного внутреннего отражения, вертикальная компонента вектора интенсивности становится знакопеременной с периодом $\lambda/2$, а интегральный поток мощности через горизонт трансформации равен нулю. Сам горизонт полного внутреннего отражения определяется уравнением:

$$\left| (1 + \text{Re}V) \left[e^{\alpha_2 z_{\Pi}} - 2a \text{sh}(\alpha_2 z_{\Pi}) \right] - i \text{Im}V \left[e^{\alpha_2 z_{\Pi}} - 2a \text{ch}(\alpha_2 z_{\Pi}) \right] \right| = 2. \quad (6)$$

Зависимость горизонта полного внутреннего отражения от угла падения показана на рис. 2, параметром кривых является амплитуда регулярной составляющей суммарного решения. Можно отметить, что при увеличении угла падения уровень звукового давления на границе раздела уменьшается вследствие

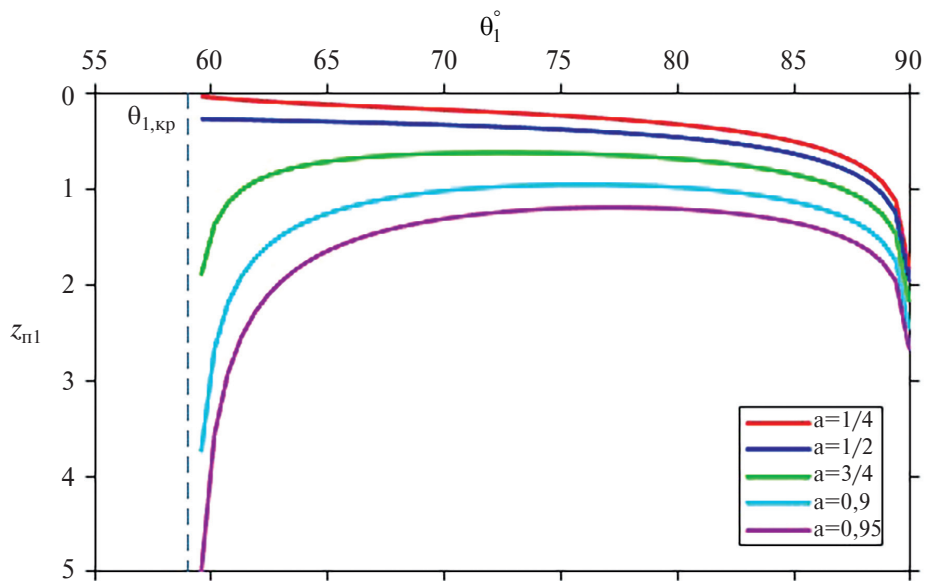


Рис. 2. Угловая зависимость горизонта полного внутреннего отражения $z_{\Pi 1} = z_{\Pi} / \lambda_1$

Fig. 2. Angular dependence of the total internal reflection horizon $z_{\Pi 1} = z_{\Pi} / \lambda_1$

эффекта мягкого экрана, уменьшается и поток мощности через границу раздела. С учетом этих двух факторов горизонт полного внутреннего отражения увеличивается по мере приближения угла падения к предельному значению $\pi/2$. С другой стороны, поток мощности через границу раздела уменьшается и при приближении угла падения к критическому значению, но в этом предельном случае уровень звукового давления на границе раздела близок к своему максимальному значению.

С учетом этих двух факторов горизонт полного внутреннего отражения также должен увеличиваться по мере приближения угла падения к критическому значению, но эта тенденция проявляется достаточно заметно только при уменьшении амплитуды обобщенной составляющей суммарного решения, обеспечивающей затекание энергии в донное полупространство.

Структура вертикального потока мощности на горизонте трансформации определяется скачками давления и нормальной компоненты вектора колебательной скорости:

$$\begin{aligned} z &= -z_{\text{п}}, \\ \Delta p(x) &= b(1 + V^*) \omega \rho_1 e^{\alpha_2 z_{\text{г}}} 2 \sin(\xi x), \\ \Delta v_z(x) &= b(1 + V^*) \rho_{12} \alpha_2 e^{\alpha_2 z_{\text{г}}} 2 \cos(\xi x), \\ \Delta I_z(x) &= I_0 D(\theta_1) \sin(2\xi x), \quad I_0 = \frac{1}{2} \omega \rho_1 k_1 \cos \theta_1, \\ D(\theta_1) &= 2b^2 (1 + \text{Re} V) \rho_{12} \frac{\alpha_2}{k_1} e^{2\alpha_2 z_{\text{г}}}. \end{aligned} \quad (7)$$

В случае $\theta_1 = \theta_{1, \text{к.бр}}$, $\theta_{1, \text{к.бр}}$ — угол квази-Брюстера (аналог угла Брюстера в области вещественных значений коэффициента отражения)

$$b = \frac{1}{2}, \quad \text{Re} V = 0, \quad D(\theta_{1, \text{к.бр}}) = \frac{1}{2} \rho_{12} \frac{\alpha_2}{k_1} e^{2\alpha_2 z_{\text{г}}}. \quad (8)$$

Решение, скорректированное процедурой регуляризации и построенное с участием разрывных функций, будем ниже называть обобщенным решением в отличие от классического решения, построенного в классе функций, удовлетворяющих условиям локальной (p, v_z) -непрерывности во всей области определения. Основное свойство обобщенного решения заключается в том, что на горизонте трансформации оно является непрерывным только по импедансу, определенному через отношение интегральных величин, таких как сила, действующая на элемент поверхности, и объемная колебательная скорость, определенная для этого элемента поверхности, при условии, что размер элемента поверхности достаточно велик по сравнению с длиной волны. Использование пары сопряженных решений позволяет построить суммарное решение, в котором появляется отличный от нуля поток мощности через границу раздела. Этот поток реализует гипотезу Ньютона о том, что полное отражение должно быть внутренним, связанным с затеканием потока мощности на горизонт полного внутреннего отражения с последующим ее возвратом (или невозвратом) в верхнее полупространство с источником.

В приграничном слое $z \in (0, -z_{\text{п}})$ горизонтальный поток мощности в общем случае отличен от нуля, тогда как ниже горизонта полного внутреннего отражения звуковое поле может существовать только в форме стоячей волны. В структуре типа стоячей волны формируется вихревая составляющая вектора интенсивности с характерными для нее седловыми точками, в которых вектор интенсивности равен нулю, и узловыми точками, в которых звуковое давление равно нулю.

Используя (7), можно восстановить пространственную структуру вихревой составляющей вектора интенсивности и поле ротора вектора интенсивности:

$$\begin{aligned} \Delta I_z(z, x) &= I_0 D(\theta_1) e^{-2\xi|z+z_{\text{г}}|} \sin(2\xi x), \\ \Delta I_x(z, x) &= \begin{cases} I_0 D(\theta_1) e^{-2\xi(z+z_{\text{г}})} \cos(2\xi x), & z > -z_{\text{г}} \\ -I_0 D(\theta_1) e^{2\xi(z+z_{\text{г}})} \cos(2\xi x), & z < -z_{\text{г}} \end{cases}, \\ H_y(z, x) &= \frac{\partial \Delta I_x}{\partial z} - \frac{\partial \Delta I_z}{\partial x} = -4\xi I_0 D(\theta_1) e^{-2\xi|z+z_{\text{г}}|} \cos(2\xi x). \end{aligned}$$

Зависимость коэффициента отражения $V_{\text{сф}}(\xi)$ от горизонтального волнового числа в диапазоне закритических углов падения показана на рис. 3. Поскольку горизонтальное волновое число однозначно связано

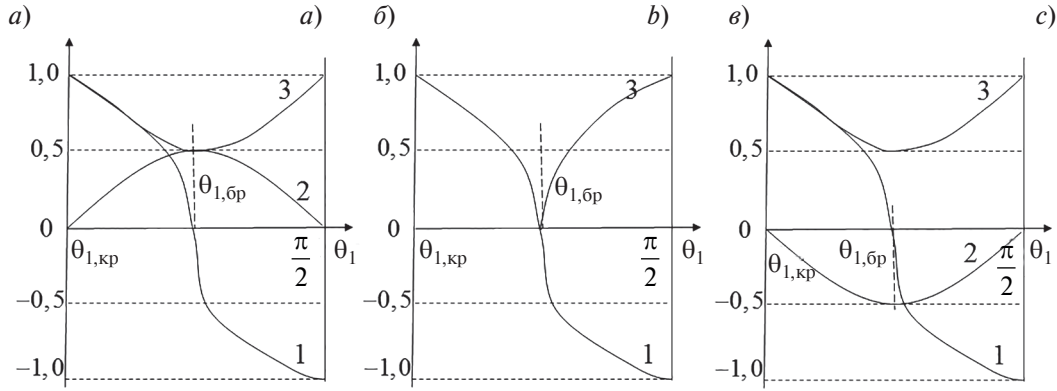


Рис. 3. Зависимость коэффициента отражения $V_{\text{cf}}(\xi)$ и его составляющих от горизонтального волнового числа (угла падения) и лучевая трактовка сдвига волнового процесса при отражении: $a - a = 3/4, b = 1/4$; $\delta - a = 1/2, b = 1/2$; $\epsilon - a = 1/4, b = 3/4$; 1 — $\text{Re}V$, 2 — $\text{Im}V$, 3 — $|V_{\text{cf}}|$

Fig. 3. Dependence of the reflection coefficient $V_{\text{cf}}(\xi)$ and its components on the horizontal wave number (angle of incidence) and ray interpretation of the shift of the wave process upon reflection: $a - a = 3/4, b = 1/4$; $b - a = 1/2, b = 1/2$; $c - a = 1/4, b = 3/4$; 1 — $\text{Re}V$, 2 — $\text{Im}V$, 3 — $|V_{\text{cf}}|$

с углом падения, ($\xi = k_1 \sin \theta_1$), то рисунок поясняет и угловую зависимость коэффициентов отражения. Там же на рисунке представлена трактовка полного внутреннего отражения со сдвигом при различной комбинации коэффициентов a и b . В случае $a > b$ мнимая часть коэффициента $V_{\text{cf}}(\xi)$ является положительно определенной и соответствует инерционному характеру реактивной составляющей входного импеданса полупространства. В случае $a < b$ мнимая часть коэффициента $V_{\text{cf}}(\xi)$ является отрицательно определенной и соответствует упругому характеру реактивной составляющей входного импеданса полупространства. В случае $a = b$ мнимая часть коэффициента отражения и, соответственно, реактивная составляющая входного импеданса полупространства равны нулю.

Рис. 4 поясняет лучевую трактовку зеркального отражения со встречным сдвигом. В случае $a > b$, $\text{Im}V > 0$ волновой процесс при полном внутреннем отражении сдвигается в направлении распространения подающей волны ($\Delta_x > 0$). В случае $a < b$, $\text{Im}V < 0$ волновой процесс при полном внутреннем отражении сдвигается в обратном направлении ($\Delta_x < 0$). В случае $a = b$ имеет место полное совмещение двух встречных сдвигов. Этот интересный случай можно трактовать как полное внутреннее отражение, при котором появляется еще один вид трансформации, трансформация по фазе коэффициента отражения, теперь уже

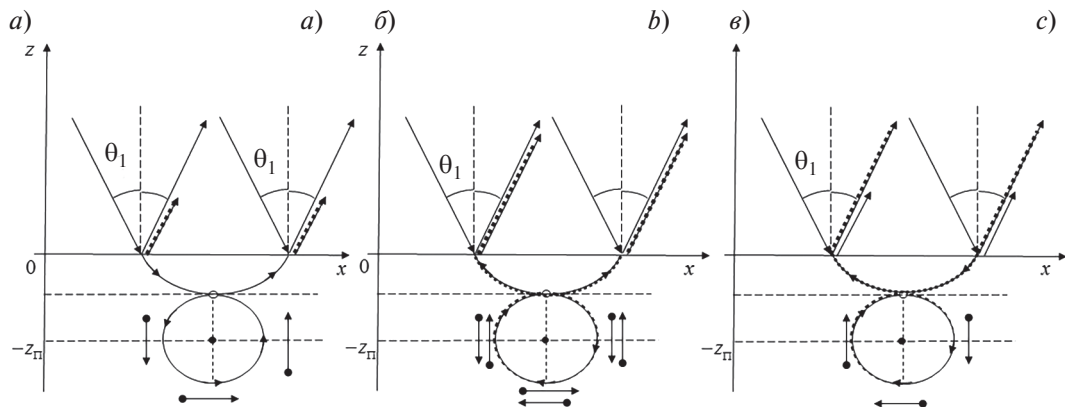


Рис. 4. Лучевая трактовка полного внутреннего отражения со сдвигом: $a - a > b, \text{Im}V > 0$; $\delta - a = b, \text{Im}V = 0$; $\epsilon - a < b, \text{Im}V < 0$

Fig. 4. Beam interpretation of total internal reflection with a shift: $a - a > b, \text{Im}V > 0$; $b - a = b, \text{Im}V = 0$; $c - a < b, \text{Im}V < 0$

на самой границе раздела. В этом случае пространственные сдвиги $\Delta_x > 0$ и $\Delta_x < 0$ сопряженных волн вдоль границы раздела равны, а результат их совместного распространения можно трактовать как трансформацию волны одного типа, для которой фазовый сдвиг $\psi > 0$, в волну другого типа, для которой фазовый сдвиг $\psi < 0$. При этом вихревая составляющая вектора интенсивности приобретает в придонном слое знакопеременный характер, соответствующий знакопеременному характеру вертикальной компоненты вектора интенсивности на горизонте трансформации.

Подробное исследование сдвига направленных звуковых пучков (сдвига Гоосса — Генхена,) при полном внутреннем отражении на границе раздела жидкости и твердого тела подробно описан в обзорном плане в работе [4]. Согласно приведенным данным, сдвиг направленного пучка при полном отражении действительно может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Следует отметить, что во всех случаях наблюдения пространственного сдвига направленных звуковых пучков при полном внутреннем отражении всегда присутствует пограничная волна типа Рэлея — Шолте, а сам сдвиг соответствует не критическому углу падения, а углу падения, соответствующему возбуждению пограничной волны Рэлея — Шолте. Однако экспериментальные данные о возможном сдвиге направленных звуковых пучков на границе раздела двух жидких сред отсутствуют, как отсутствует и сама пограничная волна.

3. Численный анализ граничной задачи

Структура поля звукового давления при полном внутреннем отражении представлена на рис. 5–7 при различных углах падения (в области закритических углов падения). В расчетах приняты характерные для шельфовой зоны параметры сопряженных сред $\rho_{12} = 1,0/1,6$, $c_{12} = 1,5/1,75$.

Общие особенности структуры поля звукового давления, заключаются в следующем. В верхнем полупространстве поле носит характер стоячей волны по вертикальной координате и расходящейся волны

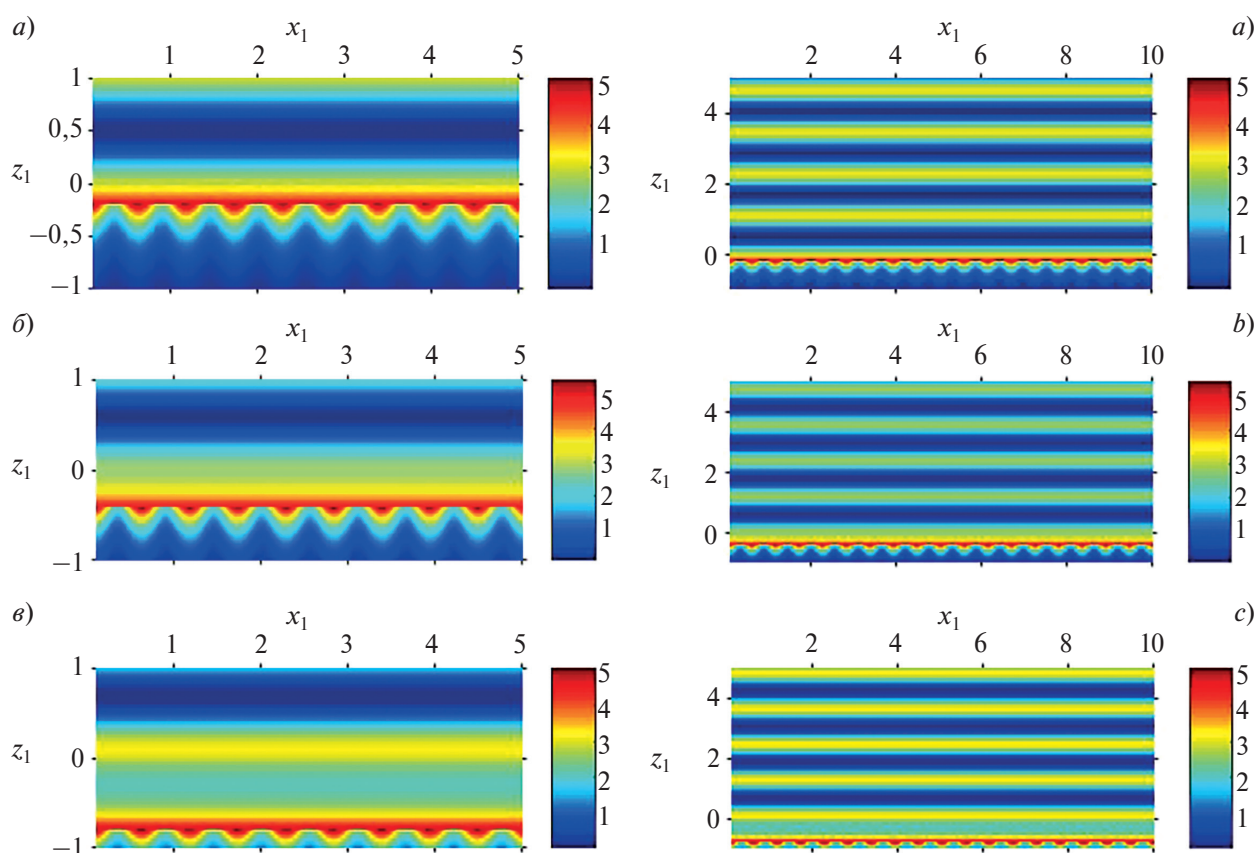


Рис. 5. Структура поля звукового давления при полном внутреннем отражении для угла падения $\theta_1 = 65^\circ$:
 $a - a = 1/4$; $b - a = 1/2$; $e - a = 3/4$; $x_1 = x/\lambda$, $z_1 = z/\lambda$

Fig. 5. Structure of the sound pressure field at total internal reflection for the angle of incidence $\theta_1 = 65^\circ$:
 $b - a = 1/2$; $c - a = 3/4$; $x_1 = x/\lambda$, $z_1 = z/\lambda$

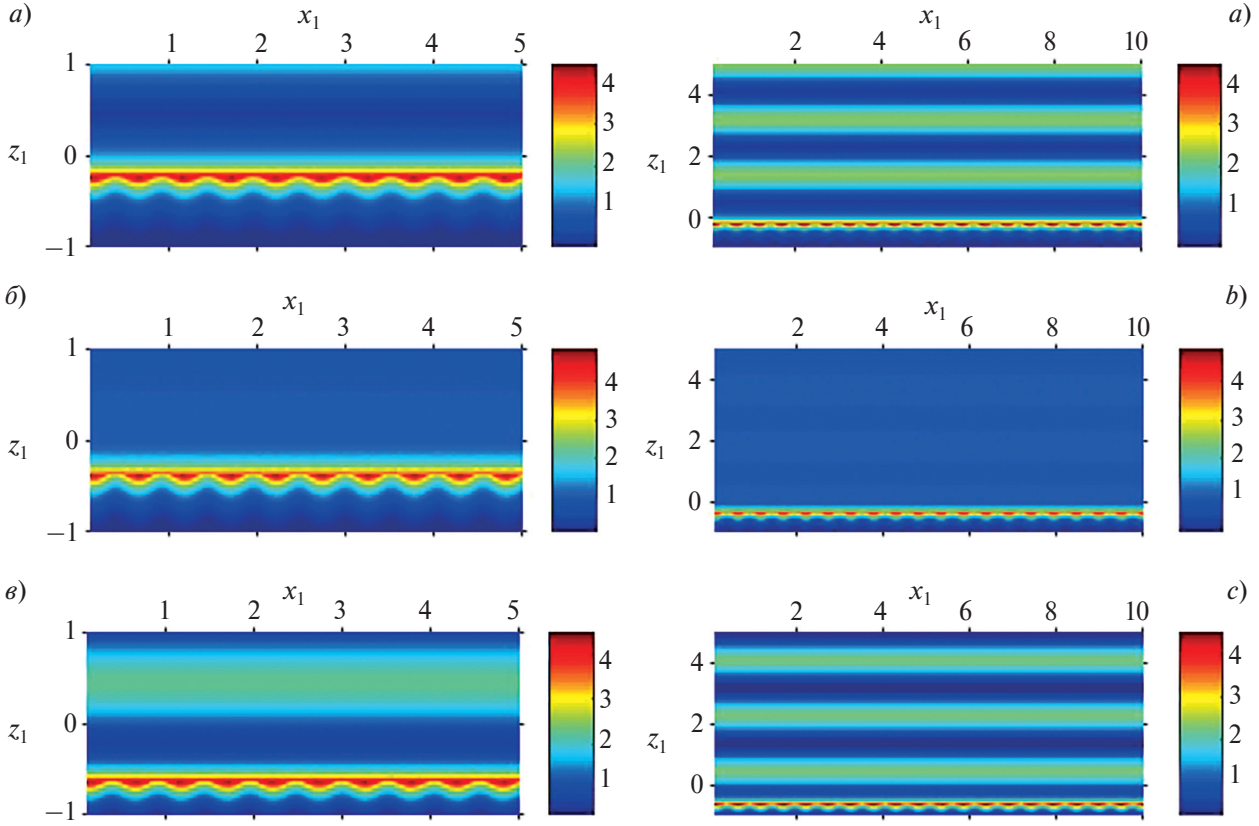


Рис. 6. Структура поля звукового давления при полном внутреннем отражении для угла падения $\theta_1 = 74^\circ$:
 $a - a = 1/4$; $б - a = 1/2$; $в - a = 3/4$; $x_1 = x/\lambda$, $z_1 = z/\lambda$

Fig. 6. Structure of the sound pressure field at total internal reflection for the angle of incidence $\theta_1 = 74^\circ$: $a - a = 1/4$;
 $б - a = 1/2$; $в - a = 3/4$; $x_1 = x/\lambda$, $z_1 = z/\lambda$

по горизонтальной координате. В придонном слое уровень звукового давления экспоненциально растет вплоть до горизонта полного внутреннего отражения и убывает ниже горизонта полного внутреннего отражения. Разрывность решения по звуковому давлению и нормальной компоненте вектора колебательной скорости на горизонте полного внутреннего отражения порождает вихревую составляющую вектора интенсивности H_y и, соответственно, модуляцию поля звукового давления, которая хорошо видна на рисунках.

При угле падения (угле квази-Брюстера), отвечающем условию $\text{Re}V = 0$, и при равенстве амплитудных коэффициентов регулярной и обобщенной составляющих ($a = b$) отраженная волна отсутствует. Эта ситуация реализуется при угле падения $\theta_1 = 74^\circ$, а отсутствие отраженной волны можно трактовать как полное согласование двух полупространств по входному импедансу, приведенному к границе раздела. Однако рассмотренный случай ($\rho_2 c_2 > \rho_1 c_1$, $c_2 > c_1$) отличается тем, что традиционное для угла Брюстера условие:

$$\frac{\rho_1 c_1}{\cos \theta_1} = \frac{\rho_2 c_2}{\cos \theta_2} \quad (9)$$

не может быть выполнено при выбранных параметрах сопряженных сред, типичных для шельфовой зоны, при каком-либо угле падения. Иначе говоря, в реализации условий полного согласования двух полупространств ($\text{Re}V = 0$, $a = b$) ключевую роль играет именно несамосопряженная модельная постановка. Присутствие в суммарном решении двух сопряженных составляющих, регулярной и обобщенной, формирует придонный слой, ограниченный снизу горизонтом полного внутреннего отражения, который выполняет роль согласующего слоя. Именно придонный слой, в котором происходит трансформация потенциальной составляющей вектора интенсивности в вихревую составляющую, согласует реактивный входной импеданс нижнего полупространства $\rho_2 c_2 / \cos \theta_2$ и активный входной импеданс верхнего полупространства $\rho_1 c_1 / \cos \theta_1$.

Еще одна особенность обобщенного решения, построенного в несамосопряженной модельной постановке, заключается в том, что в нем реализуется условие равенства нулю коэффициента отражения при комплексном угле падения ($\theta = \theta_{\text{бр}}$). Этот случай возможен при выполнении условия равенства нулю реактивного входного импеданса двух полупространств, приведенного к границе раздела ($\alpha_1 = \rho_{12}\alpha_2$), где $\alpha_1 = (\xi^2 - k_1^2)^{1/2}$. Само условие является полным аналогом условия (5), определяющим угол Брюстера $\theta = \theta_{\text{бр}}$, но в области комплексных углов падения. Скорость распространения звуковой волны, соответствующей этому условию, описывается выражением:

$$c_0 = c_1 \sqrt{\frac{1 - \rho_{12}^2}{1 - \rho_{12}^2 c_2^2}}, \quad c_0 < c_1, \quad c_0 < c_2, \quad k_0 = \frac{\omega}{c_0},$$

$$\theta_{\text{аб}} = \frac{\pi}{2} + i\delta, \quad \delta = \arctan\left(\frac{c_1}{c_0}\right). \quad (10)$$

Волна, реализующая поперечный резонанс, является неоднородной волной в обоих сопряженных полупространствах, а ее амплитуда экспоненциально растет в одном из полупространств, верхнем или нижнем. В работах [2, 5] показано, что такая волна (волна Брюстера) может быть физически реализована, но только в составе гибридных волн, локализованных на горизонтах трансформации, возбуждаемых комплексным угловым спектром источника. Обобщенное описание самого модельного источника, предполагающее активацию его комплексного углового спектра, дано в работе [6].

4. Отражение сферической волны на границе раздела двух жидких полупространств

При построении обобщенного решения этой более сложной граничной задачи в несамосопряженной модельной постановке необходимо учесть появление в поле отраженных и преломленных волн обобщенных составляющих, которые поясняются рис. 7. Появление обобщенных составляющих, связанных с отражением обратных волн отдачи от границы раздела и от оси симметрии, играющей роль жесткой границы, приводит к нарушению однозначности определения коэффициента отражения $V = V_{\text{пл}}$ на границе раздела двух сред и необходимости его обобщения. Схема обобщения подразумевает разбиение падающей сферической волны на две составляющие, регулярную и обобщенную, которые при отражении приобретают разность фаз, как это показано на рис. 7, а. В соответствии с рисунком, можно получить следующие оценки фазовых задержек и формулу обобщения коэффициента отражения во всей области углов падения.

$$\Delta\psi_1 = k_1\Delta r_1 = k_1(AC - AE), \quad \Delta\psi_2 = k_2\Delta r_2 = k_2(AD + DB),$$

$$\Delta\psi_1 = \Delta\psi_2 = \Delta\psi = 2k_1 z_0 \sin\theta_1 \tan\theta_1,$$

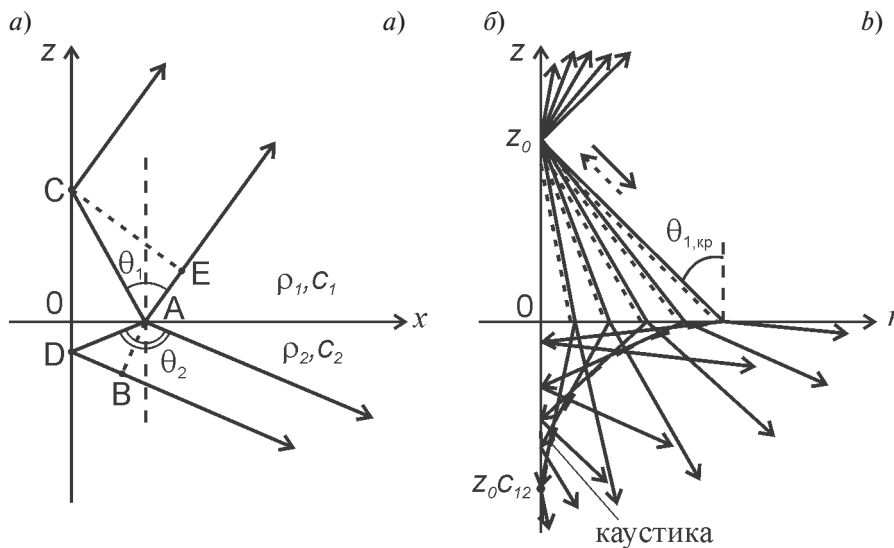


Рис. 7. Лучевая трактовка отражения сферической волны на границе раздела двух сред

Fig. 7. Ray interpretation of the reflection of a spherical wave at the interface between two media

$$V_{\text{сф}} = aV + bVe^{-i\Delta\psi}, \quad \theta_1 \leq \theta_{1,\text{кр}}, \quad (11)$$

$$V_{\text{сф}} = (a + be^{-i\Delta\psi})(aV + bV^*), \quad \theta_1 \geq \theta_{1,\text{кр}}, \quad (12)$$

$$a + b = 1.$$

Численный анализ коэффициента отражения сферической волны, определенного формулами (7), (8), поясняется ниже рис. 8. Зависимость модуля коэффициента отражения $V_{\text{сф}}$ от угла падения представлена на рис. 8 при различных значениях горизонта источника $z_{01} = z_0/\lambda_1$ и амплитуды регулярной составляющей в случае придонного источника. Интерференция двух составляющих в поле отраженных и преломленных волн, регулярной и обобщенной, приводит к интерференционной изменчивости модуля коэффициента отражения, однако максимальный уровень коэффициента отражения строго ограничен условием $|V_{\text{сф}}| \leq 1$.

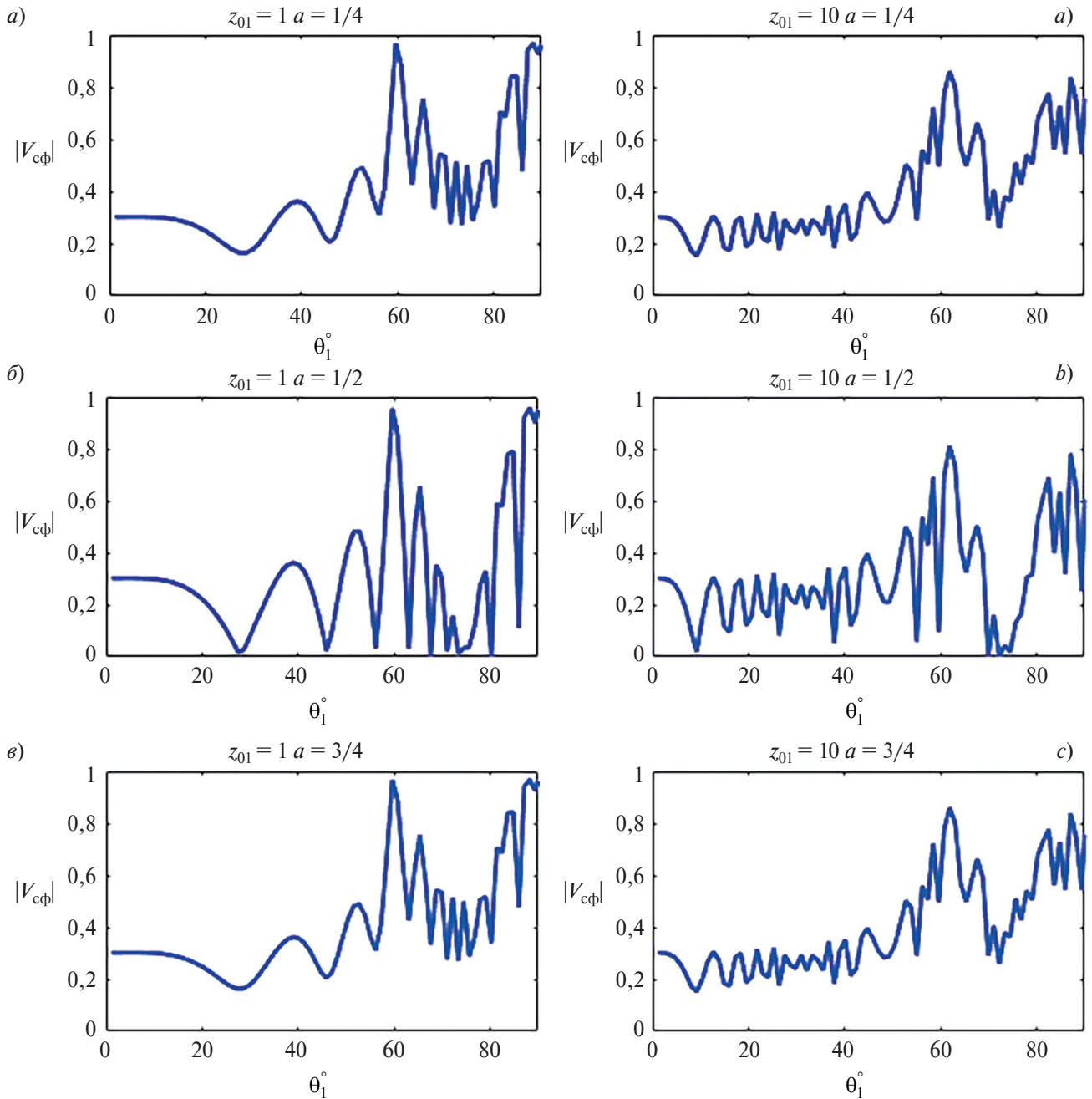


Рис. 8. Угловая зависимость модуля коэффициента отражения $V_{\text{сф}}$, $z_{01} = 1, 0; 10$

Fig. 8. Angular dependence of the modulus of the reflection coefficient $V_{\text{сф}}$, $z_{01} = 1, 0; 10$

Выполнение этого условия косвенно подтверждает корректность определения коэффициента отражения сферической волны во всем диапазоне углов падения, чего не удалось добиться в более ранних работах [2, 5]. Кроме того, экспериментальные данные, приведенные в работе [2], хорошо подтверждают существенную вариабельность модуля коэффициента отражения сферической волны. Полное обобщенное решение граничной задачи на отражение сферической волны на границе раздела двух жидких сред в несамосопряженной модельной постановке приведено в работе [5].

5. Экспериментальные оценки коэффициента отражения

Достаточно полный анализ работ, связанных с экспериментальной оценкой коэффициента отражения, выполнен в монографии [2]. Приведем наиболее характерные примеры этого анализа. На рис. 9, который взят из работы [7], приведены результаты измерения коэффициента отражения при нормальном падении, полученные в наиболее простых условиях выровненного морского дна. Существенный рост коэффициента отражения с понижением частоты можно объяснить влиянием сходящихся волн отдачи. С понижением частоты расширяется характеристика направленности любого источника, увеличивая его сходство с модельным точечным источником, увеличивается влияние сходящихся волн отдачи на величину коэффициента отражения. Можно также ожидать, что влияние сходящихся волн отдачи (некогерентного обратного отражения) существенно увеличивает интерференционную изменчивость суммарного уровня отраженных волн и коэффициента отражения соответственно, что качественно хорошо соответствует экспериментальным данным, приведенным на рис. 9.

Появление сходящихся волн отдачи в донном полупространстве проявляется в формировании каустики и фокального пятна на оси симметрии, как это поясняется рис. 7, б. Рис. 10, взятый из работы [8], поясняет эффект самофокусировки ненаправленного излучения в модельном эксперименте. На рисунке представлена импульсная характеристика широкополосного ненаправленного излучателя со средней рабочей частотой 80 кГц, снятая в бассейне, дно которого покрыто слоем песка толщиной 2 м. Приемный гидрофон был закопан в песчаный грунт на глубину 0,5 м, а излучатель, находящийся в воде на расстоянии 0,5 м от границы раздела, перемещался в горизонтальном направлении. Длительность излученного импульса не превышала нескольких периодов рабочей частоты. Хорошо видно, что при соосном расположении излучателя и приемного гидрофона длительность импульсного отклика возрастает в десятки раз, что служит наглядным подтверждением влияния сходящихся волн отдачи и эффекта самофокусировки ненаправленного излучения на длительность импульсного отклика. Само фокальное пятно служит вторичным (зеркальным)

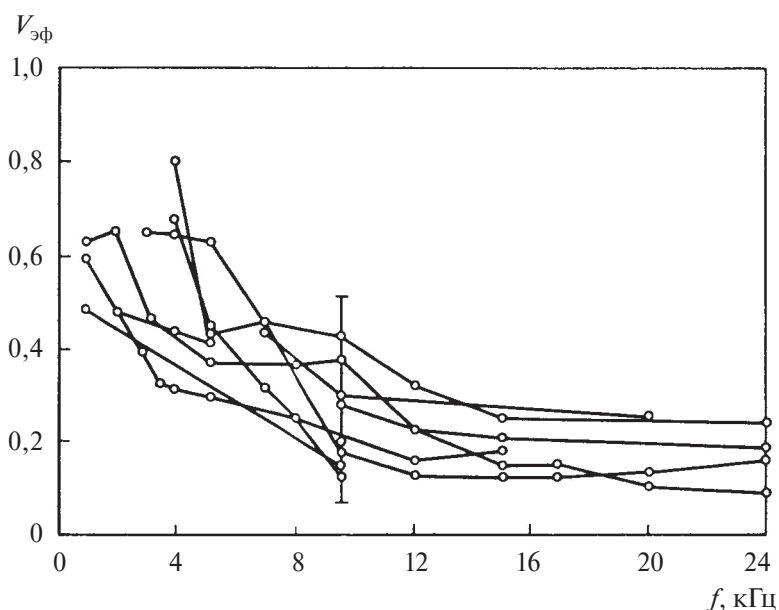


Рис. 9. Частотная зависимость эффективного коэффициента отражения при нормальном падении в районах с выровненным дном

Fig. 9. Frequency dependence of the effective reflection coefficient at normal incidence in areas with a flat bottom

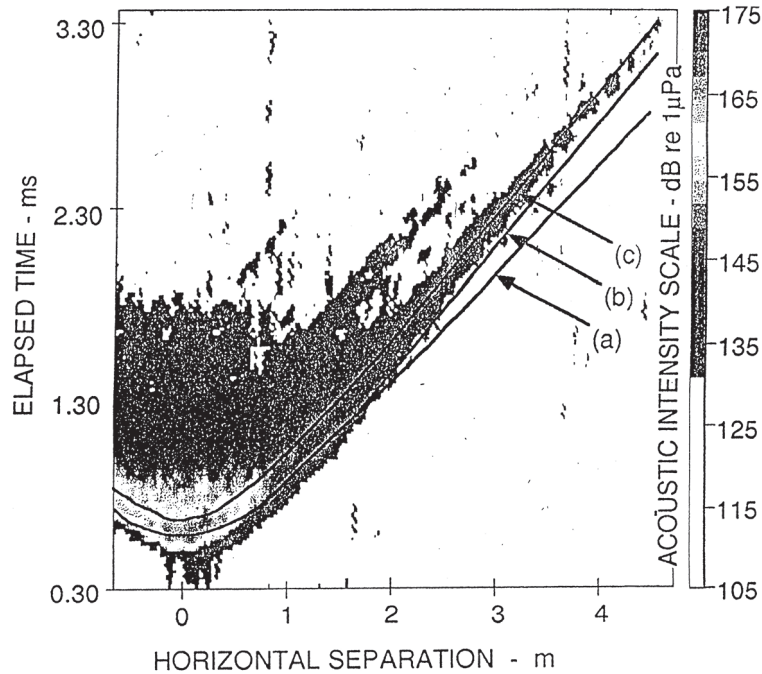


Рис. 10. Импульсная характеристика ненаправленного излучателя, снятая в бассейне с песчаным дном, частота 80 кГц

Fig. 10. Impulse response of an omnidirectional radiator taken in a pool with a sandy bottom, frequency 80 kHz

источником, излучение которого в обратном направлении также увеличивает уровень отраженной волны и коэффициент отражения, соответственно. Другие примеры проявления эффекта самофокусировки ненаправленного излучения в поле преломленных волн приведены в работе [9].

Оригинальные данные содержатся и в работе [10], в которой коэффициент отражения измерен в глубоководном каньоне с помощью установленного на дне излучателя и многоканальной буксируемой приемной антенны в широком диапазоне углов скольжения $10-80^\circ$, из которой и взят рис. 11. Методика измерений, основанная на использовании техники «spiking filters», также отличается высокой точностью и стабильностью условий эксперимента в рабочей полосе частот 120 Гц с центральной частотой 50 Гц. На рисунке хорошо видна интерференционная составляющая во всем диапазоне углов падения и характерный минимум коэффициента отражения для углов скольжения $12-15^\circ$ ($V \approx 0,4-0,5$). Данное автором работы объяснение существенного уменьшения коэффициента отражения в этом диапазоне углов изменением акустических параметров грунта и, соответственно, смещением критического угла полного внутреннего отражения на столь короткой трассе не является убедительным, т.к. горизонтальная изменчивость параметров морского дна в глубоком море достаточно мала. В то же время угловая зависимость коэффициента отражения, измеренная в этом эксперименте, хорошо соответствует модельным оценкам, приведенным на рис. 8.

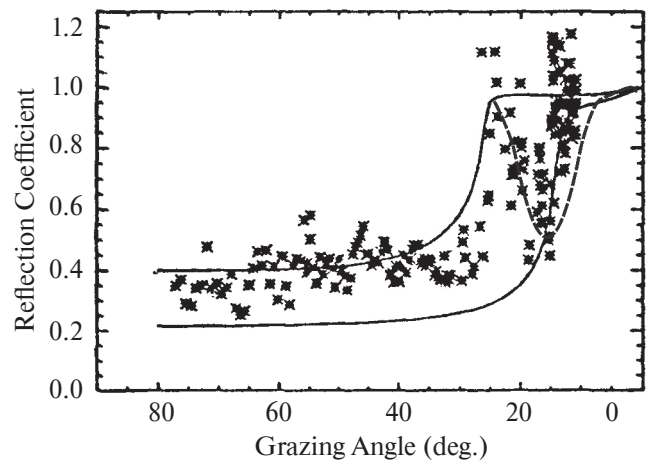


Рис. 11. Экспериментальные зависимости коэффициента отражения от угла скольжения: крестики — экспериментальные значения, сплошная линия — теоретические значения, пунктирная линия — обобщенная теория

Fig. 11. Experimental dependences of the reflection coefficient on the glancing angle: crosses — experimental values, solid line — theoretical values, dotted line — generalized theory

6. Выводы

Результаты разработки несамосопряженной модельной постановки для рассмотренных граничных задач акустики можно сформулировать в виде ряда положений.

1. В основе несамосопряженной модельной постановки лежит гипотеза о возможной трансформации расходящейся неоднородной волны в сходящуюся волну отдачи с одновременным изменением знака вертикального волнового числа, которая имеет место на горизонтах трансформации, подлежащих определению в каждом конкретном случае.

2. Полнота решения граничной задачи в несамосопряженной модельной постановке обеспечивается включением в суммарное решение собственных функций двух сопряженных операторов с возможным образованием гибридных волн, стоячих волн и вихревых структур в поле вектора интенсивности.

3. Корректность обобщенного решения граничной задачи, построенного в несамосопряженной модельной постановке, разрывного и по давлению, и нормальной компоненте вектора колебательной скорости на горизонтах трансформации, обеспечивается равенством нулю потока мощности через горизонт трансформации и, как следствие, отсутствием новых источников энергии, не указанных при формулировке граничной задачи.

4. Полное внутреннее отражение в терминологии, введенной Ньютоном, не является таковым во всем диапазоне углов падения, включая углы падения, большие критического значения. Физическим механизмом, реализующим неполное отражение в этом диапазоне углов падения, является механизм трансформации вертикальной компоненты потенциального вектора интенсивности в вихревую составляющую вектора интенсивности.

5. Наибольшие различия модельных решений, соответствующих самосопряженной и несамосопряженной модельным постановкам, характерны для граничной задачи Пекериса, как это показано в работе [11]. Поскольку задача Пекериса имеет фундаментальное значение в теоретической и прикладной гидрофизике, то более подробно вопросы этих различий авторы обсудят в следующей публикации.

Финансирование

Работа выполнена в ИПМТ ДВО РАН в рамках государственного задания по теме № 121030400088-1, а также в ДВФУ, в рамках государственного задания Минобрнауки России в сфере научной деятельности по проекту № FZNS-2023-0008

Funding

The work was carried out in IPMT FEB RAS within the framework of the state assignment on the theme № 121030400088-1, and also in FEFU, within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of Russia in the sphere of scientific activity under the project № FZNS-2023-0008

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
2. Касаткин Б.А., Злобина Н.В. Корректная постановка граничных задач в акустике слоистых сред. М.: Наука, 2009. 496 с.
3. Журавлев В.А., Кобозев И.К., Кравцов Ю.А. Поток энергии в окрестности дислокаций фазового фронта // ЖЭТФ. 1993. Т. 104, № 5(11). С. 3769–3783.
4. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. С. 92–120.
5. Касаткин Б.А., Злобина Н.В., Касаткин С.Б. Модельные задачи в акустике слоистых сред. Владивосток: Дальнаука, 2012. 254 с.
6. Касаткин Б.А., Злобина Н.В., Касаткин С.Б., Злобин Д.В., Косарев Г.В. Акустика мелкого моря в скалярно-векторном описании: теория и эксперимент. Владивосток: ИПМТ ДВО РАН, 2019. 360 с.
7. Воловов В.И. Отражение звука от дна океана. М.: Наука, 1993. 270 с.
8. Chotiros N.P. High frequency acoustic bottom penetration: Theory and experiment // Proceeding of Ocean's-89. 1989. Vol. 3. P. 1158–1162.
9. Касаткин Б.А., Злобина Н.В. Эффект самофокусировки ненаправленного излучения в слоистых средах. // Доклады академии наук. 2010. Т. 432, № 5. С. 681–684.
10. Heard G.J. Bottom reflection coefficient measurement and geoacoustic inversion at the continental margin near Vancouver Island with the aid of spiking filters // Journal of the Acoustical Society of America. 1997. Vol. 101, № 4. P. 1953–1960. doi:10.1121/1.418226

11. Касаткин Б.А., Касаткин С.Б. Скалярно-векторная структура и кинематические характеристики звукового поля в инфразвуковом диапазоне частот // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2021. Т. 14, № 3. С. 71–85. doi:10.7868/S2073667321030072

References

1. Vladimirov V.S. Equations of mathematical physics. Moscow, Nauka, 1981. 512 p.
2. Kasatkin B.A., Zlobina N.V. Correct formulation of boundary value problems in acoustics of layered media. Moscow, Nauka, 2009. 496 p.
3. Zhuravlev V.A., Kobozev I.K., Kravtsov Yu.A. Detecting dislocations by measuring the energy flux of an acoustic field. JETP. 1993, 77(5), 808–814.
4. Brekhovskikh L.M. Waves in layered media. M., Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR. 1957, 92–120.
5. Kasatkin B.A., Zlobina N.V., Kasatkin S.B. Model problems in acoustics of layered media. Vladivostok, Dalnauka, 2012. 254 p. (in Russian)
6. Kasatkin B.A., Zlobina N.V., Kasatkin S.B., Zlobin D.V., Kosarev G.V. Shallow Sea acoustics in scalar-vector description: theory and experiment. Vladivostok, IPMT FEB RAN, 2019. 360 p. (in Russian).
7. Volovov V.I. Reflection of sound from the ocean floor. M., Nauka, 1993. 270 p. (in Russian).
8. Chotiros N.P. High frequency acoustic bottom penetration: Theory and experiment. Proceeding of Ocean's-89. 1989, 3, 1158–1162.
9. Kasatkin B.A., Zlobina N.V. The self-focusing effect of nondirected acoustic emission in layered media. Doklady Earth Sciences. 2010, 432, 804–807. doi:10.1134/S1028334X10060206
10. Heard G.J. Bottom reflection coefficient measurement and geoacoustic inversion at the continental margin near Vancouver Island with the aid of spiking filters. Journal of the Acoustical Society of America. 1997, 101(4), 1953–1960. doi:10.1121/1.418226
11. Kasatkin B.A., Kasatkin S.B. Scalar-vector structure and kinematic characteristics of the sound field in the infrasonic frequency range. Fundamental and Applied Hydrophysics. 2021, 14(3), 71–85. doi:10.7868/S2073667321030072 (in Russian).

Об авторах

КАСАТКИН Борис Анатольевич, РИНЦ Author ID: 137298, ORCID ID: 0000-0001-7392-3672,
Scopus Author ID: 36879612400, kasatkas@marine.febras.ru

ЗЛОБИНА Надежда Владимировна, РИНЦ Author ID: 137297, ORCID ID: 0000-0003-3314-2163,
Scopus Author ID: 6701633705, zlobina@marine.febras.ru

КАСАТКИН Сергей Борисович, РИНЦ Author ID: 137360, ORCID ID: 0000-0002-0945-8355,
Scopus Author ID: 7004480199, kasatkas@marine.febras.ru

СТАЦЕНКО Любовь Григорьевна, РИНЦ Author ID: 442752, ORCID: 0000-0001-7498-9534,
Scopus Author ID: 6507661729 РИНЦ Author ID: 442752, statsenko.lg@dvfu.ru