

УДК 556.556:551.511.6

© С. Р. Богданов, Н. И. Пальшин, Р. Э. Здорovenнов, А. В. Митрохов, П. С. Кузнецов,  
Ю. С. Новикова, Г. Э. Здорovenнова\*, 2023

Институт водных проблем Севера Карельского научного центра РАН, 185030, Россия, Республика Карелия,  
г. Петрозаводск, пр. Александра Невского, 50.

\*zdrovennova@gmail.com

## ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ НЕБОЛЬШОГО ДИМИКТИЧЕСКОГО ОЗЕРА ПРИ ПОВЕРХНОСТНОМ ВЫХОЛАЖИВАНИИ

Статья поступила в редакцию 05.02.2023, после доработки 06.06.2023, принята в печать 26.06.2023

### Аннотация

Представлены результаты изучения перемешивания водной массы небольшого лесного димиктического озера на этапе летнего нагревания. Ветровое воздействие ограничено малой площадью зеркала (80–110 на 400 м) и залесенностью берегов, поэтому летом превалирует конвективный механизм перемешивания при охлаждении поверхности озера в ночные часы. Оценка эффективности перемешивания  $\eta$  осуществлялась интегральным энергетическим методом, на основе вычислений потока плавучести и изменения базовой потенциальной энергии по трансформации температурного профиля. Для этой цели использовалась температурная коса с 13 высокочувствительными датчиками; измерения проводились в середине лета 2022 г. в течение 35 дней с дискретностью в одну минуту. По данным акустических профилографов рассчитана скорость диссипации энергии, что позволило произвести альтернативную оценку эффективности перемешивания. Для величины  $\eta$  получена оценка  $\sim 0,4$ , которая существенно превышает «каноническое» значение 0,17 для случая ветрового перемешивания.

**Ключевые слова:** небольшое димиктическое озеро, температура воды, поток плавучести, скорость диссипации энергии, доступная потенциальная энергия, эффективность перемешивания

© S. R. Bogdanov, N. I. Palshin, R. E. Zdrovennov, A. V. Mitrokhov, P. S. Kuznetsov, J. S. Novikova,  
G. E. Zdrovennova, 2023

Northern Water Problems Institute of the Karelian Research Centre of RAS, 185030, Aleksander Nevsky st., 50  
Petrozavodsk, Republic of Karelia, Russia

\*zdrovennova@gmail.com

## ESTIMATION OF MIXING EFFICIENCY OF A SMALL DIMICTIC LAKE DUE TO SURFACE COOLING

Received 05.02.2023, Revised 06.06.2023, Accepted 26.06.2023

### Abstract

The paper presents the results of studying the mixing of the water mass of a small forest dimictic lake at the stage of summer heating. The wind effect is limited by the small area of the mirror (the size of the lake is 80–110 by 400 m) and the forested shores, so in summer the convective mixing mechanism prevails when the lake surface cools at night. Evaluation of the mixing efficiency  $\eta$  was carried out by the integral energy method, based on the calculations of energy pumping and changes in the background potential energy according to the temperature profile transformation. For this purpose, a chain with 13 highly sensitive temperature sensors was used; the measurements were carried out in the middle of summer 2022 for 35 days with a time interval of one minute. Acoustic current profiler's data were used to estimate turbulent velocity fluctuations and calculate the energy dissipation rate, which made it possible to make an alternative assessment of the mixing efficiency. The value of  $\eta \sim 0,4$  was obtained, which significantly exceeds the "canonical" value of 0,17 for the case of wind mixing.

**Keywords:** a small dimictic lake, water temperature, buoyancy flux, energy dissipation rate, available potential energy, mixing efficiency

Ссылка для цитирования: Богданов С.Р., Пальшин Н.И., Здорovenнов Р.Э., Митрохов А.В., Кузнецов П.С., Новикова Ю.С., Здорovenнова Г.Э. Оценка эффективности перемешивания небольшого димиктического озера при поверхностном выхолаживании // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2023. Т. 16, № 2. С. 73–88.  
doi:10.59887/2073-6673.2023.16(2)-6

For citation: Bogdanov S.R., Palshin N.I., Zdrovennov R.E., Mitrokhov A.V., Kuznetsov P.S., Novikova J.S., Zdrovennova G.E. Estimation of Mixing Efficiency of a Small Dimictic Lake due to Surface Cooling. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2023, 16, 2, 73–88. doi:10.59887/2073-6673.2023.16(2)-6

## 1. Введение

Интерес к изучению механизмов и эффективности перемешивания природных вод сохраняется уже в течение нескольких десятилетий. Изучение закономерностей перестройки/сглаживания температурных и плотностных профилей, эволюции термоклина, перемешивания глубинных стратифицированных слоев имеет большое значение для исследований функционирования биоты, газового режима, а также для изучения отклика режима перемешивания озер на наблюдаемые изменения климата. Также важен и фундаментальный аспект, связанный с изучением особенностей турбулентного тепло- и массообмена в температурно-стратифицированной среде.

В рамках количественного рассмотрения суть проблемы заключается в отыскании той части внешней накачки энергии, которая идет собственно на необратимое перемешивание водной толщи, в противовес вязкой диссипации. При этом под накачкой понимается такое внешнее воздействие, которое приводит к возникновению неустойчивости температурного (плотностного) профиля и последующей генерации кинетической энергии в водной толще. Возникновение турбулентности, в свою очередь, приводит к появлению локальных инверсий плотности и, в конечном счете, к сглаживанию температурных неоднородностей на молекулярном уровне. При этом с физической точки зрения следует подчеркнуть два момента. Первый — собственно перемешивание (в англоязычной литературе этот процесс называется *mixing*); выравнивание температуры (плотности) происходит за счет молекулярной теплопроводности. Такое перемешивание само по себе происходит крайне медленно. Процесс ускоряется за счет внешних воздействий, которые приводят к возникновению гравитационной неустойчивости и механическому перемещению слоев жидкости (*stirring*).

Второй аспект касается количественных оценок «энергии перемешивания». Для верхней оценки характерных удельных мощностей, описывающих собственно перемешивание, обычно используются значения  $10^{-7}$ – $10^{-6}$  Вт/кг [1], которые на несколько порядков меньше, чем характерные значения, описывающие теплообмен водной толщи с атмосферой. Так, в период открытой воды, при мощности падающего коротковолнового излучения  $\sim 500$  Вт/м<sup>2</sup> для озера глубиной 10 м удельная мощность составляет  $\sim 0,05$  Вт/кг. В абсолютном выражении, таким образом, изменение энергии, связанное с перестройкой профилей температуры и плотности в процессе молекулярного перемешивания, весьма мало. В качестве иллюстрации на рис. 1 приведена последовательность идеализированных профилей плотности, соответствующих разной степени перемешивания водного столба. Изменения потенциальной энергии (в расчете на квадратный метр поверхности) при последовательных переходах из состояния I в состояния II, III и IV составляют соответственно  $gH^2(\rho_1 - \rho_0)/24$ ,  $gH^2(\rho_1 - \rho_0)/48$  и  $gH^2(\rho_1 - \rho_0)/16$ . Типичная для лета разность плотностей у поверхности и дна больших бореальных озер составляет  $\sim (1-3)$  кг/м<sup>3</sup>, так что «энергозатратность» указанных переходов составляет лишь единицы Дж на квадратный метр, или  $\sim 10^{-3}$  Дж/кг. Столь малые изменения энергии затрудняют количественное описание процессов перемешивания и проведение адекватных оценок.

Подходы и понятийный аппарат, используемые при изучении перемешивания, можно разделять по нескольким признакам [2], например, энергетический и динамический, локальный и интегральный. В рамках динамического подхода центральное понятие, используемое для количественного описания перемешивания — коэффициент турбулентной диффузии  $K$ , связывающий поток плавучести  $B = -\langle b'w' \rangle$  (где  $b' = -g\rho'/\rho_0$ ,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\rho_0$  — плотность пресной воды при температуре 3,98 °С,

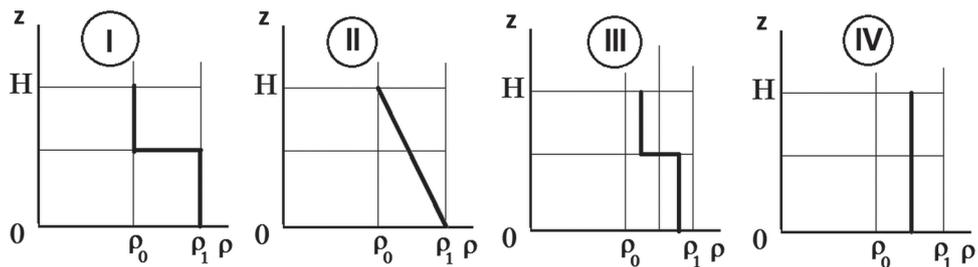


Рис. 1. Последовательность идеализированных профилей плотности, представляющих термоклин (I, III), линейную стратификацию (II) и полное перемешивание (IV)

Fig. 1. Sequence of idealized density profiles representing thermocline (I, III), linear stratification (II), and complete mixing (IV)

$\rho'$  — отклонение плотности от равновесного профиля  $\langle \rho \rangle(z)$  при возмущениях устойчивой стратификации,  $w'$  — пульсационная вертикальная скорость с градиентом температуры через представление:  $B = K \partial \langle b(z) \rangle / \partial z \equiv KN^2$  (здесь  $\langle b(z) \rangle = -g \langle \rho(z) \rangle / \rho_0$ ,  $N$  — частота Брента-Вайсяля,  $z$  — глубина) [3].

В рамках альтернативного (энергетического) подхода в качестве основных параметров используются поток плавучести  $B$  и скорость диссипации кинетической энергии турбулентности  $\varepsilon$ , при этом в качестве количественной меры эффективности перемешивания (mixing efficiency)  $\eta$  используется потоковое число Ричардсона  $Ri_f = B/(B + \varepsilon)$  [3, 4]. Смежный энергетический параметр — коэффициент смешения  $\Gamma = B/\varepsilon$  — позволяет представить величину  $K$  в более удобном для оценок виде:  $K = \Gamma \varepsilon / N^2$  [5]. В случае механического перемешивания при условии стационарности процесса величина  $Ri_f$  представляет собой отношение потока плавучести к внешней накачке. При этом до недавнего времени предполагалось, что значение  $Ri_f$  универсально и составляет 0,17 [6], что соответствует значению 0,2 для коэффициента смешения  $\Gamma$ . В дальнейшем, однако, было показано, что эти значения  $Ri_f$  и  $\Gamma$  не универсальны и зависят, например, от значения модифицированного числа Рейнольдса (“buoyancy Reynolds number” [7])  $Re_b = \frac{\varepsilon}{\nu N^2}$  ( $\nu$  — кинематическая вязкость).

Поток плавучести  $B$  остается одним из центральных понятий энергетического подхода, однако его использование при расчетах неудобно тем, что величина  $B$  описывает и обратимые, и необратимые взаимопревращения потенциальной и кинетической энергий. В этой связи в рамках энергетического подхода вместо  $B$  все чаще используют, по аналогии со скоростью диссипации  $\varepsilon$  кинетической энергии, удельную мощность  $\varepsilon_p = k \langle (\nabla b)^2 \rangle$  ( $k$  — коэффициент молекулярной теплопроводности) диссипации потенциальной энергии [3, 8]. Соответственно, изменяется определение коэффициента смешения  $\Gamma$  и эффективности перемешивания, например:  $\eta = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_p + \varepsilon}$ .

Рассмотренные выше подходы оперируют с локальными величинами. При изучении перемешивания природных вод параллельно развивались и интегральные подходы, методология которых основана на использовании интегральных энергетических параметров. Одним из таких параметров является критерий устойчивости Шмидта  $St$  (Дж/м<sup>2</sup>), представляющий собой работу, необходимую для полного перемешивания стратифицированного водного столба единичной площади [9]. Смежная безразмерная величина — Lake Number  $L_N$  — используется при изучении ветрового перемешивания [10]. В последнее время интегральные подходы получают все большее распространение. Помимо чисто технических здесь есть и физические основания: даже пространственно локализованные процессы перемешивания вызывают перестройку температурного поля во всем объеме жидкости [11, 12], включая области, удаленные от зоны смешения. Соответственно, при изучении перемешивания природных вод необходимо рассматривать перемешанные и стратифицированные слои водной толщи как единую энергетическую систему и учитывать их взаимовлияние.

В рамках этих подходов разработан понятийный аппарат, позволивший углубить представления о механизме перемешивания и создать эффективные алгоритмы его оценок. Центральными здесь являются понятия доступной  $E_a$  (Available Potential Energy, APE) и базовой  $E_b$  (Background Potential Energy, BPE) потенциальных энергий [11, 13]. При этом APE представляет ту часть потенциальной энергии, которая может быть конвертирована в энергию кинетическую. В свою очередь величина BPE представляет собой потенциальную энергию, которой бы обладал столб жидкости после «виртуального» адиабатного перераспределения его слоев к состоянию с равновесным устойчивым профилем. Как показано в цитируемых работах, приращение базовой потенциальной энергии на единицу массы в единицу времени соответствует потоку энергии  $\varepsilon_p$  и служит наиболее фундаментальной и адекватной мерой той части необратимо конвертируемой энергии, которая связана собственно с перемешиванием [2]. Важно отметить, что величина  $E_b$  может быть рассчитана непосредственно по опытным данным.

В данной работе для изучения перемешивания используется именно интегральный энергетический подход, при этом оценка эффективности перемешивания осуществляется по формуле

$$\eta = \Delta E_b / \Delta E. \quad (1)$$

Здесь  $\Delta E = \Delta E_b + \Delta E_i$  — «накачка», количество энергии, поступившей в систему за некоторый промежуток времени («эпизод перемешивания» в дальнейшем),  $\Delta E_i = \int \varepsilon dt$  и  $\Delta E_b$  — соответствующие изменения внутренней энергии (за счет вязкой диссипации кинетической энергии  $E_k$ ) и BPE.

Следует отметить, что в случае конвективного механизма перемешивания вклад в изменение  $E_b$  вносят не только собственно перемешивание, но также изменения средней температуры и плотности, обусловленные тепловым воздействием. При этом вычисление эффективности по формуле (1) осуществляется только с учетом первого из этих вкладов. В этой связи в дальнейшем обозначение  $E_b$  используется именно для той части потенциальной энергии, которая связана с неоднородностью профиля плотности. Подробнее оба вклада рассмотрены в разделе 3.2.

Существенным обстоятельством, усложняющим решение задач перемешивания природных вод, является тот факт, что на разных этапах годового термического цикла преобладают различные механизмы энергетической накачки. В период открытой воды эти механизмы в основном представлены ветро-волновым воздействием, поверхностным выхолаживанием, динамикой внутренних волн. В период ледостава наиболее эффективно водная толща перемешивается при развитии радиационно-генерированной конвекции, когда движущей силой перемешивания является неоднородное по вертикали нагревание столба воды [14]. При этом оценки эффективности перемешивания, полученные при изучении разных механизмов, существенно разнятся (иногда на порядок и более [15]). Кроме того, даже вычленение эпизодов перемешивания, в течение которых преобладает лишь какой-то один механизм, представляет собой непростую задачу.

В данной работе представлены результаты изучения перемешивания в небольшом лесном димиктическом озере на этапе летнего нагревания. Выбранное в качестве объекта исследования озеро слабо подвержено ветровому воздействию в связи с небольшой площадью поверхности (80–110 на 400 м) и залесенностью берегов. Основным механизмом перемешивания его водной толщи на этапе летнего нагревания можно считать конвективное перемешивание, развивающееся в результате потерь тепла с поверхности. Такие условия на этапе летнего нагревания чаще всего складываются в ночные часы. По результатам измерений температуры воды, солнечной радиации и течений осуществлен расчет потоков тепла через поверхность раздела вода-атмосфера, основных энергетических параметров и эффективности перемешивания.

## **2. Объект исследования и методы измерений**

На первом этапе планирования эксперимента основное внимание было уделено выбору объекта исследования, в котором было бы возможно выявить такие эпизоды, когда поверхностное выхолаживание можно рассматривать как практически единственный (или, во всяком случае, преобладающий) механизм перемешивания. В качестве такого объекта было выбрано небольшое лесное озеро — Голубая ламба, расположенное в южной части Карелии (62°15' с. ш., 33°15' в. д.). Ламбами в Карелии традиционно называют небольшие лесные бессточные озера площадью до 0,1 км<sup>2</sup>. Голубая ламба имеет вытянутую форму в плане, ее котловина длиной ~400 м и шириной 80–110 м ориентирована с юго-востока на северо-запад. Водное питание озера в основном осуществляется за счет атмосферных осадков, что определяет высокую прозрачность воды и очень низкую минерализацию ≤ 10 мг/л. При малой площади зеркала это озеро относительно глубокое (средняя и максимальная глубины 4,3 и 8 м). На этапе летнего нагревания озеро полностью не перемешивается, так как ветровое воздействие и горизонтальная адвекция тепла существенно ограничены малой длиной разгона ветра и его ослаблением у поверхности воды в результате влияния берегового склона и леса на прилегающей к озеру территории. Голубая ламба — типичный димиктический водоем с двумя периодами полного перемешивания весной после схода льда и осенью.

Измерения проводились в период с 30 июня по 3 августа 2022 г. Измерители скоростей и косы с датчиками температуры и радиации были прикреплены к плоту в центре озера. Для измерений температуры воды на глубинах 0,4, 0,9; 1,4, 1,9; 2,4, 2,9; 3,4, 3,9; 4,4, 4,9; 5,4, 5,9 и 6,4 м использовались высокочувствительные температурные датчики с логгерами RBR (Канада) с точностью 0,002 °С. По измерениям температуры рассчитывалась плотность воды по формуле Чена-Миллера [16] без учета минерализации, ввиду ее низких значений и малой изменчивости по водному столбу. Таким же датчиком на расстоянии 0,1 м над водой измеряли температуру воздуха. Потоки солнечной радиации измеряли на глубинах 0,1, 0,3, 0,7, 1,3, 2,1, 3,1 и 4,1 м с помощью датчиков фотосинтетической активной радиации (ФАР) «Alec Electronics» (Япония) с разрешением 1 мкмоль/(м<sup>2</sup> · с). Измерения скоростей течений проводились в слое 0,6–3,6 м с использованием двух акустических трехлучевых профилографов течений (Aquadopp Nortek Profiler HR, ADCP). Дискретность измерений температуры воды, потоков ФАР и скоростей течений составляла одну минуту.

## **3. Методы расчетов**

Оценки эффективности конвективного перемешивания при поверхностном выхолаживании проводились в рамках интегрального метода на основе расчета базовых энергетических параметров —  $BPE$  и  $\epsilon$ .

По экспериментальным данным об изменении температурного профиля при поверхностном охлаждении озера в ночные часы независимо рассчитывались скорость генерации кинетической энергии и изменение  $E_b$ . По данным ADCP была также осуществлена непосредственная альтернативная оценка  $\epsilon$ . Эффективность перемешивания  $\eta$  и коэффициент смешения  $\Gamma = \eta/(1-\eta)$  рассчитывались для выделенных «чистых» эпизодов ночного выхолаживания. При расчете всех энергетических параметров принимались во внимание специфические особенности, характерные для рассматриваемого механизма перемешивания, связанного с радиационной накачкой. Эти особенности последовательно представлены ниже.

### 3.1. Доступная потенциальная энергия и поток плавучести

Первая особенность заключалась в оценке энергии внешней накачки. С физической точки зрения эта накачка реализуется в виде потока доступной потенциальной энергии, обусловленного поверхностным охлаждением и, соответственно, увеличением плотности приповерхностного слоя [17]. Возникающий при этом неустойчивый профиль плотности приводит к возникновению движения и генерации кинетической энергии турбулентности (Turbulent Kinetic Energy,  $TKE$ )  $E_k$  в конвективно-перемешанном слое (КПС) толщиной  $h_{\text{КПС}}$ . Скорость  $J^{TKE}$  такой генерации определяется потоком плавучести  $B$ , который может быть рассчитан непосредственно, причем расчеты существенно упрощаются по сравнению со случаем подледной радиационно-генерированной конвекции, когда осуществляется неоднородный по объему прогрев водной толщи. Суть этого упрощения заключается в том, что при поверхностном выхолаживании поток плавучести изменяется в КПС практически линейно [17–19], так что его среднее значение в пределах перемешанного слоя составляет  $B_s/2$ , где  $B_s$  — поток плавучести на поверхности [Вт/кг]. В свою очередь, величина  $B_s$  выражается через плотность  $W$  (Вт/м<sup>2</sup>) поверхностного потока тепла:  $B_s = \alpha g W / (c\rho_0)$ . В результате для скорости генерации кинетической энергии,  $B_s\rho_0 h_{\text{КПС}} / 2$  (Вт) во всем КПС получаем соотношение:

$$J^{TKE} = \frac{\alpha g h_{\text{КПС}} W}{2c}. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения,  $c$  — удельная теплоемкость.

Пренебрегая адвекцией, а также потерями на генерацию внутренних волн, в рамках одномерной модели величину  $J^{TKE}$  можно приравнять скорости диссипации  $\epsilon$ , а при рассмотрении каждого отдельного эпизода перемешивания суммарную генерацию  $\int J^{TKE} dt$  кинетической энергии за соответствующий промежуток времени можно приравнять количеству диссипированной энергии  $\Delta E_i$  (строго говоря, это будет оценка сверху). Таким образом, величина  $\Delta E_i$  в расчетной формуле (1) для эффективности  $\eta$  может быть получена непосредственным интегрированием по времени соотношения (2).

Проблема, однако, заключается в том, что величина  $W$  включает вклады от длинноволнового излучения, конвекции, теплопроводности и латентного переноса тепла (см., например, [20]). Для оценки этих вкладов необходимы дополнительные данные о внешних параметрах, включая температуру и влажность воздуха, а также скорость ветра.

Расчет потока тепла на поверхности озера осуществлялся тремя способами: по модели FLake [21], в соответствии с подходом, приведенным в [22] и на основе изменений теплозапаса столба воды на станции измерений за определенные промежутки времени. При этом коротковолновая солнечная радиация на поверхности воды рассчитывалась по измерениям ФАР. Для оценки потоков длинноволновой радиации из воды в атмосферу и из атмосферы в воду, а также чувствительного и скрытого потоков тепла через поверхность воды использовались данные метеостанции Петрозаводск [23], удаленной от Голубой ламбы на юго-восток на 70 км. Эта метеостанция наиболее близко расположена к району исследований. Была обнаружена высокая корреляция между рядами наблюдений метеопараметров на этой метеостанции и данными метеонаблюдений на берегу озера Вендюрского (расстояние до Голубой ламбы менее трех км) в разные месяцы с апреля по ноябрь 1999–2021. Сравнение рядов многолетних измерений показало высокие значения коэффициентов корреляции: для температуры воздуха 0,97, для абсолютной влажности воздуха 0,96, для общей облачности 0,74, для скорости ветра 0,5, небольшая корреляция по скорости ветра обусловлена влиянием местных особенностей рельефа на этот параметр. Расчеты потоков тепла выполнялись с временным шагом в один час. Использование данных удаленной метеостанции может приводить к погрешности оценок потоков тепла через поверхность озера, а на оценки интегрального потока тепла, рассчитанного в соответствии с изменениями теплозапаса столба воды, могут оказывать влияние внутренние волны в нижнем стратифицированном слое и адвективный перенос. Между интегральными потоками тепла, полученными на основании изменений теплозапаса в столбе воды, и рассчитанными потоками тепла по моделям Flake

и в соответствии с подходом, изложенным в [22], установлены регрессионные зависимости с коэффициентами детерминации 0,77 (регрессионный коэффициент 0,88) и 0,82 (регрессионный коэффициент 1,00) соответственно. Сравнение этих данных позволило выделить периоды, когда перестройка температурного профиля в озере в ночные часы происходила, главным образом, в результате конвективного перемешивания при охлаждении поверхности воды, а влиянием внутренних волн в придонном стратифицированном слое и адвективным переносом тепла можно было пренебречь. Такие периоды были наиболее характерны для июля 2022 г.

### 3.2. Базовая потенциальная энергия

Вторая особенность расчетов связана с оценками базовой потенциальной энергии  $E_p$ . Для каждого момента времени осуществлялась сортировка реального профиля плотности путем адиабатного перераспределения слоев жидкости в порядке монотонного увеличения плотности с глубиной. Соответствующий устойчивый профиль обозначим за  $\rho(z, t)$ . При этом потенциальная энергия  $E_p$  в момент времени  $t$  будет определяться стандартной формулой:

$$E_p(t) = g \int_0^{H(t)} \rho(z, t) z dz. \quad (3)$$

Как уже отмечалось во введении, в случае конвективного механизма перемешивания изменение величины  $E_p$  происходит не только за счет перестройки профиля плотности, но также за счет общего охлаждения/нагрева толщи жидкости. В частности, в случае поверхностного выхолаживания происходит уменьшение средней температуры столба воды, увеличение средней плотности  $\bar{\rho}$  и уменьшение высоты  $H$  водного столба (уменьшение  $H$  со временем подчеркивается представлением верхнего предела интеграла в (3) в виде  $H(t)$ ).

На первый взгляд в абсолютных единицах изменения  $H$  могут показаться незначительными. Действительно, пренебрегая потоком тепла на границе вода-дно, изменение температуры столба воды за единицу времени можно оценить непосредственно из баланса энергии:  $\Delta T = W / (c\bar{\rho}H)$ . Соответственно, изменение средней плотности можно представить в виде:  $\Delta\bar{\rho} = \alpha\bar{\rho}\Delta T = \alpha W / (cH)$ . Для озера без внешних стоков в рамках одномерной модели (пренебрегаем адвекцией)  $\Delta\bar{\rho} / \bar{\rho} = -\Delta H / H$ , так что скорость изменения толщины можно представить в виде  $\Delta H = -\alpha W / (c\bar{\rho})$ . Согласно этой оценке, при интенсивности поверхностного выхолаживания  $W \sim 100$  Вт/м<sup>2</sup> уменьшение  $H$  за ночь составляет лишь  $10^{-5}$  м, то есть, сотые доли миллиметра; при этом относительные изменения средней плотности  $\bar{\rho}$  и толщины  $H$  составляют величину порядка  $10^{-6}$ .

Изменение  $\Delta E_{p0}$  потенциальной энергии за единицу времени, обусловленное общим охлаждением и уплотнением водного столба, можно оценить по формуле:

$$\Delta E_{p0} = mg\Delta H / 2 = \rho g H \Delta H / 2 = \frac{\alpha g H}{2c} W. \quad (4)$$

Таким образом, в абсолютном выражении прирост  $\Delta E_{p0}$  оказывается весьма малым: соотношение (4) включает множитель  $\alpha g H / c$ , характерное значение которого при температуре воды  $\sim 20$  °С составляет  $\sim 10^{-6}$ . С одной стороны, это означает, что работа сжатия составляет лишь миллионную часть внешнего потока энергии. В то же время сопоставление формул (2) и (4) свидетельствует о том, что изменение потенциальной энергии за счет изменения  $H$  сопоставимо с диссипированной в КПС энергией.

Таким образом, при изучении динамики  $E_p$  следует принимать во внимание изменение высоты столба воды: изменение потенциальной энергии обусловлено как собственно сглаживанием профиля плотности при перемешивании, так и расширением/сжатием жидкости в целом; при этом оба вклада сопоставимы. В свою очередь, при оценке эффективности перемешивания следует принимать во внимание только первый из этих вкладов. При этом возникает вопрос о способах разделения указанных вкладов, методах вычленения того из них, который обусловлен собственно перемешиванием.

В этой связи, возвращаясь к формуле (3), осуществим дифференцирование, учитывая зависимость верхнего предела интегрирования от времени. В результате получим следующее выражение для приращения  $\Delta E_p$ :

$$dE_p(t) / g = \int_0^{H(t)} d\rho(z, t) z dz + \rho(H, t) H dH. \quad (5)$$

В свою очередь, представляя плотность в виде  $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ , интегральное слагаемое можно представить в виде двух частей, связанных с изменением средней плотности и собственно процессом перемешивания (связанным с перестройкой профиля температуры и плотности, то есть, с величиной  $\rho'$ ):

$$\int_0^{H(t)} d\rho(z,t)zdz = \int_0^{H(t)} d\rho'(z,t)zdz + H^2 d\bar{\rho} / 2. \quad (6)$$

С учетом (6), а также соотношения  $d\bar{\rho} / \rho = -dH / H$ , окончательное выражение для приращения  $dE_p$  в линейном по малому параметру  $dH/H$  приближении принимает вид:

$$dE_p(t) = dE_b(t) + dE_{p0}(t) = g \int_0^{H(t)} d\rho'(z,t)zdz + g\bar{\rho} H dH / 2. \quad (7)$$

Формула (7) дает искомое представление потенциальной энергии в виде двух слагаемых, первое из которых связано с перестройкой профиля плотности при перемешивании, а второе обусловлено охлаждением водного столба в целом. При оценках второго — линейного по  $dH/H$  — слагаемого возникает техническая проблема: непосредственное измерение изменений  $H$  с требуемой точностью ( $\sim 10^{-6}$ ) практически невозможно. Эта проблема решается за счет использования высокочувствительных датчиков температуры. Высокая точность измерений температуры позволяет отследить соответствующие малые изменения средней плотности (и, соответственно, высоты водного столба). Так, при температуре воды  $\sim 20^\circ\text{C}$ , когда  $\alpha \sim 10^{-4}$ , используемые датчики позволяют регистрировать изменения плотности с точностью до  $d\bar{\rho} / \bar{\rho} = -\alpha dT \sim 10^{-7}$ . В этой связи при проведении конкретных расчетов второе слагаемое в формуле (5) представлялось в эквивалентном виде  $-gH^2 d\bar{\rho} / 2$ , и его оценка осуществлялась по рассчитанным изменениям средней плотности  $\bar{\rho}$ .

### 3.3. Скорость диссипации $\varepsilon$ кинетической энергии

Расчет  $\varepsilon$  осуществлялся по данным ADCP в рамках процедуры, подробно представленной в [24]; на основе анализа продольной корреляционной функции  $D_{LL}(r)$  скоростей в двух точках, разнесенных вдоль акустического луча на расстояние  $r$ . Излучатели двух использованных ADCP были расположены весьма близко друг к другу (43 см), анализ динамики компонент средней скорости, измеренных независимо каждым из приборов, показал приемлемость допущения о горизонтальной однородности. В этой связи при оценке  $\varepsilon$  для каждой глубины использовались усредненные по шести лучам значения. Практически для всего интервала измерений с 30 июня по 5 июля и в ночные и в дневные часы, по корреляционным функциям выявлялся достаточно протяженный (до декады и более масштабов  $r$ ) инерционный интервал с характерным Колмогоровским скейлингом («закон 2/3»:  $D_{LL} = C\varepsilon^2 / 3r^{2/3}$ ,  $C \approx 2,09$  — константа Колмогорова). Это позволило непосредственно оценить величину  $\varepsilon$ .

## 4. Результаты

### 4.1. Температура воды, потоки солнечной радиации и скорости течений

В период измерений дневные максимумы потока ФАР на глубинах 0,1, 2,1 и 4,1 м достигали 3000, 1000 и 500 мкмоль/м<sup>2</sup>, соответственно.

В дневные часы верхний слой озера прогревался с образованием слабой термической стратификации. Из-за достаточно высокой прозрачности воды значительная часть солнечной энергии расходовалась на нагревание нижележащего стратифицированного слоя воды. Так, например, 4 июля в стратифицированном слое глубже 2 м утилизировалось больше 53% солнечной радиации, а 16–17 июля на глубинах свыше 4 м поглощалось около 22% солнечной радиации.

С 30 июня по 3 августа 2022 г. в верхнем слое озера (до глубины 3,9 м) можно выделить три синоптических периода с повышением и понижением температуры воды; в этот же период в стратифицированном слое наблюдалось накопление тепла с почти монотонным по времени приростом температуры (рис. 2).

В результате потерь тепла в атмосферу в ночные часы температура воды верхнего слоя озера понижалась с формированием КПС (рис. 2–4). Поскольку в перемешанном слое отличие в показаниях температурных датчиков не превышало  $0,5^\circ\text{C}$ , то для определения нижней границы этого слоя был принят условный критерий — превышение разницы температуры между соседними датчиками более, чем на  $0,5^\circ\text{C}$ . Таким образом,

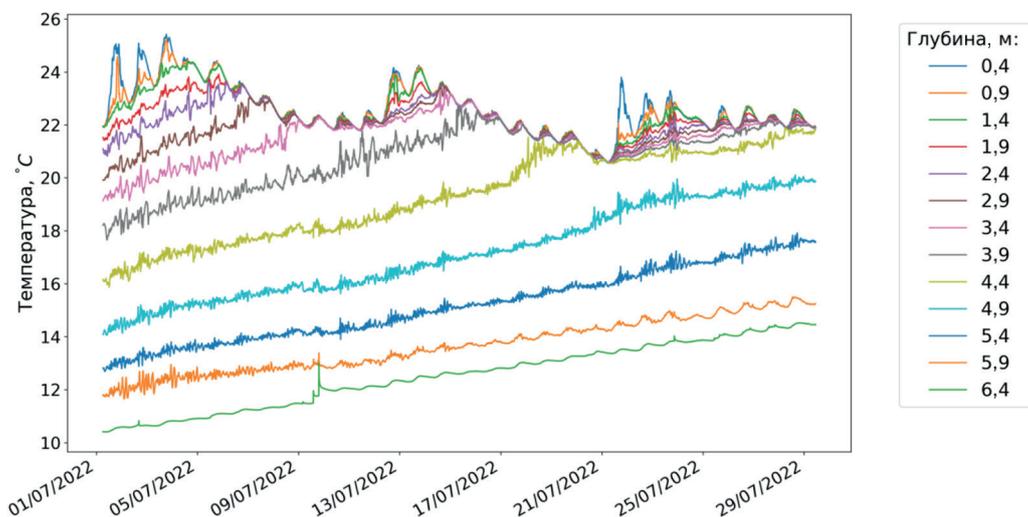


Рис. 2. Изменение температуры воды с 1 по 29 июля на разных глубинах, с шагом 0,5 м

Fig. 2. Water temperature change from 1 to 29 July at different depths, with a step of 0.5 m

глубина нижней границы КПС определялась по глубине температурного датчика, показания которого превышали показания нижележащего датчика более, чем на 0,5 °С. В среднем толщина КПС увеличивалась в течение периода наблюдений, но на фоне синоптических колебаний положение нижней границы этого слоя было достаточно изменчивым (рис. 3). Эволюцию КПС также наглядно иллюстрируют приведенные на рис. 4 семейства профилей температуры и плотности, рассчитанной по формуле Чена-Миллера [16].

Во всей водной толще озера постоянно наблюдались колебания температуры воды с суточным периодом (рис. 2, 3). В стратифицированном слое присутствовали также колебания температуры с периодами от нескольких минут до нескольких часов. Диапазон периодов колебаний внутренних волн в таком маленьком водоеме как Голубая ламба ограничен в высокочастотной области частотой Брента-Вяйсяля, а в низкочастотной области — главной продольной модой бароклинной сейши. В соответствии с рассчитанной частотой Брента-Вяйсяля периоды свободных колебаний в стратифицированном слое озера в июле 2022 г. должны были быть не меньше 1–2 мин. Резонансные усиления колебаний коротких внутренних волн могут

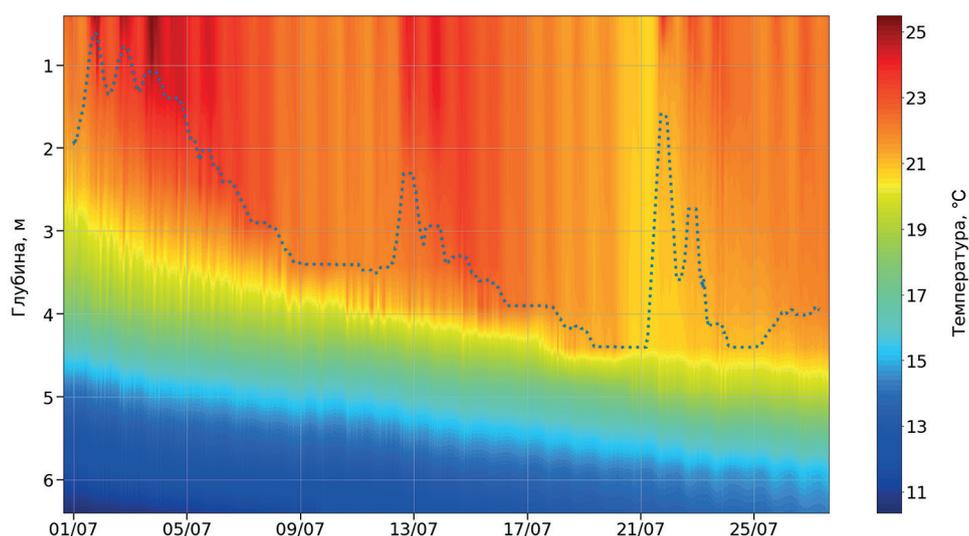
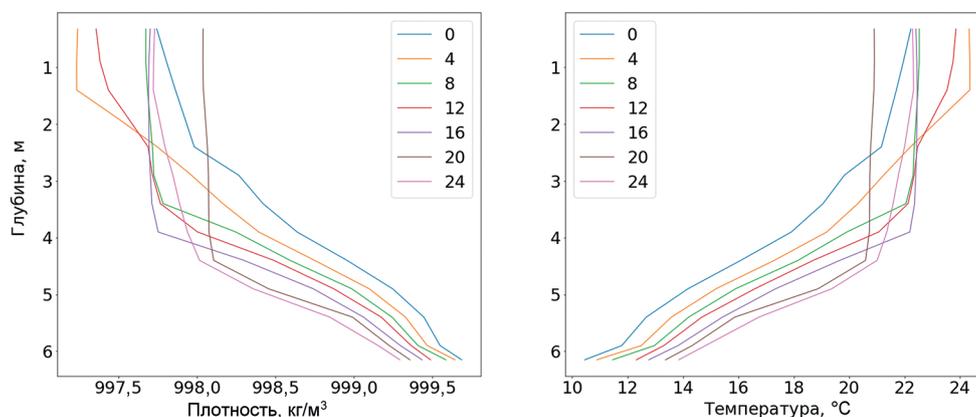


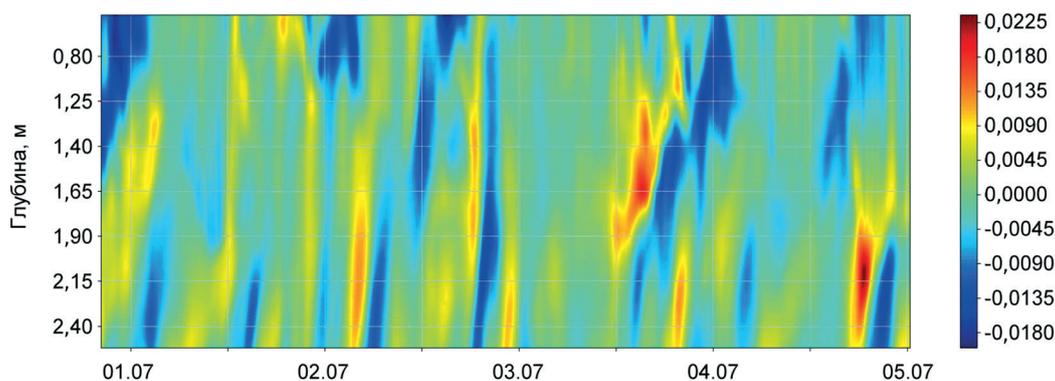
Рис. 3. Динамика температуры воды с 30 июня по 29 июля 2022 г. Пунктирная линия показывает примерное положение нижней границы перемешанного слоя

Fig. 3. Dynamics of water temperature from 30 June to 29 July 2022. The dotted line schematically represents the lower boundary of the mixed layer



**Рис. 4.** Эволюция вертикальных профилей плотности (левая панель) и температуры (правая панель) с 30 июня по 24 июля 2022. Цифры в легенде соответствуют номеру дня, отсчитываемому от 30 июня; дискретность представления профилей четыре дня

**Fig. 4.** Evolution of vertical profiles of density (left panel) and water temperature (right panel) from 30 June to 24 July 2022. The numbers in the legend correspond to the number of the day counted from 30 June 2022; discreteness of representation of profiles four days



**Рис. 5.** Горизонтальная компонента скорости течения (м/с) в период с 1 по 5 июля 2022 г.

**Fig. 5.** Horizontal current velocity component (m/s) from July 1 to July 5, 2022

возбуждаться в результате колебаний главной продольной моды баротропной сейши, оценки периода которой с учетом геометрических размеров озера составили около двух минут. В стратифицированном слое под КПС также возможны колебания с большими периодами до первой продольной моды бароклинной сейши. Ее оценки при глубине КПС около 4 м и разности температуры между верхним и нижним слоем до 7–8 °С составили 80–95 мин. Полученные оценки сейш не учитывают форму строения реальной озерной котловины, т. к. выполнены для прямоугольного бассейна с постоянной глубиной и двухслойной стратификацией. Однако такие оценки позволили подобрать периоды усреднения (~60 мин) температурных данных, чтобы учесть влияние внутренних волн и уменьшить разброс при расчетах базовой потенциальной энергии.

Скорости течений в поверхностном перемешанном слое Голубой ламбы, оцененные по измерениям ADCP, достигали нескольких мм/с. В качестве примера на рис. 5 приведено изменение одной из горизонтальных компонент скорости одного из приборов в слое 0,6–2,5 м в период с 1 по 5 июля 2022 г.

#### 4.2. Поток плавучести и базовая потенциальная энергия

Важным для оценки перемешивания при поверхностном выхолаживании является выделение периодов, когда перестройка температурного профиля в озере в ночные часы происходила, главным образом, в результате конвективного перемешивания при охлаждении поверхности воды, а влиянием внутренних волн в стратифицированном слое и адвективным переносом тепла можно было пренебречь.

Для этой цели была рассчитана средняя по столбу воды температура  $\bar{T}$ , и были выбраны такие ночные интервалы, когда  $\bar{T}$  монотонно уменьшалась. За весь период наблюдений указанный критерий выполнялся для большинства ночных интервалов, так что практически каждую июльскую ночь можно рассматривать как автономный эпизод перемешивания, и для каждого из этих эпизодов последовательно осуществить расчет основных энергетических параметров. При этом для оценки  $\eta$  по формуле (1) необходимо рассчитать динамику той части  $E_p$ , которая связана с собственно перемешиванием и перестройкой температурного профиля (первое слагаемое в (7)), а также накопленного потока плавучести  $\int J^{TKE} dt$  (с использованием формулы (2)).

В качестве примера на рис. 6 приведены результаты расчета удельных (на единицу массы столба) энергетических параметров для 3-дневного интервала (16–18 июля), включающего три последовательных эпизода ночного перемешивания.

Изменение потенциальной энергии представлено на графике двумя кривыми, описывающими приращение тех ее частей, которые связаны с перестройкой температурного профиля и охлаждением/нагреванием водного столба в целом. При этом приращение второй из этих частей, определяемое вторым слагаемым в соотношении (6), изменяется практически синхронно с температурой. В частности, эта часть потенциальной энергии уменьшается в ночное время, когда выхолаживание приводит к увеличению средней плотности и, соответственно, уменьшению высоты  $H$  столба. В то же время базовая потенциальная энергия  $E_b$ , которая служит индикатором перемешивания, во всех трех эпизодах ночного выхолаживания изменяется практически противофазно по отношению к средней температуре и демонстрирует ожидаемый монотонный рост. На графике представлен также накопленный поток плавучести  $\int J^{TKE} dt$ , позволяющий оценить диссипацию кинетической энергии для каждого эпизода перемешивания.

Для каждого эпизода перемешивания, эффективность  $\eta$  рассчитывалась по формуле (1) как отношение приращения  $BPE$  к величине внешней накачки за соответствующий промежуток времени. Для трех представленных на рис. 6 эпизодов величины  $\Gamma$  и  $\eta$  варьировались в пределах 0,59–0,65 и 0,37–0,39 соответственно. Результаты расчетов, проведенных для нескольких других эпизодов перемешивания, приведены в таблице. При этом следует также отметить, что для каждого из этих эпизодов коэффициент корреляции зависимостей  $BPE$  и диссипированной энергии (определяемой накопленным потоком плавучести) от времени был весьма высоким. Для наглядности на рис. 7 представлены изменения обеих этих величин, усредненных по 60-минутному интервалу, для всех рассмотренных эпизодов. Коэффициент детерминации, рассчитанный по всем шести эпизодам, представленным в таблице, составил 0,98.

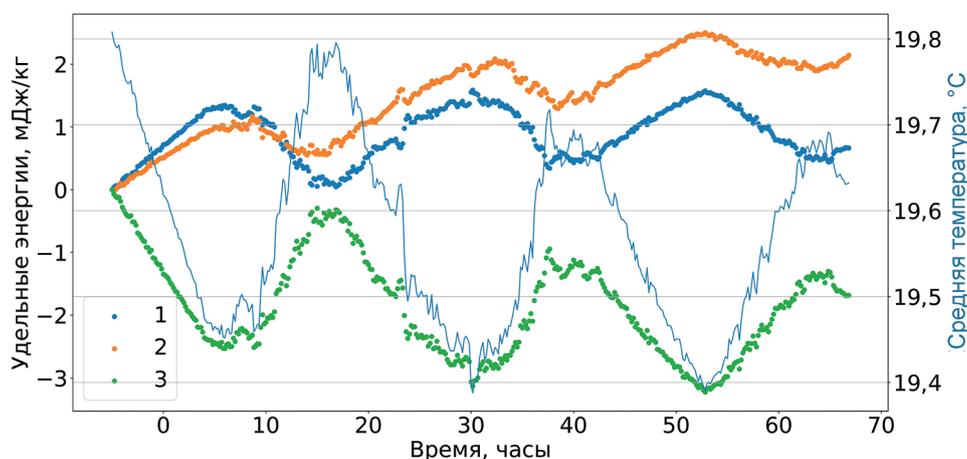


Рис. 6. Изменение средней по столбу температуры воды (тонкая синяя линия), а также динамика накопленного потока плавучести (1) и тех частей потенциальной энергии, которые связаны с перестройкой профиля плотности (2) и изменением средней по столбу температуры (3). Старт 19:00 16 июля 2022 г.

Fig. 6. Variation of the column-averaged water temperature (thin blue line), as well as the dynamics of a cumulative buoyancy flux (1) and those parts of the potential energy that are associated with the density profile rearrangement (2) and the variation of the column-average temperature (3). Start 19:00 July 16, 2022

Энергетика эпизодов перемешивания  
 Energetics of mixing episodes

Старт эпизода	Длительность эпизода (ч)	Поток плавучести (мДж/кг)	Прирост $E_b$ (мДж/кг)	$\Gamma$	$\eta$
19:00 9 июля	12	0,92	0,69	0,75	0,43
19:00 16 июля	12	1,70	1,10	0,65	0,39
19:00 17 июля	12	1,30	0,85	0,65	0,39
19:00 18 июля	12	1,70	1,00	0,59	0,37
19:00 27 июля	12	1,10	0,80	0,73	0,42
19:00 28 июля	12	1,20	0,90	0,75	0,43
19:00 29 июля	12	1,40	0,70	0,5	0,33

В целом по всем рассмотренным эпизодам получены оценки  $\eta$  от 0,33 до 0,43 и  $\Gamma =$  от 0,5 до 0,75, которые примерно в 2,5 раза превышают соответствующие «канонические» значения. При этом следует иметь в виду, что расчеты диссипации, как отмечалось в разделе 3.1, производились в формате «оценка сверху», соответственно, приведенные значения коэффициента  $\Gamma$  и эффективности  $\eta$  перемешивания следует трактовать как оценку снизу для этих величин. В этой связи полученный результат хорошо согласуется с «завышенными» оценками, которые были получены ранее при изучении конвекции, генерируемой гравитационной неустойчивостью [12, 25, 26]. Как следствие, можно сделать предварительный вывод об аномально высокой эффективности перемешивания для случая радиационной накачки по сравнению с ветровой, а также об универсальности значения  $\eta$  для разных типов (объемная и поверхностная) радиационной накачки. Для проверки и возможного уточнения этого вывода необходимо провести аналогичные оценки для озер других типов и осуществить статистическую обработку результатов.

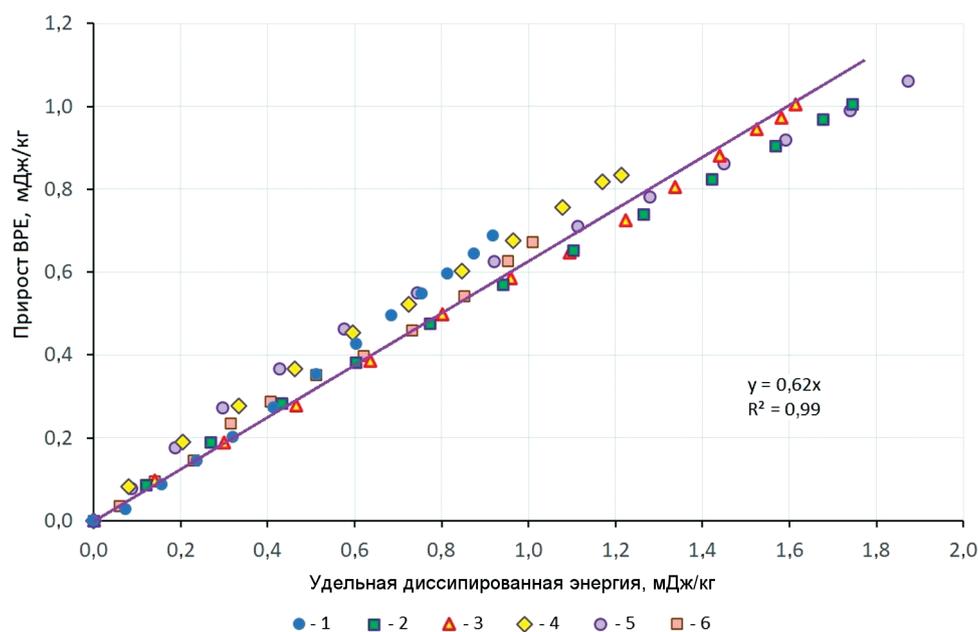


Рис. 7. Отношение удельного прироста BPE к удельной диссипированной энергии для выделенных ночных эпизодов перемешивания: 1–9–10 июля, 2–16–17 июля, 3–17–18 июля, 4–18–19 июля, 5–19–20 июля, 6–27–28 июля

Fig. 7. The ratio of the specific increase of BPE to the specific dissipated energy for the selected nighttime episodes of mixing: 1 – July 9–10, 2 – July 16–17, 3 – July 17–18, 4 – July 18–19, 5 – July 19–20, 6–27–28 July

### 4.3. Скорость диссипации

Для верификации полученных результатов был осуществлен расчет скорости диссипации кинетической энергии по методу структурных функций, по данным от двух ADCP в период с 30.06 по 05.07.2022. Построение функции  $D_{LL}(r)$  было осуществлено для 46 точек в середине зоны сканирования, в соответствии с числом ячеек ADCP (при их общем числе 78), которые были использованы в качестве референсных при осуществлении расчетов. При толщине ячейки 25 мм указанным точкам соответствует диапазон глубин от 1,15 м до 2,20 м, при общем диапазоне сканирования ADCP 0,6–3,6 м.

В большинстве случаев в зависимости  $D_{LL}$  от  $r$  выявлялся инерционный интервал протяженностью в декаду масштабов и более, что позволило произвести непосредственный расчет динамики величины  $\epsilon$ ; характерное для ночных интервалов значение  $\epsilon$  составляет  $10^{-8}$ . Следует отметить, что сам факт наличия инерционного интервала косвенно свидетельствует о наличии развитой турбулентности в перемешанном слое. Что касается количественных оценок, и, в частности, параметра Рейнольдса  $Re$ , за основу можно взять известное соотношение для конвективной скорости [27]:  $w^* = (Bh_{\text{КПС}})^{1/3}$ . Подставляя в эту формулу характерные значения  $B \sim 2 \cdot 10^{-8}$  и  $h_{\text{КПС}} \sim 3$ , получаем оценку  $w^* \sim 4$  мм/с, которая согласуется со значениями, полученными при обработке данных ADCP (рис. 5). При этом, принимая в качестве характерного масштаба длины толщину  $h_{\text{КПС}}$  перемешанного слоя, для параметра  $Re$  получаем оценку снизу  $\sim 10^4$ , которая свидетельствует о турбулентном характере движения в перемешанном слое.

По рассчитанным значениям  $\epsilon$  (Вт/кг) для каждого из указанных слоев была построена зависимость диссипированной энергии от времени и, соответственно, среднее по всем 46 слоям значение этой энергии (рис. 8).

Далее, в предположении, что вязкая диссипация однородно распределена в КПС, для нескольких выбранных эпизодов перемешивания (представлены затененными областями на рис. 8) была рассчитана суммарная по каждому из эпизодов диссипированная энергия (Дж), а также ее значения  $Q = \int \epsilon dt$ , нормированные на единицу массы всего водного столба (Дж/кг).

Для этих же эпизодов был произведен расчет изменений базовой потенциальной энергии и выполнена независимая оценка эффективности перемешивания с использованием представления  $\eta = \Delta E_b / (\Delta E_b + Q)$ . В период с 30 июня по 5 июля для ночных эпизодов были получены оценки  $\eta$  в диапазоне 0,76–0,86, значительно превышающие оценки, основанные на расчете приращений  $BPE$  и внешней накачки. Одна из причин расхождения в оценках  $\eta$  может заключаться в том, что в период с 30 июня по 5 июля КПС еще не был полностью сформирован, что вносит погрешности в расчеты как по первому методу, например, при вычислении скорости генерации кинетической энергии по формуле (2), так и по второму, при вычислении средней по КПС скорости диссипации  $\epsilon$ . В целом, можно констатировать качественное согласие результатов, полученных альтернативными методами.



Рис. 8. Зависимость диссипированной энергии от времени для некоторых глубин. Эпизоды ночного выхолаживания отмечены затененными областями

Fig. 8. Time dependence of dissipated energy for some depths. Episodes of night cooling are marked by shaded areas

## 5. Обсуждение и выводы

В работе проанализированы возможности интегрального энергетического подхода при изучении перемешивания водной массы озера для случая, когда в качестве основного механизма перемешивания преобладает поверхностное охлаждение. Представлена методика расчета основных параметров, используемых при таком подходе: базовой потенциальной энергии и скорости генерации кинетической энергии.

По результатам обработки опытных данных для эффективности перемешивания получены весьма высокие ( $\sim 0,4$ ) значения, существенно превышающие общепринятую оценку  $0,17$ , полученную при изучении ветрового перемешивания. Ранее близкая по значению оценка  $\eta$  была получена в работе [26] при изучении конвекции подо льдом, возникающей за счет неоднородного прогрева водной толщи. Однако вопрос об аномальных высоких значениях  $\eta$  и универсальности этих значений при разных типах радиационной накачки остается открытым.

Для верификации предложенного метода планируется проведение новой серии экспериментов, в том числе на других озерах. Особое внимание при этом будет уделено тем факторам, которые, предположительно, могут существенно повлиять на оценку  $\eta$ . К таким факторам можно отнести вертикальную дискретность температурных датчиков и временной интервал измерений. Данные температурных кос планируется дополнить результатами многократных зондирований. Для независимой оценки внешней накачки в число непосредственно измеряемых величин следует также включить температуру и влажность воздуха, скорость ветра, и обеспечить большую точность их измерений. Актуальным остается также использование ADCP, в первую очередь — для оценки средней по водному столбу скорости диссипации  $\epsilon$ . Оценки таких средних непосредственно по экспериментальным данным возможны лишь при условии, что диапазон сканирования включает всю водную толщу.

Отдельного внимания заслуживают и вопросы собственно физического характера. В частности, остается проблематичным вопрос о приемлемости одномерного приближения при расчете эффективности перемешивания. Отказаться от этого приближения при обработке большей части опытных данных, когда измерения локализованы в горизонтальной плоскости, пока что практически невозможно. Однако некоторые шаги в этом направлении могут быть предприняты, например, для уточнения расчетов потенциальной энергии по формуле (3). А именно, в некоторой степени можно учесть влияние батиметрии объекта на указанные расчеты. Для этого нужно построить гипсометрическую кривую  $S(z)$  и включить ее в качестве множителя в подинтегральное выражение в формуле (3). Дополнительного рассмотрения требует также вопрос об инерции отклика системы на внешнее воздействие. В частности, запаздывание такого отклика может оказать существенное влияние на предварительный выбор и идентификацию эпизодов перемешивания.

Следует также иметь в виду, что объект, использованный в данной работе (небольшое лесное озеро, слабо подверженное ветровому перемешиванию), уникален в том отношении, что для него удалось в относительно «чистом» виде выбрать интервалы времени, когда преобладал механизм поверхностного выхолаживания. В общем же случае вопрос о вычленении эпизодов с преобладанием какого-то одного механизма остается актуальным, как и алгоритмы, позволяющие оценить вклад каждого из механизмов в случаях комбинированного (например, сочетание поверхностного выхолаживания и ветрового перемешивания) внешнего воздействия.

## Финансирование

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФ 21-17-00262 «Перемешивание в бореальных озерах: механизмы и их эффективность».

## Funding

This work was supported by Russian Science Foundation grant 21-17-00262, “Mixing in Boreal Lakes: Mechanisms and its efficiency”.

## Литература

1. Bouffard D., Wüest A. Convection in Lakes // Annual Review of Fluid Mechanics. 2019. Vol. 51(1). P. 189–215. doi:10.1146/annurev-fluid-010518-040506
2. Gregg M.C., D’Asaro E.A., Riley J.J., Kunze E. Mixing Efficiency in the Ocean // Annual Review of Marine Science. 2018. Vol. 10, N 1. P. 443–473.

3. Maffioli A., Brethouwer G., Lindborg E. Mixing efficiency in stratified turbulence // *Journal of Fluid Mechanics*. 2016. Vol. 794, P. R3. doi:10.1017/jfm.2016.206
4. Monismith S.G., Koseff J.R., White B.L. Mixing efficiency in the presence of stratification: when is it constant? // *Geophysical Research Letters*. 2018. Vol. 45, N 11. P. 5627–5634. doi:10.1029/2018GL077229
5. Osborn T.R. Estimates of the local rate of vertical diffusion from dissipation measurements // *Journal of Physical Oceanography*. 1980. Vol. 10, N 1. P. 83–89. doi:10.1175/1520-0485(1980)010<0083: EOTLRO>2.0.CO;2
6. Wunsch C., Ferrari R. Vertical mixing, energy, and the general circulation of the oceans // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2004. Vol. 36, N 1. P. 281–314. doi:10.1146/annurev.fluid.36.050802.122121
7. Gibson C.H. Fossil temperature, salinity, and vorticity turbulence in the ocean — Marine Turbulence Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Liege Colloquium on Ocean Hydrodynamics // Elsevier Oceanography Series. 1980. Vol. 28. P. 221–257.
8. Salehipour H., Peltier W.R. Diapycnal diffusivity, turbulent Prandtl number and mixing efficiency in Boussinesq stratified turbulence // *Journal of Fluid Mechanics*. 2015. Vol. 775. P. 464–500. doi:10.1017/jfm.2015.305
9. Piccioni F., Casenave C., Lemaire B.J., et al. The thermal response of small and shallow lakes to climate change: new insights from 3D hindcast modelling // *Earth System Dynamics*. 2021. Vol. 12, N 2. P. 439–456. doi:10.5194/esd-12-439-2021
10. Robertson D.M., Imberger J. Lake Number, a Quantitative Indicator of Mixing Used to Estimate Changes in Dissolved Oxygen // *Internationale Revue der gesamten Hydrobiologie und Hydrographie*. 1994. Vol. 79, N 2. P. 159–176. doi:10.1002/iroh.19940790202
11. Winters K., Lombard P., Riley J., D'asaro E. Available potential energy and mixing in density-stratified fluids // *Journal of Fluid Mechanics*. 1995. Vol. 289. P. 115–128. doi:10.1017/S002211209500125X
12. Wykes M.S.D., Hughes G.O., Dalziel S.B. On the meaning of mixing efficiency for buoyancy-driven mixing in stratified turbulent flows // *Journal of Fluid Mechanics*. 2015. Vol. 781. P. 261–275. doi:10.1017/jfm.2015.462
13. Peltier W.R., Caulfield C.P. Mixing efficiency in stratified shear flows // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2003. Vol. 35, N 1. P. 135–167. doi:10.1146/annurev.fluid.35.101101.161144
14. Farmer D.H. Penetrative convection in the absence of mean shear // *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. 1975. Vol. 101, N 430. P. 869–891. doi:10.1002/QJ.49710143011
15. Bluteau C.E., Jones N.L., Ivey G.N. Turbulent mixing efficiency at an energetic ocean site // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2013. Vol. 118, N 9. P. 4662–4672. doi:10.1002/jgrc.20292
16. Chen C.-T. A., Millero F.J. Precise thermodynamic properties for natural waters covering only the limnological range // *Limnology and Oceanography*. 1986. Vol. 31, N 3. P. 657–662. doi:10.4319/lo.1986.31.3.0657
17. Jonas T., Terzhevik A.Y., Mironov D.V., Wüest A. Radiatively driven convection in an ice-covered lake investigated by using temperature microstructure technique // *Journal of Geophysical Research*. 2003. Vol. 108, N C6. P. 3183. doi:10.1029/2002JC001316
18. Mason P.J. Large-eddy simulation of the convective atmospheric boundary layer // *Journal of Atmospheric Sciences*. 1989. Vol. 46. P. 1492–1516. doi:10.1175/1520-0469(1989)046<1492: LESOTC>2.0.CO;2
19. Zikanov O., Slinn D., Dhanak M. Turbulent convection driven by surface cooling in shallow water // *Journal of Fluid Mechanics*. 2002. Vol. 464. P. 81–111. doi:10.1017/S0022112002001015
20. Kalinowska M.B. Effect of water–air heat transfer on the spread of thermal pollution in rivers // *Acta Geophysica*. 2019. Vol. 67, N 2. P. 597–619. doi:10.1007/s11600-019-00252-y
21. Mironov D.V., Heise E., Kourzeneva E., et al. Implementation of the lake parameterization scheme FLake into the numerical weather prediction model COSMO // *Boreal Environment Research*. 2010. Vol. 15. P. 218–230.
22. Zdorovennov R., Palshin N., Zdorovennova G., Efremova T., Terzhevik A. Interannual variability of ice and snow cover of a small shallow lake // *Estonian Journal of Earth Sciences*. 2013. Vol. 61, N 1. P. 26–32. doi:10.3176/earth.2013.03
23. Reliable prognosis. URL: <https://rp5.ru/> (accessed: 24.01.2023)
24. Volkov S., Bogdanov S., Zdorovennov R., et al. Fine scale structure of convective mixed layer in ice-covered lake // *Environmental Fluid Mechanics*. 2019. Vol. 19, N 3. P. 751–764. doi:10.1007/s10652-018-9652-2
25. Hughes G.O., Gayon B., Griffiths R.W. Available potential energy in Rayleigh–Bénard convection // *Journal of Fluid Mechanics*. 2013. Vol. 729. P. R3. doi:10.1017/jfm.2013.353
26. Ulloa H.N., Wüest A., Bouffard D. Mechanical energy budget and mixing efficiency for a radiatively heated ice-covered waterbody // *Journal of Fluid Mechanics*. 2018. Vol. 852. P. R1. doi:10.1017/jfm.2018.587
27. Deardorff J.W. Preliminary results from numerical integrations of the unstable planetary boundary layer // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1970. Vol. 27, P. 1209–1211. doi: [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1970\)027<1209: PRFNIO>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1970)027<1209: PRFNIO>2.0.CO;2)

## References

1. Bouffard D., Wüest A. Convection in Lakes. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2019, 51(1), 189–215. doi:10.1146/annurev-fluid-010518-040506

2. Gregg M.C., D'Asaro E.A., Riley J.J., Kunze E. Mixing Efficiency in the Ocean. *Annual Review of Marine Science*. 2018, 10, 1, 443–473.
3. Maffioli A., Brethouwer G., Lindborg E. Mixing efficiency in stratified turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*. 2016, 794, R3. doi:10.1017/jfm.2016.206
4. Monismith S.G., Koseff J.R., White B.L. Mixing efficiency in the presence of stratification: when is it constant? *Geophysical Research Letters*. 2018, 45, 11, 5627–5634. doi:10.1029/2018GL077229
5. Osborn T.R. Estimates of the local rate of vertical diffusion from dissipation measurements. *Journal of Physical Oceanography*. 1980, 10, 1, 83–89. doi:10.1175/1520-0485(1980)010<0083: EOTLRO>2.0.CO;2
6. Wunsch C., Ferrari R. Vertical mixing, energy, and the general circulation of the oceans. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2004, 36, 1, 281–314. doi:10.1146/annurev.fluid.36.050802.122121
7. Gibson C.H. Fossil temperature, salinity, and vorticity turbulence in the ocean — Marine Turbulence Proceedings of the 11<sup>th</sup> International Liege Colloquium on Ocean Hydrodynamics. *Elsevier Oceanography Series*. 1980, 28, 221–257.
8. Salehipour H., Peltier W.R. Diapycnal diffusivity, turbulent Prandtl number and mixing efficiency in Boussinesq stratified turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*. 2015, 775, 464–500. doi:10.1017/jfm.2015.305
9. Piccioni F., Casenave C., Lemaire B.J., et al. The thermal response of small and shallow lakes to climate change: new insights from 3D hindcast modelling. *Earth System Dynamics*. 2021, 12, 2, 439–456. doi:10.5194/esd-12-439-2021
10. Robertson D.M., Imberger J. Lake Number, a Quantitative Indicator of Mixing Used to Estimate Changes in Dissolved Oxygen. *Internationale Revue der gesamten Hydrobiologie und Hydrographie*. 1994, 79, 2, 159–176. doi:10.1002/iroh.19940790202
11. Winters K., Lombard P., Riley J., D'asaro E. Available potential energy and mixing in density-stratified fluids. *Journal of Fluid Mechanics*. 1995, 289, 115–128. doi:10.1017/S002211209500125X
12. Wykes M.S.D., Hughes G.O., Dalziel S.B. On the meaning of mixing efficiency for buoyancy-driven mixing in stratified turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*. 2015, 781, 261–275. doi:10.1017/jfm.2015.462
13. Peltier W.R., Caulfield C.P. Mixing efficiency in stratified shear flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2003, 35, 1, 135–167. doi:10.1146/annurev.fluid.35.101101.161144
14. Farmer D.H. Penetrative convection in the absence of mean shear. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*. 1975, 101, 430, 869–891. doi:10.1002/QJ.49710143011
15. Bluteau C.E., Jones N.L., Ivey G.N. Turbulent mixing efficiency at an energetic ocean site. *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2013, 118, 9, 4662–4672. doi:10.1002/jgrc.20292
16. Chen C.-T. A., Millero F.J. Precise thermodynamic properties for natural waters covering only the limnological range. *Limnology and Oceanography*. 1986, 31, 3, 657–662. doi:10.4319/lo.1986.31.3.0657
17. Jonas T., Terzhevik A.Y., Mironov D.V., Wüest A. Radiatively driven convection in an ice-covered lake investigated by using temperature microstructure technique. *Journal of Geophysical Research*. 2003, 108, C6, 3183. doi:10.1029/2002JC001316
18. Mason P.J. Large-eddy simulation of the convective atmospheric boundary layer. *Journal of Atmospheric Sciences*. 1989, 46, 1492–1516. doi:10.1175/1520-0469(1989)046<1492: LESOTC>2.0.CO;2
19. Zikanov O., Slinn D., Dhanak M. Turbulent convection driven by surface cooling in shallow water. *Journal of Fluid Mechanics*. 2002, 464, 81–111. doi:10.1017/S0022112002001015
20. Kalinowska M.B. Effect of water–air heat transfer on the spread of thermal pollution in rivers. *Acta Geophysica*. 2019, 67, 2, 597–619. doi:10.1007/s11600-019-00252-y
21. Mironov D.V., Heise E., Kourzeneva E., et al. Implementation of the lake parameterization scheme FLake into the numerical weather prediction model COSMO. *Boreal Environment Research*. 2010, 15, 218–230.
22. Zdorovenov R., Palshin N., Zdorovenova G., Efremova T., Terzhevik A. Interannual variability of ice and snow cover of a small shallow lake. *Estonian Journal of Earth Sciences*. 2013, 61, 1, 26–32. doi:10.3176/earth.2013.03
23. Reliable prognosis. URL: <https://rp5.ru/> (accessed: 24.01.2023)
24. Volkov S., Bogdanov S., Zdorovenov R., et al. Fine scale structure of convective mixed layer in ice-covered lake. *Environmental Fluid Mechanics*. 2019, 19, 3, 751–764. doi:10.1007/s10652-018-9652-2
25. Hughes G.O., Gayon B., Griffiths R.W. Available potential energy in Rayleigh–Bénard convection. *Journal of Fluid Mechanics*. 2013, 729, R3. doi:10.1017/jfm.2013.353
26. Ulloa H.N., Wüest A., Bouffard D. Mechanical energy budget and mixing efficiency for a radiatively heated ice-covered waterbody. *Journal of Fluid Mechanics*. 2018, 852, R1. doi:10.1017/jfm.2018.587
27. Deardorff J.W. Preliminary results from numerical integrations of the unstable planetary boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1970, 27, 1209–1211. doi: [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1970\)027<1209: PRFNIO>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1970)027<1209: PRFNIO>2.0.CO;2)

*Богданов С.Р., Пальшин Н.И., Здоровеннов Р.Э., Митрохов А.В., Кузнецов П.С., Новикова Ю.С., Здоровеннова Г.Э.  
Bogdanov S.R., Palshin N.I., Zdorovennov R.E., Mitrokhov A.V., Kuznetsov P.S., Novikova J.S., Zdorovennova G.E.*

**Об авторах**

**БОГДАНОВ Сергей Рэмович**, РИНЦ Author ID: 147395, ORCID ID: 0000-0003-4150-2712,

Scopus Author ID: 22950031500, WoS ResearcherID: Y-5047-2019, Sergey.R.Bogdanov@mail.ru

**ПАЛЬШИН Николай Иннокентьевич**, РИНЦ Author ID: 69931, ORCID ID: 0000-0003-1540-3788,

Scopus Author ID: 6701733667, WoS ResearcherID: L-8634-2013, npalshin@mail.ru

**ЗДОРОВЕННОВ Роман Эдуардович**, РИНЦ Author ID: 135760, ORCID ID: 0000-0003-1695-4872,

Scopus Author ID: 8847365600, WoS ResearcherID: L-8294-2013, romga74@gmail.com

**МИТРОХОВ Андрей Васильевич**, РИНЦ Author ID: 599520, Scopus Author ID: 35103038600, a.mitrokhov@list.ru

**КУЗНЕЦОВ Павел Сергеевич**, ORCID ID: 0009-0001-5737-1588, kuznetsov.pavel04200@gmail.com

**НОВИКОВА Юлия Сергеевна**, ORCID ID: 0000-0002-3330-6861, NovYuliana@gmail.com

**ЗДОРОВЕННОВА Галина Эдуардовна**, РИНЦ Author ID: 184542, ORCID ID: 0000-0003-2726-0104,

Scopus Author ID: 8847365700, WoS ResearcherID: L-8214-2013, zdorovennova@gmail.com