

УДК 551.466.3

© К. В. Фокина^{1,2*}, 2023

¹Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 117997, Россия, Москва, Нахимовский проспект, 36.

²Российский государственный гидрометеорологический университет, 195196, Россия, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 98.

*fokinakarina@yandex.ru

ИСПЫТАНИЯ УСКОРЕННОЙ ДВУХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ВОЛН

Статья поступила в редакцию 22.12.2022, после доработки 10.04.2023, принята в печать 18.04.2023

Аннотация

Работа посвящена дальнейшей проверке ускоренного метода моделирования двумерных поверхностных волн на бесконечной глубине с использованием двухмерной модели, полученной путём упрощения трёхмерных уравнений для потенциальных периодических волн. Упрощённая модель основана на разделении потенциала скорости на линейную и нелинейную составляющие и анализе точного уравнения Пуассона для нелинейной составляющей потенциала на свободной поверхности. Впервые дан вывод соотношения для расчёта полной кинетической энергии в отслеживающей поверхности системе координат. Рассчитанные по ускоренной модели спектральные характеристики волнового поля сравниваются с результатами эквивалентной трёхмерной модели, которая основана на численном решении трёхмерного уравнения Пуассона, записанного в поверхностных координатах для нелинейной составляющей потенциала скорости. Проведённое сравнение демонстрирует, что результаты, полученные по двум различным версиям модели, хорошо согласуются между собой, что позволяет использовать упрощённую модель для быстрого воспроизведения динамики волнового поля, увеличив тем самым скорость расчётов примерно на два порядка.

Ключевые слова: фазо-разрешающее моделирование, волновой спектр, приток энергии, вертикальная скорость на поверхности

© К. В. Фокина^{1,2*}, 2023

¹Shirshov Institute of Oceanology RAS, 117997, Nahimovsky Pr., 36, Moscow, Russia

²Russian State Hydrometeorological University, 195196, Malookhtinsky Pr., 98, St Petersburg, Russia

*fokinakarina@yandex.ru

TESTING OF THE ACCELERATED TWO-DIMENSIONAL MODEL OF SURFACE POTENTIAL WAVES

Received 22.12.2022, Revised 10.04.2023, Accepted 18.04.2023

Abstract

The paper focuses on the validation of the accelerated method for simulation of 2D-surface waves with a use of 2D-model derived by simplifications of 3D-equations for potential periodic waves at infinite depth. The separation of the velocity potential into nonlinear and linear components is used. A derivation of the equation for the total kinetic energy calculation in the surface-following coordinate system is given for the first time. The spectral characteristics of the wave field calculated with the accelerated model are compared with the results from the equivalent full 3D-model. The 3D-model is based on the numerical solution of the 3D-Poisson equation written in surface coordinates for the nonlinear component of the velocity potential. The similarity of the results obtained from the two versions of the model confirms that the new accelerated model can be used to quickly reproduce the wave field dynamics and thereby increase a speed of calculations by about two orders.

Keywords: phase-resolving modeling, wave spectrum, energy input, vertical velocity on the surface

1. Введение

Используемые в настоящее время подробные модели волн можно разделить на две группы: фазо-разрешающие модели (или прямое моделирование волн) и спектральные модели. Спектральное моделирование в настоящий момент является единственным методом, применимым для прогноза морского волнения и позволяющим описывать развитие волнового поля в течение длительного периода времени для больших пространств. Однако спектральное представление волнового поля позволяет получить информацию лишь о распределении волновой энергии по направлению и частоте и не даёт возможности воспроизводить волновое поле в физическом пространстве.

Наиболее полным подходом к изучению волн считается фазо-разрешающее моделирование, которое определяется как математическое моделирование эволюции возвышения поверхности и поля скорости на основе полных потенциальных уравнений гидродинамики. Большинство существующих моделей предназначены для различных инженерных приложений (обеспечение безопасности судов, проектирование морских сооружений, перенос донных отложений и др.). Более точные модели создаются для изучения физических свойств волн.

В отличие от спектрального моделирования фазо-разрешающее моделирование волн воспроизводит реальный физический процесс и основано на хорошо сформулированных полных уравнениях. Такие модели, как правило, являются более сложными, требуют больше вычислительных ресурсов, неприменимы в масштабах океана и поэтому не используются для прогноза ветрового волнения. Наиболее длительная доля расчётов в фазо-разрешающих моделях приходится на итерационное решение эллиптического уравнения для потенциала скорости. Если в двумерных моделях эта проблема полностью решается использованием конформных координат [1], то для трёхмерных моделей численное решение эллиптического уравнения является неотъемлемой частью схемы.

В настоящее время волновое моделирование быстро развивается. Такое моделирование является универсальным инструментом для исследования волновых процессов и разработки схем параметризации (например, для физических процессов с относительно коротким временным масштабом, таких как приток энергии от ветра к волнам и обрушение волн) для спектральных и фазо-разрешающих моделей.

Распространённый подход к трёхмерному моделированию сформулирован в HOS (High Order Scheme) модели [2, 3], разработанной на основе идеи, представленной в [4]. Метод основан на стандартном представлении решения уравнения Лапласа в декартовой системе координат и экстраполяции этого решения на свободную поверхность с помощью ряда Тейлора. Недостатки и преимущества модели HOS обсуждаются в работе [5]. Для волн малой амплитуды и узкого спектра волн точность такого метода высока, однако модель имеет ограничения при моделировании эволюции волн для широкого волнового спектра, содержащего много волновых мод, поскольку необходимо увеличивать порядок ряда Тейлора, что может привести к вычислительной неустойчивости из-за случайного усиления мод с большими волновыми числами.

Другая группа 3D-моделей использует решение уравнения Лапласа в криволинейных координатах. Среди существующих подходов можно также выделить: метод граничного элемента (BIEM) [6], главным достоинством которого является высокая точность и возможность описывать сильно нелинейные волны; и метод поверхностного интеграла [7], подходящий для изучения волн большой крутизны. При моделировании подобных процессов метод имеет определённые преимущества, но он практически неприменим для расчётов эволюции многомодового поля для больших областей.

Все модели, основанные на упомянутых трёхмерных методах, имеют свои преимущества и недостатки (см. [8]). Общим недостатком для всех является низкая производительность из-за того, что все они тем или иным образом разрешают вертикальную структуру волнового поля на основе трёхмерного уравнения для потенциала скорости. Поскольку в процессе разработки любой модели возникает необходимость ее многократного запуска с высоким разрешением, эффективность развития и усовершенствования трёхмерных моделей резко уменьшается.

Для устранения этого недостатка в последнее время была предпринята попытка разработать новый подход к фазо-разрешающему моделированию двумерных периодических волновых полей [9]. Идея заключается в представлении потенциала скорости в виде суммы линейной и нелинейной компонент. Решение для линейной составляющей известно; следовательно, нелинейная составляющая должна рассчитываться с помощью уравнения Пуассона с нулевым граничным условием на поверхности. Такой подход предлагает новый способ упростить вычисления, рассматривая двумерное уравнение Пуассона на поверхности. Подробное описание подобной ускоренной модели приведено ниже.

В работах [10–12] представлено сравнение результатов ускоренной двумерной модели с точной трёхмерной моделью для периодических волн, объединяющей Фурье преобразование и конечно-разностную аппроксимацию по вертикали для уравнения Пуассона. Длительный счёт с высоким разрешением по ускоренной модели показал, что упрощённая модель даёт статистические результаты, аналогичные результатам, полученным по трёхмерной модели. Настоящая работа продолжает подобные сравнения с иным набором параметров для проведения дополнительной проверки ускоренной модели.

2. Трёхмерная модель потенциальных волн

Уравнения модели удобно записывать в следующей поверхности не ортогональной системе координат:

$$\xi = x \quad \vartheta = y \quad \zeta = z - \eta(\xi, \vartheta, \tau) \quad \tau = t, \quad (1)$$

где $\eta(x, y, t) = \eta(\xi, \vartheta, \tau)$ — движущаяся периодическая волновая поверхность, которая может быть представлена рядом Фурье:

$$\eta(\xi, \vartheta, \tau) = \sum_{-M_x < k < M_x} \sum_{-M_y < l < M_y} h_{k,l}(\tau) \Theta_{k,l}, \quad (2)$$

где k, l — компоненты вектора волновых чисел k ; $h_{k,l}(\tau)$ — Фурье амплитуды возвышения поверхности m ; M_x, M_y — число мод в направлении ξ и ϑ соответственно; $\Theta_{k,l}$ — базисные функции разложения Фурье, представленные в виде матрицы

$$\Theta_{k,l} = \begin{cases} \cos(k\xi + l\vartheta) & -M_x \leq k \leq M_x & -M_y \leq l \leq 0 \\ \cos(k\xi) & -M_x \leq k \leq 0 & l = 0 \\ \sin(k\xi) & 0 \leq k \leq M_x & l = 0 \\ \sin(k\xi + l\vartheta) & -M_x \leq k \leq M_x & 0 \leq l \leq M_y \end{cases}. \quad (3)$$

3D-уравнения для потенциальных волн в системе координат (1) при $\xi \leq 0$ принимают вид:

$$\eta_\tau + \eta_\xi \varphi_\xi + \eta_\vartheta \varphi_\vartheta - (\eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2 + 1) \Phi_\zeta = 0, \quad (4)$$

$$\varphi_\tau + \frac{1}{2} (\varphi_\xi^2 + \varphi_\vartheta^2 - (1 + \eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2) \Phi_\zeta^2) + \eta + p = 0, \quad (5)$$

$$\Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\vartheta\vartheta} + \Phi_{\zeta\zeta} = \Upsilon(\Phi), \quad (6)$$

где Υ — оператор:

$$\Upsilon(\Phi) = 2\eta_\xi(\Phi)_{\xi\xi} + 2\eta_\vartheta(\Phi)_{\vartheta\vartheta} + (\eta_{\xi\xi} + \eta_{\vartheta\vartheta})(\Phi)_\zeta - (\eta_\xi^2 + \eta_\vartheta^2)(\Phi)_{\zeta\zeta}, \quad (7)$$

где φ — потенциал скорости для $\zeta = 0$, Φ — потенциал скорости для $\zeta < 0$, p — давление на поверхности $\zeta = 0$.

В работе [12] было предложено, что потенциал скорости φ удобно представить в виде суммы линейной $\bar{\varphi}$ и нелинейной компонент $\tilde{\varphi}$:

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \bar{\varphi} \quad \Phi = \tilde{\Phi} + \bar{\Phi}. \quad (8)$$

Линейная компонента $\bar{\varphi}$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\bar{\Phi}_{\xi\xi} + \bar{\Phi}_{\vartheta\vartheta} + \bar{\Phi}_{\zeta\zeta} = 0 \quad (9)$$

с известным решением

$$\bar{\Phi}(\xi, \vartheta, \zeta, \tau) = \sum_{k,l} \bar{\varphi}_{k,l}(\tau) \exp(|k|\zeta) \Theta_{k,l}, \quad (10)$$

где $|k| = (k^2 + l^2)^{1/2}$, $\bar{\varphi}_{k,l}$ — Фурье-коэффициенты линейной компоненты потенциала на поверхности. Решение удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \zeta = 0 & \quad \bar{\Phi} = \bar{\varphi} \\ \zeta \rightarrow \infty & \quad \tilde{\Phi}_\zeta \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Нелинейная компонента удовлетворяет уравнению:

$$\tilde{\Phi}_{\xi\xi} + \tilde{\Phi}_{\vartheta\vartheta} + \tilde{\Phi}_{\zeta\zeta} = \Upsilon(\tilde{\Phi}) + \Upsilon(\bar{\Phi}). \quad (12)$$

Уравнение (12) решается с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \zeta = 0 \quad \tilde{\Phi} &= 0 \\ \zeta \rightarrow \infty \quad \tilde{\Phi}_{\zeta} &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (13)$$

На поверхности $\zeta = 0$, уравнение (12) принимает вид

$$\tilde{\Phi}_{\zeta\zeta} = \Upsilon(\varphi). \quad (14)$$

Уравнения (4)–(6) записаны в безразмерном виде с использованием масштабов длины L ; времени $L^{1/2}g^{-1/2}$, потенциала скорости $L^{3/2}g^{1/2}$ (g — ускорение свободного падения). Безразмерная длина волны с безразмерным волновым числом k равна $2\pi L/k$.

Поскольку адиабатические уравнения для масштабов, превышающих размеры капиллярных волн, и масштабов, определённых молекулярной вязкостью, являются автомодельными, введение масштабирования резко повышает универсальность результатов. Применение результатов для реальных процессов сводится к выбору величины масштаба L и пересчёту переменных к размерному виду. Разумеется, введение не адиабатических процессов связано с введением новых безразмерных параметров, значения которых легко оцениваются.

3. Двухмерная модель трёхмерных волн

Преимущество трёхмерного моделирования заключается в возможности точного воспроизведения нелинейного движения жидкости в потенциальном приближении. Однако необходимость на каждом временном шаге решать эллиптическое уравнение для потенциала скорости выражается в низкой производительности таких моделей, что является их существенным недостатком.

Рассмотрим уравнение для нелинейной компоненты потенциала (14). Учитывая, что $\tilde{\Phi}(0) = 0$, уравнение (14) при $\zeta = 0$ принимает вид:

$$\tilde{w}_{\zeta} = 2(\eta_{\xi}w_{\xi} + 2\eta_{\vartheta}w_{\vartheta}) + \Delta\eta w - sw_{\zeta}, \quad (15)$$

здесь $w = \varphi_{\zeta}$, $w_{\zeta} = \varphi_{\zeta\zeta}$, $\Delta = (\)_{\zeta\zeta} + (\)_{\vartheta\vartheta}$, $s = \eta_{\xi}^2 + \eta_{\vartheta}^2$.

Принимая $w = \bar{w} + \tilde{w}$, получаем:

$$\tilde{w}_{\zeta} = 2\eta_{\xi}(\bar{w}_{\xi} + \tilde{w}_{\xi}) + 2\eta_{\vartheta}(\bar{w}_{\vartheta} + \tilde{w}_{\vartheta}) + \Delta\eta(\bar{w} + \tilde{w}) - s(\bar{w}_{\zeta} + \tilde{w}_{\zeta}). \quad (16)$$

Уравнение (15) может быть представлено в следующем виде:

$$(1 + s)\tilde{w}_{\zeta} = 2(\eta_{\xi}\tilde{w}_{\xi} + \eta_{\vartheta}\tilde{w}_{\vartheta}) + \Delta\eta\tilde{w} + r, \quad (17)$$

где

$$r = 2(\eta_{\xi}\bar{w}_{\xi} + \eta_{\vartheta}\bar{w}_{\vartheta}) + \Delta\eta\bar{w} - s\bar{w}_{\zeta} \quad (18)$$

зависит только от линейной компоненты и рассчитывается, используя Фурье представление (10):

$$\bar{w}(\xi, \vartheta, \zeta) = \sum_{k,l} k \bar{\varphi}_{k,l} \exp(k\zeta) \Theta_{k,l}, \quad (19)$$

$$\bar{w}_{\zeta}(\xi, \vartheta, \zeta) = \sum_{k,l} k^2 \bar{\varphi}_{k,l} \exp(k\zeta) \Theta_{k,l}, \quad (20)$$

$$\bar{w}_{\xi}(\xi, \vartheta, \zeta) = -\sum_{k,l} k \bar{\varphi}_{-k,-l} \exp(k\zeta) \Theta_{k,l}, \quad (21)$$

$$\bar{w}_{\vartheta}(\xi, \vartheta, \zeta) = -\sum_{k,l} l \bar{\varphi}_{-k,-l} \exp(k\zeta) \Theta_{k,l}. \quad (22)$$

Здесь $\bar{\varphi}_{k,l}$ — Фурье-коэффициенты аналитической компоненты потенциала скорости $\bar{\varphi}$.

Наличие \tilde{w}_{ζ} в уравнении (17) делает систему незамкнутой.

Нелинейная компонента вертикальной скорости $\tilde{w} = \tilde{\varphi}_{\zeta}$ и ее вертикальная производная $\tilde{w}_{\zeta} = \tilde{\varphi}_{\zeta\zeta}$ оказались хорошо связаны друг с другом соотношением [12]

$$A = \frac{\tilde{w}}{\tilde{w}_{\zeta}} = \sigma F(\mu), \quad (23)$$

где σ — безразмерная дисперсия возвышения поверхности:

$$\sigma = \left(\overline{(\eta - \bar{\eta})^2} \right)^{1/2}, \quad (24)$$

μ — параметр:

$$\mu = \sigma \sigma_L, \quad (25)$$

σ_L — дисперсия Лапласиана $\Lambda = \Delta \eta$

$$\sigma_L = \left(\overline{(\Lambda - \bar{\Lambda})^2} \right)^{1/2}. \quad (26)$$

Функция F аппроксимирована формулой:

$$F = \frac{d_0 \mu + d_1}{\mu + d_2}, \quad (27)$$

где $d_0 = 0,535$, $d_1 = 0,0414$, $d_2 = 0,00321$.

При выборе переменных в (24)–(25) было испытано много различных вариантов счета при различных начальных условиях и разрешении. Оказалось, что наиболее подходящими являются энергия, характеризующая дисперсией возвышения σ , и среднеквадратичная кривизна поверхности, характеризующая дисперсией Лапласиана σ_L . Довольно высокая точность аппроксимации (24)–(27) подтверждается многочисленными расчётами в [9–11].

Таким образом, двухмерная модель включает в себя следующие уравнения:

$$\eta_\tau + \eta_\xi \varphi_\xi + \eta_\eta \varphi_\eta - (\eta_\xi^2 + \eta_\eta^2 + 1)w = 0, \quad (28)$$

$$\varphi_\tau + \frac{1}{2}(\varphi_\xi^2 + \varphi_\eta^2 - (1 + \eta_\xi^2 + \eta_\eta^2)w^2) + \eta + p = 0, \quad (29)$$

$$\tilde{w} = \frac{A(2(\eta_\xi w_\xi + \eta_\eta w_\eta) + \Delta \eta w - (\eta_\xi^2 + \eta_\eta^2)\bar{w}_\xi)}{1 + \eta_\xi^2 + \eta_\eta^2}. \quad (30)$$

Уравнение (30) представлено в форме, удобной для итераций, которые выполняются пока не будет выполнено условие:

$$\max |\tilde{w}^i - R^{i-1}| < 10^{-7}, \quad (31)$$

R — правая часть уравнения (30), i — номер итерации.

Основная идея представленной модели заключается в том, чтобы заменить сложный алгоритм расчёта вертикальной скорости простым двухмерным уравнением (30). Таким образом, трёхмерная задача сводится к двухмерной, что позволяет проводить вычисления значительно быстрее. Эволюционные уравнения (4), (5), (28) и (29) для обеих моделей не имеют принципиальных отличий. Разница проявляется в расчёте нелинейной поправки для полной вертикальной скорости, выраженной уравнениями (23) и (27).

4. Параметры модели

Наиболее надёжный способ проверки упрощённой модели заключается в проведении вычислений с одинаковыми начальными условиями и одинаковым набором параметров для обеих моделей. В работе обе модели запускались с разрешением 128×64 Фурье мод и 512×256 узлов.

Предполагается, что рассматривается случай так называемого квазистационарного режима. На самом деле, в нелинейном волновом поле всегда возникают флуктуации амплитуд волновых мод. Большая часть из них относится к обратимым флуктуациям, т.е. мгновенные спектры демонстрируют значительный разброс, который порождает разброс всех других характеристик. Для получения более или менее гладких данных обратимые флуктуации устраняются осреднением по временному ансамблю. Если осреднённые спектры различных характеристик не меняются во времени, процесс можно считать стационарным в статистическом смысле.

На практике, этот процесс никогда точно не реализуется, поскольку нелинейность порождает потоки энергии в сторону больших и малых волновых чисел. Поток в стороны больших чисел вызывает удлинение спектрального «хвоста», а противоположный поток смещает максимум волнового спектра — «дауншифтинг».

Оба эти процесса усиливаются с ростом нелинейности (характеризуемой, например, среднеквадратичным уклоном поверхности). «Дауншифтинг» вводит ограничение на длину рассматриваемого временного интервала. Удлинение спектрального «хвоста» приходится предотвращать введением предельного волнового числа. Это ограничение всегда приводит к быстрому росту энергии на предельных волновых числах, нелинейной неустойчивости и прекращению вычислений. Поэтому во всех спектральных моделях надо вводить высокочастотные фильтры, поглощающие избыток энергии и поддерживающие вычислительную устойчивость. Такую же роль играет, например, подсеточная вязкость в LES (Large Eddy Scale) моделях.

Для компенсации теряемой энергии в обе волновые модели вводится слабый приток энергии от ветра. Такой режим называется квазистационарным. Наиболее общая, но существенно нестационарная ситуация возникает при учёте сильного притока энергии от ветра и диссипации, происходящей при обрушении волн. Это всегда сопровождается ростом энергии и смещением спектра в область низких волновых чисел. Проблема развития волнового поля является центральной проблемой этого раздела геофизической гидродинамики.

Обмен энергией и импульсом между водой и воздухом осуществляется неоднородным распределением динамического давления на поверхности. Комплексные Фурье-компоненты давления на поверхности связаны с Фурье-компонентами возвышения коэффициентом пропорциональности, называемым β -функцией [13]. В настоящее время принято считать, что β -функция зависит от единственного параметра $\Omega = \omega_k U \cos \theta$ (где ω_k и U — безразмерные частота и скорость ветра соответственно, c_k — фазовая скорость k -ой моды; ψ — угол между направлениями ветра и этой модой). История исследования структуры β -функции насчитывает более полувека и большинство схем, рекомендованных для вычисления этой функции, основаны на сильно аналитических или даже умозрительных моделях. Исследование β -функции должно быть основано на одновременном воспроизведении полей возвышения η и поверхностного давления p . Объём полученных таким образом данных не позволяет пока построить β -функцию в достаточно широком диапазоне. Второй метод исследования β -функции заключается в численном моделировании взаимодействия волн и ветра [5]. Этот вариант алгоритма расчёта потока энергии к волнам был введён в прогностическую модель WAVEWATCH и используется с незначительными модификациями во всех моделях.

В обе модели также введен высокочастотный фильтр для обеспечения вычислительной устойчивости и алгоритм, учитывающий обрушение волн. Описание обрушения в прямом моделировании должно удовлетворять трём условиям: (1) предотвращать опрокидывание и следующее за ним вычислительную неустойчивость; (2) реалистично описывать потери локальной потенциальной и кинетической энергии; (3) сохранять объём. Параметризация обрушения быть основана на локальном высокоселективном диффузионном операторе с подходящим коэффициентом диффузии. Алгоритмы притока энергии и опрокидывания волн неоднократно были описаны в публикациях и монографии (см. [5]), поэтому их описание здесь отсутствует.

В качестве начальных условий задавался спектр JONSWAP [14] с волновым числом пика $k_p = 40$ и обратным возрастом волны $U/C_p = 1$ (U — скорость ветра, C_p — фазовая скорость волны пика). Шаг по времени равен $\Delta t = 0,01$, вычисления проводились для 10,000 временных шагов. Полная трехмерная модель волн использует 30 вертикальных уровней неравномерной сетки с коэффициентом растяжения $\gamma = 1,2$. На каждом временном шаге обе модели начинают итерации со значения вертикальной скорости с предыдущего временного шага.

5. Результаты

Объём генерируемой моделью информации превышает сотни гигабайт, поэтому специальная часть программных кодов была отведена выборке, сжатию и предварительной оперативной обработке запоминаемых данных. Процесс разбивался на порции, каждая длиной $\delta t = 10$ (что соответствует примерно 100 периодов волны в пике спектра $T_p = 2\pi k_p^{-1/2} \approx 0,99$). Суммы двухмерных спектров различных характеристик накапливались с интервалом $\delta t = 0,1$. Осреднённый по 100 реализациям спектр записывался по окончании порции. Каждый из этих спектров, рассчитанных в 3D-модели, изображён на рис. 1 серыми кривыми. Такой же ансамбль, полученный с 2D-моделью, выглядит совершенно аналогично и на представленном рисунке не приводится. Сплошная и пунктирная кривые дают осреднённые по всему периоду вычислений (т. е. по 1000 реализациям) спектры для 3D и 2D-моделей соответственно.

Некоторые спектральные характеристики волнового поля, полученные по результатам расчётов по полной трёхмерной и ускоренной моделям, представлены на рис. 1. Все спектры были переведены в полярную систему координат (r, θ) ($r = |k|$ — модуль волнового числа, θ — угол) и затем проинтегрированы по углу.

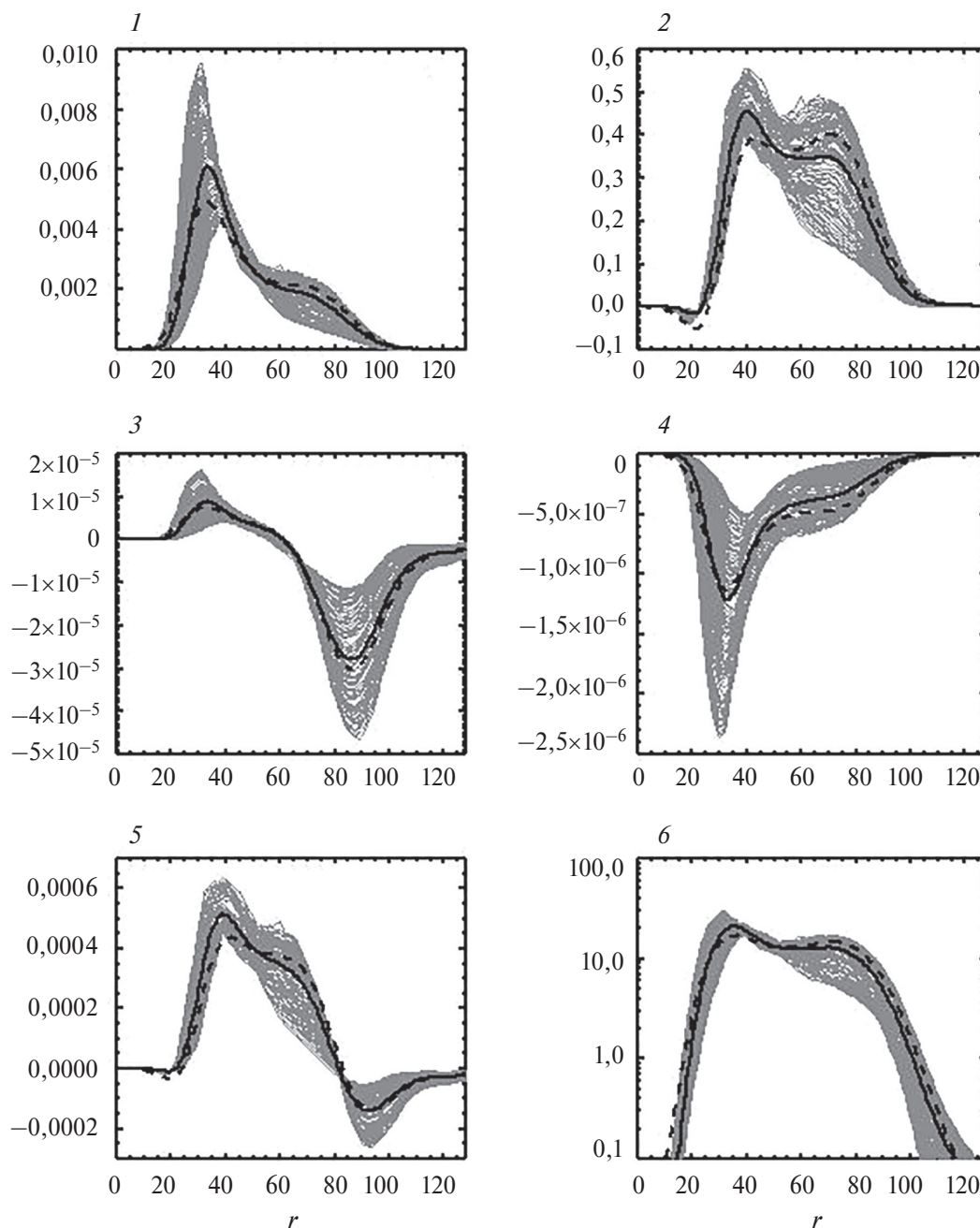


Рис. 1. 1D-спектры: 1) волн $10^4 S(r)$; 2) притока энергии $10^9 S_i(r)$; 3) диссипации хвостовой части спектра $10^5 S_t(r)$; 4) диссипации за счет обрушения волн $10^5 S_b(r)$; 5) баланса энергии $10^6 (S_b(r) + S_t(r) + S_i(r))$; 6) вертикальной скорости на поверхности $10^6 S_w(r)$. Серые кривые показывают разброс спектров, рассчитанных по полной 3D-модели (всего 100 кривых). Сплошная кривая — осреднённый по всему периоду вычислений (10,000 временных шагов) спектр, полученный по полной 3D-модели, пунктирная кривая — то же для ускоренной 2D-модели волн

Fig. 1. 1-D spectra of: 1) wave $10^4 S(r)$; 2) energy input $10^9 S_i(r)$; 3) tail dissipation $10^5 S_t(r)$; 4) breaking dissipation $10^5 S_b(r)$; 5) energy balance $10^6 (S_b(r) + S_t(r) + S_i(r))$; 6) vertical velocity on the surface $10^6 S_w(r)$. The grey curves demonstrate the scatter of the spectra calculated with the full 3-D model (100 curves in total). The solid curve is the spectrum averaged over the entire period of simulation (10,000 time steps), obtained from the full 3-D model, the dotted curve is the same but for the 2-D accelerated model

Как видно из рис. 1 (панель 1), волновые спектры, полученные по двум версиям модели, оказались в целом похожи. Расхождения между результатами, полученными по двум моделям, находятся в пределах дисперсии каждой характеристики, поэтому их нельзя считать существенными. При подобных сравнениях

надо принимать во внимание, что в сильно нелинейной системе процесс всегда сопровождается сильными флуктуациями, которые могут быть инициированы и усилены небольшими модификациями в формулировке модели.

Спектральное распределение притока энергии (*панель 2*) как правило повторяет по форме волновой спектр, поскольку линейно зависит от спектральной плотности. Как можно отметить, основные особенности в форме спектров притока энергии, полученных по полной и ускоренной моделям, похожи между собой. Аналогично волновому спектру, для спектра притока энергии наблюдается второй максимум на интервале $k = 60\text{--}80$.

Алгоритм расчёта диссипации хвостовой части спектра описывает физический процесс диссипации для крутых коротких волн. Диссипация хвостовой части спектра на порядки меньше остальных членов, входящих в общий баланс энергии, однако она играет важную роль в стабилизации численного решения. Как видно (*панель 3*), спектры диссипации для двух вариантов моделей совпадают по форме.

Обе модели показывают, что обрушение происходит при малых волновых числах (*панель 4*). Этот эффект нельзя понимать буквально. В действительности, опрокидываются вершины больших волн, но из-за того, что процесс происходит в виде импульсов, их спектр распространяется в область высоких волновых чисел. Однако полная трёхмерная модель показывает несколько более интенсивное обрушение, чем в ускоренной модели. Основные особенности спектров баланса энергии (*панель 5*) для полной и ускоренной моделей схожи между собой. Аналогичный результат показывает и наиболее важная характеристика, на которой основана двухмерная схема — спектр вертикальной скорости (*панель 6*).

В целом, данные, полученные для обеих моделей, показывают значительное сходство. Подобный результат является предсказуемым, поскольку обе модели основаны на одних и тех же эволюционных уравнениях и отличаются способом сравнительно небольшой нелинейной коррекции вертикальной скорости.

6. Заключение

В ранее опубликованных работах был предложен новый подход к фазо-разрешающему моделированию двухмерных периодических волн на бесконечной глубине. Основная идея такого подхода следует из представления потенциала скорости как суммы линейной и нелинейной компонент [15]. Такой подход позволяет упростить вычисления, рассматривая двухмерное уравнение Пуассона на поверхности.

Значимым преимуществом ускоренной модели является отсутствие расчёта трёхмерной структуры потенциала скорости, что увеличивает скорость расчётов примерно на два порядка. Модель можно использовать для долгосрочного моделирования многомодового волнового поля.

Поскольку введение нового более эффективного подхода является важным шагом в прямом моделировании волн, было решено посвятить данную работу проведению дополнительных исследований и сравнению результатов расчётов по ускоренной двухмерной модели с аналогичными результатами, полученными по полной трёхмерной модели.

Большая часть статьи посвящена демонстрации и анализу различных спектральных характеристик, полученных с помощью полной трёхмерной модели полной волны и ускоренной модели. Пошаговое сравнение счета по ускоренной и полной моделям, которые запускались с одинаковыми начальными условиями, демонстрирует, что решения согласуются на тысячах временных шагов. Приведённые в статье спектры (рис. 1–5) подтверждают, что результаты, полученные двумя моделями достаточно близки.

Настоящая статья отражает текущее состояние исследований по разработке более экономной с вычислительной точки зрения модели ветровых волн. В настоящий момент эта работа продолжается и испытываются новые варианты замыкания системы уравнений. Следует также подчеркнуть, что ускоренная модель не предназначена для полной замены ею точной трёхмерной модели. Сложность трёхмерной модели практически ограничивает возможности фазо-разрешающего моделирования с учётом физических процессов: взаимодействия волн с ветром и течениями, опрокидыванием волн и другими. В действительности, каждый из этих процессов более сложен, чем волновое движение. Например, для параметризации притока энергии от ветра к волнам требуется соединение по меньшей мере двухмерной фазо-разрешающей волновой модели с моделью волнового пограничного слоя, основанной на уравнениях Рейнольдса и тоже достаточно длительные расчёты (см. [5]). Даже когда схема разработана, для её внедрения в фазо-разрешающую модель требуется проведение десятков численных экспериментов. Эта возможность для трёхмерной модели совершенно исключена, но вполне реализуема для двухмерной модели, которая воспроизводит волны достаточно реалистично.

Благодарности

Автор выражает благодарность и признательность д. ф.-м. н., профессору Дмитрию Викторовичу Чаликову за помощь и ценные советы при работе над данной статьей.

Финансирование

Работа проводилась при поддержке Российского Научного Фонда (проект № 22-21-00139).

Funding

The research was supported by Russian Science Foundation RSF (project No. 22-21-00139).

Литература

1. *Chalikov D., Sheinin D.* Direct modeling of one-dimensional nonlinear potential waves // *Nonlinear Ocean Waves. Series: Advances in Fluid Mechanics*. Vol. 17 / Ed. by W. Perrie. Southampton: Computational Mechanics, 1998. P. 207–258.
2. *Dommermuth D., Yue D.* A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves // *Journal of Fluid Mechanics*. 1987. Vol. 184. P. 267–288. doi:10.1017/S002211208700288X
3. *West B., Brueckner K., Janda R., Milder M., Milton R.* A new numerical method for surface hydrodynamics // *Journal of Geophysical Research*. 1987. Vol. 92. P. 11803–11824. doi:10.1029/JC092IC11P11803
4. *Захаров В.Е.* Устойчивость периодических волн на поверхности глубокой жидкости // *Прикладная механика и техническая физика*. 1968. № 2. С. 86–94.
5. *Chalikov D.* Numerical modeling of sea waves. Springer, 2016. 330 p.
6. *Beale J.T.* A convergent boundary integral method for three-dimensional water waves // *Mathematic of Computation*. 2000. Vol. 70. No. 235. P. 977–1029.
7. *Clamond D., Grue J.* A fast method for fully nonlinear water wave dynamics // *Journal of Fluid Mechanics*. 2001. Vol. 447. P. 337–355. doi:10.1017/S0022112001006000
8. *Чаликов Д.В.* Различные подходы к моделированию морских волн // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2022. Т. 15, № 1. С. 19–32. doi:10.48612/fpg/u1df-mlx7–1bxx
9. *Chalikov D.* A two-dimensional approach to the three-dimensional phase resolving wave modeling // *Examines in marine biology & oceanography*. 2021. Vol. 4(1), EIMBO.000576. doi:10.31031/EIMBO.2021.04.000576
10. *Chalikov D.* Accelerated reproduction of 2-D periodic waves // *Ocean Dynamics*. 2021. 71(4). P. 309–322. doi:10.1007/s10236-020-01435-8
11. *Чаликов Д.* Двумерное моделирование трехмерных волн // *Океанология*. 2021. Т. 61, № 6. С. 913–924. doi:10.31857/S0030157421060046
12. *Chalikov D.* A 2D model for 3D periodic deep-water waves // *Journal of Marine Science and Engineering*. 2022. 10, 410. doi:10.3390/jmse10030410
13. *Miles J.W.* On the generation of surface waves by shearflows // *Journal of Fluid Mechanics*. 1957. Vol. 3, Iss. 2. P. 185–204. doi:10.1017/S0022112057000567
14. *Hasselmann K., Barnett T.P., Bouws E., Carlson H., Cartwright D.E., Enke K., Ewing J.A., Gienapp A., Hasselmann D.E., Kruseman P.* et al. Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint Sea Wave Project (JONSWAP) // *Ergaenzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift Reihe A* 1973, A8, P. 1–95.
15. *Chalikov D., Babanin A., Sanina E.* Numerical modeling of three-dimensional fully nonlinear potential periodic waves // *Ocean Dynamics*. 2014. Vol. 64, 10. P. 1469–1486. doi:10.1007/s10236-014-0755-0

References

1. *Chalikov D., Sheinin D.* Direct modeling of one-dimensional nonlinear potential waves. *Nonlinear Ocean Waves. Series: Advances in Fluid Mechanics*. Vol. 17 / Ed. by W. Perrie. Southampton: Computational Mechanics, 1998, 207–258.
2. *Dommermuth D., Yue D.* A high-order spectral method for the study of nonlinear gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*. 1987, 184, 267–288. doi:10.1017/S002211208700288X
3. *West B., Brueckner K., Janda R., Milder M., Milton R.* A new numerical method for surface hydrodynamics. *Journal of Geophysical Research*. 1987, 92, 11803–11824. doi:10.1029/JC092IC11P11803
4. *Zakharov V.E.* Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of deep fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1968, 9(2), 190–194. doi:10.1007/BF00913182

5. Chalikov D. Numerical modeling of sea waves. *Springer*, 2016. 330 p.
6. Beale J.T. A convergent boundary integral method for three-dimensional water waves. *Math. Comput.* 2001, 70, 977–1029.
7. Clamond D., Grue J. A fast method for fully nonlinear water wave dynamics. *Journal of Fluid Mechanics*. 2001, 447, 337–355. doi: 10.1017/S0022112001006000
8. Chalikov D.V. Different approaches to numerical modeling of sea waves. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2022, 15(1), 19–32. doi.org/10.48612/fpg/uldf-m1x7–1bxg
9. Chalikov D. A two-dimensional approach to the three-dimensional phase resolving wave modeling. *Examines in Marine Biology & Oceanography*. 2021, 4(1), EIMBO.000576. doi:10.31031/EIMBO.2021.04.000576
10. Chalikov D. Accelerated reproduction of 2-D periodic waves. *Ocean Dynamics*. 2021, 71(4), 309–322. doi:10.1007/s10236-020-01435-8
11. Chalikov D. Two-dimensional modeling of three-dimensional waves. *Oceanology*. 2021, 61(6), 850–860. doi: 10.1134/S0001437021060047
12. Chalikov D. A 2D model for 3D periodic deep-water waves. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2022, 10, 410. doi:10.3390/jmse10030410
13. Miles J.W. On the generation of surface waves by shearflows. *Journal of Fluid Mechanics*. 1957, 3(2), 185–204. doi:10.1017/S0022112057000567
14. Hasselmann K., Barnett R.P., Bouws E. Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint Sea Wave Project (JONSWAP). *Deutsches Hydrogr. Inst.* 1973, 95 p.
15. Chalikov D., Babanin A., Sanina E. Numerical modeling of three-dimensional fully nonlinear potential periodic waves. *Ocean Dynamics*. 2014, 64(10), 1469–1486. doi:10.1007/s10236-014-0755-0

Об авторе

ФОКИНА Карина Владимировна, ORCID ID: 0000-0003-1826-0452, fokinakarina@yandex.ru