

УДК 551.465

© В. Г. Гневывшев<sup>1</sup>, В. С. Травкин<sup>2</sup>, Т. В. Белоненко<sup>2\*</sup>, 2023

<sup>1</sup>Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, 117997, Россия, Москва, Нахимовский проспект, 36.

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9.

\*btvlibab@yandex.ru

## ТОПОГРАФИЧЕСКИЙ ФАКТОР И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ В УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ СУБИНЕРЦИОННЫХ ВОЛН

Статья поступила в редакцию 29.09.2022, после доработки 08.11.2022, принята в печать 08.12.2022

### Аннотация

Рассматриваются топографические субинерционные волны, распространяющиеся на шельфе и океаническом желобе. На фоне обзора истории исследования топографических волн и появления соответствующих терминов авторы дают описание особенностей распространения этих волн и вывод основных дисперсионных уравнений. Показано, что все варианты представленных в статье решений в основе своей базируются на одном и том же дисперсионном соотношении — это дисперсионное соотношение для топографических волн Россби. Построены два класса локализованных решений: одно для шельфовых волн, второе, фактически, тоже шельфовое, но его принято называть желобовыми волнами. Показано, что для желобовых волн поперечное волновое число не является независимым, как для шельфовых волн, а является функцией от продольного волнового числа. Другими словами, топографические волны Россби — это всегда двумерные волны, в то время как шельфовые волны представлены квазиодномерными решениями. Аналитическая новизна работы состоит в том, что в ней удалось произвести сшивки желобовых и шельфовых волн, которые ранее отсутствовали в работах по данной тематике.

**Ключевые слова:** шельф, океанский желоб, волны топографические, шельфовые, желобовые, сшивки решений

© V. G. Gnevyshev<sup>1</sup>, V. S. Travkin<sup>2</sup>, T. V. Belonenko<sup>2\*</sup>, 2023

<sup>1</sup>Shirshov Institute of Oceanology, Russian Academy of Sciences, 36 Nakhimovsky Prosp., Moscow, 117997, Russia

<sup>2</sup>St. Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg, 199034, Russia

\*btvlibab@yandex.ru

## TOPOGRAPHIC FACTOR AND LIMIT TRANSITIONS IN THE EQUATIONS FOR SUB-INERTIAL WAVES

Received 29.09.2022, Revised 08.11.2022, Accepted 08.12.2022

### Abstract

In this paper, sub-inertial waves propagating on the Kuril shelf and the oceanic trench are considered. Against the background of a historical review of the beginning of the study of topographic waves and the appearance of relevant terms, a description of the features of wave propagation and the derivation of the main dispersion equations are given. We show that all variants of the topographic solutions presented in the article are basically based on the same dispersion relation: this is the dispersion relation for Rossby topographic waves. Two separate classes of localized solutions have been constructed: one is for the shelf, and the second, in fact, is also for the shelf, but which is commonly called trench waves. We demonstrate that the transverse wave number for trench waves is not independent, as for shelf waves, but is a function of the longitudinal wave number. In other words, Rossby topographic waves are two-dimensional waves, while shelf waves are quasi-one-dimensional solutions. The analytical novelty of the work consists of the fact that we can make crosslinking of trench and shelf waves. This fact was not presented in previous articles on this topic.

**Keywords:** shelf, ocean trench, topographic waves, shelf waves, trench waves, crosslinking solutions

### 1. Введение

В последние годы появилось множество исследований, в которых изучаются различные классы субинерционных волн в океане в областях, для которых характерны значительные изменения донной топографии (см., например, [1–5]). Для этих районов океана наблюдается захват волновой энергии крупно-

---

Ссылка для цитирования: Гневывшев В.Г., Травкин В.С., Белоненко Т.В. Топографический фактор и предельные переходы в уравнениях для субинерционных волн // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2023. Т. 16, № 1. С. 8–23. doi:10.48612/fpg/92rg-6t7h-m4a2

For citation: Gnevyshev V.G., Travkin V.S., Belonenko T.V. Topographic Factor and Limit Transitions in the Equations for Sub-inertial Waves. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2023, 16, 1, 8–23. doi:10.48612/fpg/92rg-6t7h-m4a2

масштабными топографическими изменениями. Резкие изменения глубины в открытом океане приводят к появлению «топографических» волн, которые по своему характеру аналогичны шельфовым волнам, образующимся в зоне шельфа-континентального склона [6]. Сравнительный анализ вклада различных факторов в дисперсионные уравнения показывает, что топографический фактор является доминирующим [2–5, 7, 8]. Шельфовые волны — важнейший вид субинерционных колебаний, играющий важную роль в изменчивости уровня океана в синоптическом диапазоне частот [6, 9].

В областях глубоководных желобов образуется другой вид субинерционных колебаний, распространение которых вдоль океанской стороны желоба формирует систему желобовых волн. Термин «желобовые волны» впервые был использован Майсеком [10] для исследования субинерционных волн, распространяющихся в океанских желобах (Курильский, Японский, Японо-Курильский, Чилийский, Перуанский). В математической модели желобовых волн двумерная топография принимается однородной вдоль склона желоба и имеет конечные масштабы поперечной изменчивости.

Для описания линейных желобовых волн используется математическая модель, в основе которой лежит линейное уравнение Шредингера с дополнительными граничными условиями, которые приводят к квантованию поперечного волнового числа. Решение строится в тригонометрической форме (синус), локализованным поперек топографической особенности, и монохроматической плоской волны, бегущей вдоль топографической особенности — склона желоба. Отметим, что решение типа «двойная волна Кельвина», для которого в топографическом профиле используется две экспоненты, не рассматривается в модели желобовых волн [10].

Если производная профиля глубины шельфа знакопостоянна, тогда математически задача позволяет произвести анализ краевой задачи в общем виде и сформулировать определенные теоремы спектральной задачи [6]. Решения этой задачи называются «шельфовыми волнами» [11].

Если производная профиля глубины шельфа меняет знак при удалении от берега (океанический желоб), тогда математический анализ существенно усложняется. Для топографии типа «желоб» строятся частные классы кусочно-гладких аналитических решений, которые условно называются «желобовые волны». Особенностью многих океанических желобов является их близкое расположение к береговой черте, тем самым области шельфа и континентального склона объединяются и примыкают к внутренней части желоба (рис. 1). В дальнейшем будем называть внутреннюю часть желоба, состоящую из шельфа и континентального склона, достигающего максимальной глубины желоба, «желобовым шельфом». Другая сторона желоба — океаническая — имеет меньшую изменчивость по глубине и, как правило, большую крутизну [12]. Таким образом, при построении математической модели желобовых волн все физическое полубесконечное пространство условно разбивается на три области: 1) желобовый шельф, где глубина океана увеличивается; 2) океаническая часть желоба, где глубина океана уменьшается, а производная функции, описывающей глубину, меняет знак; 3) открытый океан, где глубина океана постоянна и конечна.

Так как в модели желобовых волн Майсека [10] рассматриваются только субинерционные колебания, и частота вращения Земли считается постоянной (отсутствует  $\beta$ -эффект), а также отсутствуют сдвиговые течения, то в открытой части океана решение всегда носит чисто затухающий экспоненциальный характер, и это решение иногда называют «экспоненциальный хвост».

Будем рассматривать волновые движения на  $f$ -плоскости, т. е.

$$f = \text{const.} \quad (1.1)$$

Постоянство частоты вращения Земли уничтожает волны с частотами меньше частоты вращения самой Земли. Таким образом, в открытой части океана субинерционные волновые колебания подавляются. Этот факт впервые отметил Лонге-Хиггинс [13, 14].

Кроме того, в модели желобовых волн Майсека [10] ищутся субинерционные колебания с пространственными масштабами сотни километров, однако не учитывается  $\beta$ -эффект в открытой части океана, т. е. строится строго замкнутая система волн, а из задачи фактически исключаются волны Россби, падающие на шельф из открытой части океана. Последнее является главным недостатком данной модели. Согласно теории [10, 11, 15], желобовые волны можно представить в виде двух частных решений:

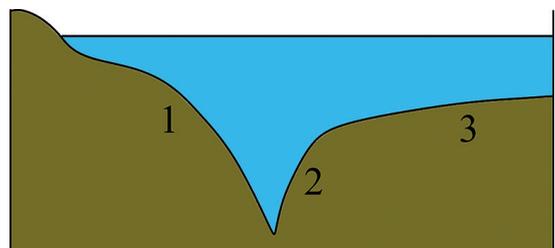


Рис. 1. Профиль океанического желоба: 1 — желобовый шельф (шельф + континентальный склон), 2 — океаническая часть желоба, 3 — открытый океан

Fig. 1. Profile of the oceanic trench: 1 — trench shelf (shelf + continental slope), 2 — oceanic part of the trench, 3 — open ocean

1) шельфовые волны: решение локализовано на шельфовой части желоба, при этом в направлении от шельфа в сторону открытого океана это решение можно представить как колебание—затухание—затухание; 2) желобовые волны: решение локализовано на океанической части желоба, это решение можно представить как затухание—колебание—затухание. Принципиально важным моментом является то, что хотя бы в одной части профиля в модели желобовых волн (напомним, что существует три части профиля — желобовый шельф, желоб, открытый океан) должно быть колебательное решение. В решении обязательно должен присутствовать синус, в двух других — затухающие экспоненты, а в открытой части океана — экспоненциальный хвост [10]. В этом случае, как показано в работе [10], шельфовая часть решения асимптотически сшивается с шельфовой волной Бухвальда и Адамса [16], если в модели устранить океаническую желобовую часть топографии и устремить ее ширину к нулю. Однако, действуя аналогично для желобовой части решения и устремляя ширину уже шельфовой части топографии к нулю, авторы [10] не смогли сшить желобовое решение с внутренней шельфовой волной Бухвальда и Адамса. Они просто не стали анализировать данный факт, сославшись на малый интерес к данному классу решений. В результате вопрос: сшиваются или не сшиваются желобовые волны [10] с решением Бухвальда и Адамса [16], остался открытым. В данной работе мы устраним этот недостаток и покажем, что желобовое решение [10] сшивается с внутренней шельфовой волной Бухвальда и Адамса. Для этого требуется не устремлять к нулю ширину шельфовой части топографии (желобовый шельф), помещая твердую стенку в центр желоба, как это делали [10], а, наоборот, отодвинуть ее бесконечно далеко. В результате анализ желобовых волн приобретает логичный и законченный характер.

Таким образом, мы формулируем цель исследования: покажем, что решение «желобовые волны Майсека» асимптотически сшивается с топографической и внутренней топографической волнами Бухвальда и Адамса. Специфика заключается в способе предельного перехода: для сшивки океанической части желобового решения Майсека с внутренней шельфовой волной Бухвальда и Адамса нужно устремить к нулю желобовую часть решения или, наоборот, устремить ширину желоба к бесконечности с одновременным стремлением крутизны шельфа к нулю. А для сшивки желобовой волны с внутренней топографической волной Бухвальда и Адамса нужно также бесконечно отодвигать границу, расширяя область шельфа и устремляя к нулю крутизну шельфа.

Настоящая работа построена следующим образом. Во втором разделе мы приводим основные уравнения и даем дисперсионные соотношения для топографических волн Россби. Далее мы идем от простого к сложному: сначала в третьем разделе приводим решение Бухвальда и Адамса, которое впоследствии становится асимптотиками более сложного решения Майсека. Затем, в четвертом разделе, мы приводим решение Майсека [10] для желобовых волн, попутно устраняя множество опечаток в его работе, и успешно сшиваем асимптотически решение Майсека с решением Бухвальда и Адамса. В результате мы доказываем, что решение Бухвальда и Адамса — это асимптотики решения Майсека [10].

Центральной идеей статьи, которая обсуждается в следующих трех разделах (5–7), является утверждение, что все варианты представленных в статье топографических решений в основе своей базируются на одном и том же дисперсионном соотношении — это дисперсионное соотношение для топографических волн Россби. Мы показываем, что такой подход сильно упрощает восприятие обсуждаемых в работе разных топографических моделей.

## 2. Постановка задачи. Основные уравнения

Теоретическим базисом для описания желобовых волн являются линеаризованные баротропные уравнения мелкой воды в приближении «твердой крышки» с учетом топографии [6, 10]:

$$u_t - fv + \rho^{-1}p_x = 0, \quad (2.1)$$

$$v_t + fu + \rho^{-1}p_y = 0, \quad (2.2)$$

$$(Hu)_x + (Hv)_y = 0. \quad (2.3)$$

Следуя работе [10], принимаем условие геострофики, тем самым отфильтровывая высокочастотный непрерывный спектр волн Пуанкаре, а также краевые волны:

$$u = -\Psi_y/H, \quad v = -\Psi_x/H. \quad (2.4)$$

При этом используются следующие обозначения:  $u$  и  $v$  — компоненты скорости в  $x$  и  $y$  направлениях,  $\Psi$  — функция тока,  $H$  — глубина,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность воды,  $f$  — параметр Кориолиса. Принята классическая правая система координат, оси  $x$ ,  $y$  направлены поперек желоба (в сторону от берега (при  $x = -L_1$ )) и вдоль желоба, соответственно.

Подставляя (2.4) в (2.1) и (2.2) (уравнение (2.3) при этом выполняется автоматически) и рассматривая решения волнового характера вдоль топографической особенности (склона желоба)

$$\Psi = \Psi(x)\exp i(ky - \omega t), \quad (2.5)$$

получаем следующее линейное однородное одномерное уравнение:

$$\left(\frac{\Psi_x}{H}\right)_x + \left[\frac{fk}{\omega}\left(\frac{1}{H}\right)_x - \frac{k^2}{H}\right]\Psi = 0, \quad (2.6)$$

где  $k$  — продольная компонента волнового числа, которая строго вещественна и, согласно [10], строго положительна,  $\omega$  — частота волны, которая также вещественна и может принимать, как положительные, так и отрицательные значения. Соответственно, в зависимости от знака, получаются разные направления фазовой скорости. Заметим, что, в отличие от данного подхода, в монографии [6], наоборот,  $\omega$  всегда положительна, но волновое число  $k$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, разные направления распространения волн — северо-восточное или юго-западное — достигается за счет разного знака волнового числа.

Условия сшивок при  $x = 0$  (центр желоба — это точка максимальной глубины на профиле) и  $x = L_2$  (граница желоба со стороны открытого океана) имеют вид:

$$[\Psi] = 0, \quad x = 0, \quad x = L_2, \quad (2.7)$$

$$\left[\frac{\Psi_x + (fk/\omega)\Psi}{H}\right] = 0, \quad x = 0, \quad x = L_2. \quad (2.8)$$

Условие (2.8) для непрерывной модели топографии принимает вид:

$$[\Psi_x] = 0, \quad x = 0, \quad x = L_2. \quad (2.9)$$

Также в области шельфа ставится условие непротекания (в точке  $x = -L_1$  нет переноса через береговую линию) [10]:

$$[\Psi] = 0, \quad x = -L_1 \quad (2.10)$$

и затухания на бесконечности:

$$\Psi \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

### ***Дисперсионное соотношение для топографической волны Россби на экспоненциальном профиле топографии***

Классической заменой  $\Psi = H^{1/2}$  в уравнении (2.6) можно убрать первую производную [3, 9] и привести указанное уравнение к уравнению с классическим потенциалом гармонического осциллятора. Наиболее успешной и простой для анализа моделью океанического желоба является модель с экспоненциальным профилем топографии при аналитическом подходе и модель со ступенчатым профилем для численного счета. Существуют и другие частные случаи параметризации топографии, когда можно получить безотражательные решения [17, 18], и решения в терминах вырожденных гипергеометрических функций [19].

Для классической топографической волны Россби на экспоненциальном профиле топографии  $H = H_0 \exp(-x/L)$ ,  $L$  — ширина шельфа, решение ищется в форме  $\Psi = H^{1/2} \exp[i(k_1x + k_2y - \omega t)]$ , где  $k_1$  и  $k_2$  — поперечное (поперек желоба) и продольное волновые числа. Тогда дисперсионное соотношение имеет вид [3, 9]:

$$\omega = \frac{-(\beta_0 + f/L)k_2}{k_1^2 + k_2^2 + 1/4L^2}, \quad (2.12)$$

где  $\beta_0$  — параметр  $\beta$ -плоскости.

Основная идея данной работы состоит в том, что все разновидности субинерционных топографических волн, включая шельфовые и желобовые волны, вытекают именно из этого дисперсионного соотношения. И поэтому соотношение (2.12) мы предлагаем называть общим дисперсионным соотношением на экспоненциальном профиле топографии (см. также [4, 5]).

Исторически первыми, кто построил аналитическую модель субинерционных топографических волн, были Бухвальд и Адамс [16]. В своей работе они проанализировали две качественно разных модели топографических волн: шельфовые волны и внутренние шельфовые волны. Принципиальным отличием внутренней шельфовой волны от обычной шельфовой волны является наличие бесконечно протяженного океана конечной глубины. Эта дополнительная степень свободы приводит к появлению некоей особенности в поведении нулевой моды, анализ которой становится крайне чувствительным в длинноволновом пределе. Последнее может объясняться тем, что первая мода или переходит в двойную волну Кельвина, или обе волны имеют близкие дисперсионные кривые в длинноволновом диапазоне. Забегая вперед, отметим, что Бухвальд и Адамс увидели в предельном переходе определенные трудности, и рассмотрели разные его варианты. Одновременно Лонге-Хиггинс [13] проводит крайне трудоемкий анализ с применением разложений более высокого порядка, чтобы достичь физически правильного поведения частоты (стремления частоты к нулю при стремлении к нулю волнового числа). В то же время другие авторы, в частности [6, 10, 11], идут другим путем, применяя численный счет, и показывают абсолютно гладкие дисперсионные кривые, в том числе и для первой моды. Такой подход не означает, что применяемый анализ неверный, а свидетельствует, скорее, о том, что в длинноволновом пределе возможны разные варианты, и результат зависит от того, что именно пытается найти автор, учитывая, по какой схеме численно считается краевая задача.

Переходим к описанию первой и самой простой модели топографических волн Россби.

### 3. Шельфовые волны Бухвальда и Адамса

Модель топографии в модели [16] принимается в следующем экспоненциальном виде (рис. 2):

$$\begin{aligned} H_1 &= H_0 \exp(2bx), & 0 < x \leq 1, \\ H_2 &= H_0 \exp(2b), & x > 1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Решение ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A \sin mx \exp b(x-1), & 0 < x < 1, \\ \Psi_2 &= A \sin m \exp[-k(x-1)], & x \geq 1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где полагаем  $k > 0$ . Тогда дисперсионное соотношение (2.12) примет вид:

$$\omega = \frac{-2f b k}{k^2 + m^2 + b^2}. \quad (3.3)$$

Амплитуда волны в этом случае экспоненциально затухает с одинаковой скоростью по обе стороны от разрыва. Далее, используя сшивки производных функций, получаем условие на поперечное волновое число:

$$\tan m = -\frac{m}{k+b}. \quad (3.4)$$

В дальнейшем анализе будет рассматриваться сшивка шельфовых и желобовых волн.

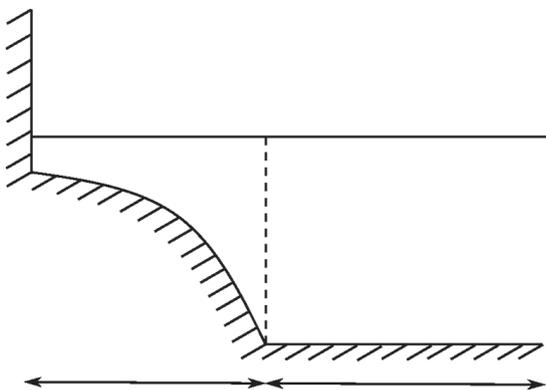


Рис. 2. Профиль топографии в модели Бухвальда и Адамса [16]

Fig. 2. Topography profile in Buchwald and Adam's model [16]

#### *Внутренние шельфовые волны Бухвальда и Адамса*

В модели желобовых волн Майсека [10] предполагается, что ширина шельфа конечна и что шельф у берега выходит на конечную глубину. Однако, если предположить, что левая граница модели имеет конечную глубину и при этом отодвигается на бесконечность, то тогда граничное условие непротекания (2.10) заменяется на условие затухания (2.11). Такой тип топографии называется «крутой подводный откос» или просто «подводный откос» ([9], п. 24, стр. 311). В модели принимается приближение «твердой крышки», при этом рассматриваются волны с длинами меньше баротропного радиуса Россби. Фаза, связанная с каждой из собственных функций, распространяется так, что мелкая вода остается справа (в северном полушарии). Можно также показать, что эти волны обладают дисперсией. По мере приближения ширины шельфа к нулю все более высокие моды сводятся к установившимся течениям.

Следуя работе [16], примем следующую экспоненциальную модель топографии (рис. 3):

$$\begin{aligned} H_1 &= h_1, \quad x \leq 0, \\ H_2 &= h_1 \exp 2bx, \quad 0 \leq x \leq L_2, \\ H_3 &= h_1 \exp 2bL_2, \quad L_2 \leq x < \infty. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Решение ищется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A_1 \exp(|k|x), \quad x \leq 0, \\ \Psi_2 &= (A_2 \sin mx + A_3 \cos mx) \exp(bx), \quad 0 \leq x \leq L_2, \\ \Psi_3 &= A_4 \exp(-|k|(x - L_2)), \quad L_2 \leq x < \infty. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Снова используя дисперсионное соотношение для топографических волн Россби, получаем

$$\omega_n = \frac{-2f b k}{k^2 + l_n^2(k) + b^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Из условий сшивков получаем следующее условие на определение  $l_n(k)$ :

$$\tan L_2 l_n = -\frac{2l_n |k|}{l_n^2(k) + b^2 - k^2}, \quad (3.8)$$

где  $n$  — номер моды.

Анализ, выполненный в работе [16], показывает, что внутренние шельфовые волны практически совпадают с «обычными» шельфовыми волнами, но за исключением нулевой моды. Нулевая мода внутренних шельфовых волн обладает некой спецификой: ее внутреннее поперечное волновое число  $l$  при малых продольных волновых числах  $k$  становится чисто мнимым  $l = i l_0$ . Соответственно, уравнение (3.8) принимает вид:

$$\tanh L_2 l_0 = \frac{2l_0 |k|}{b^2 - l_0^2 - k^2}. \quad (3.9)$$

При этом частота нулевой моды стремится не к нулю, как это происходит у всех других мод топографических волн Россби, а к частоте вращения Земли [16], что выглядит несколько странным. Забегая вперед, отметим, что Лонге-Хиггинс [13, 14] получил другой результат, и ниже мы это покажем. При учете дивергентности частота, как и во многих физических моделях, стремится к нулю, и в результате получаются классические длинные волны. В предельном переходе, при стремлении ширины топографической особенности к нулю:  $L_2 \rightarrow 0$ ,  $b \rightarrow 0$ ,  $bL_2 = 1/2 \ln(H_1/H_3)$ , эта нулевая мода, согласно [16], переходит в двойную бездивергентную волну Кельвина. Для этой моды решение над топографической особенностью носит уже не синусоидальный, а экспоненциальный характер. Термин «двойная волна Кельвина» принадлежит Лонге-Хиггинсу [14].

Однако и это принципиально важно: двойная волна Кельвина появляется в задаче о внутренних шельфовых волнах именно как предельный переход нулевой моды при переходе к типу топографии в виде ступеньки и не имеет никакого отношения к желобовым волнам Майсека. Отметим также, что в задаче появляется характерный масштаб для нулевой моды  $k_0 = \left(\sqrt{1 + b^2 L_2^2} - 1\right) / L_2$ . Это масштаб смены решения в нулевой моде, когда синусоидальное решение над желобом переходит в двойное экспоненциальное, т. е. двойную волну Кельвина. Ниже будет показано, что близкий масштаб будет рассматриваться в следующем разделе. Для Курильского желоба, например, величина  $bL_2 = 0,2332$ , (см. табл. 1 [10]); расчеты длины волны дают волновое число  $k_0 = 5 \times 10^{-4} \text{ км}^{-1}$ , что соответствует длине волны примерно 13000 км. Это слишком большая величина, и появление неустойчивости носит чисто теоретический характер.

#### 4. Желобовые волны Майсека

В желобовых волнах Майсека [10] желобовое решение сильно локализовано над топографической особенностью только со стороны шельфа. Значение собственной функции на берегу имеет порядок  $10^{-3}$  от значения над топографией [6]. Поэтому для нее замена левого граничного условия непротекания на затухание физически не должна оказывать существенного влияния. Для желобовой волны более важную роль играет наличие бесконечно протяженного открытого океана конечной глубины.

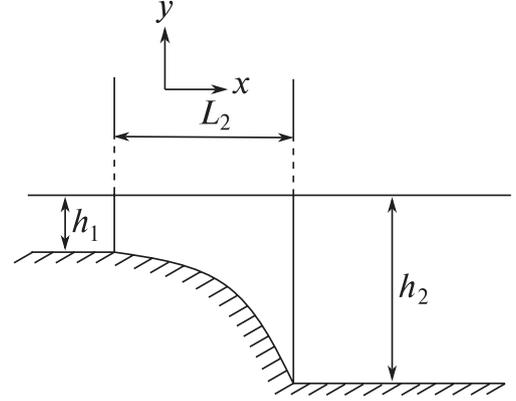


Рис. 3. Модель топографии Бухвальда и Адамса [16]

Fig. 3. Buchwald and Adams topography model [16]

В этой модели рассматривается более сложная конфигурация, которая по сути состоит из двух видов волн. В ней объединены шельфовые волны и внутренние шельфовые волны Бухвальда и Адамса [16]. Далее, следуя работе [10], примем следующую экспоненциальную модель желоба:

$$\begin{aligned} H_1 &= H_0 \exp 2\alpha x, \quad -L_1 \leq x \leq 0, \\ H_2 &= H_0 \exp(-2\beta x), \quad 0 \leq x \leq L_2, \\ H_3 &= H_0 \exp(-2\beta L_2), \quad L_2 \leq x < \infty. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для Курильского желоба (см. [10], табл. 1)  $H_0 = 8,25$  км,  $L_1 = 185$  км,  $L_2 = 55$  км,  $\alpha = 0,95 \times 10^{-2}$  км<sup>-1</sup>,  $\beta = 4,24 \times 10^{-3}$  км<sup>-1</sup>,  $a = \alpha L_1 = 1,75$ ,  $b = \beta L_1 = 0,784$ ,  $r = L_2 / L_1 = 0,297$ .

Профиль топографии является непрерывным, однако, производная профиля топографии терпит разрыв. Следовательно, решение для функции тока ищется на классе кусочно-гладких функций с применением условий сшивок при  $x = 0$  и  $x = L_2$ . Результат, полученный в работе [10], можно сформулировать следующим образом: построено решение, автоматически удовлетворяющее условию (2.8) в виде:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A \sin m(x + L_1) \exp \alpha x, \quad -L_1 \leq x \leq 0, \\ \Psi_2 &= (B \sin lx + A \sin mL_1 \cos lx) \exp(-\beta x), \quad 0 \leq x \leq L_2, \\ \Psi_3 &= (B \sin(l L_2) + A \sin mL_1 \cos(l L_2)) \exp(-\beta L_2 - k(x - L_2)), \quad L_2 \leq x < \infty. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отметим, что в статье [10] в последней формуле имеется опечатка, которая здесь исправлена. Далее, в силу затухания решения в открытой части океана, в формуле (3.8) волновое число  $k$  принимается положительным  $k > 0$ , а частота  $\omega$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения (в монографии [6]  $\omega > 0$ , но  $k$  может быть как положительным, так и отрицательным).

В (4.2) параметры  $m$  и  $l$  определяются по формулам:

$$m = \left( -\frac{2\alpha f k}{\omega} - \alpha^2 - k^2 \right)^{1/2}, \quad (4.3)$$

$$l = \left( \frac{2\beta f k}{\omega} - \beta^2 - k^2 \right)^{1/2}. \quad (4.4)$$

Подставляя (4.2) в (2.8), получаем систему двух однородных уравнений для  $A$  и  $B$ . Матрица  $C$  коэффициентов имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} \sin(mL_1)[(k - \beta)\cos(lL_2) - l\sin(lL_2)] & [(k - \beta)\sin(lL_2) + l\cos(lL_2)] \\ \sin(mL_1)\{\alpha + \beta\} + m\cos(mL_1) & -l \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Приравнивая к нулю детерминант матрицы, [10] получаем следующее уравнение:

$$(\alpha + \beta + m \cot mL_1)[l + (k - \beta)\tan l L_2] + l(k - \beta - l \tan l L_2) = 0. \quad (4.6)$$

Отметим, что авторы работы [10], а также впоследствии [6], называют именно это уравнение дисперсионным соотношением. Отметим, что в формуле (4.6) мы исправили еще одну опечатку в последнем слагаемом в работе [10].

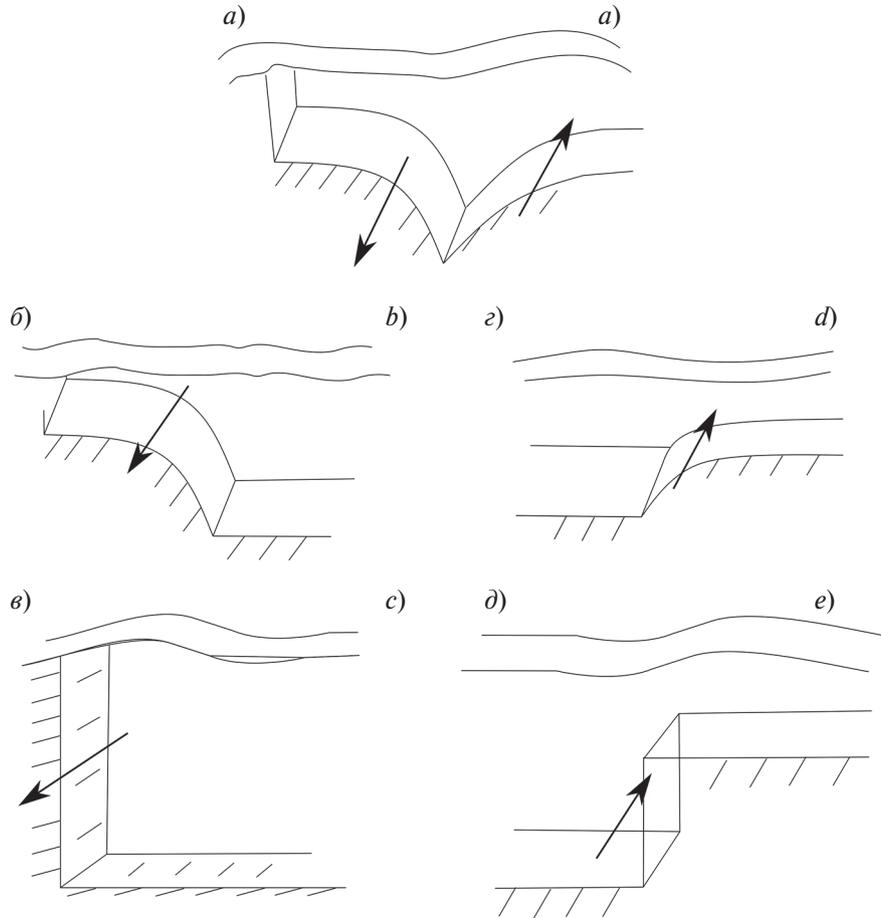
Далее, при переходе от (4.5) к (4.6), авторы [10] делают неявное предположение:  $\sin(mL_1) \neq 0$ ,  $\cos(lL_2) \neq 0$ . Таким образом, построенные локализованные решения в работе [10] существуют, однако не исчерпывают все возможные сценарии.

Численный анализ соотношения (4.6), выполненный в [10], заключается в следующем: полная спектральная задача допускает два частных приближенных решения. Первое решение — это шельфовые волны; решение носит осцилляционный характер в районе шельфа и внутренней части желоба, и затухает в остальной части физического пространства. Второе решение — это желобовые волны; решение осциллирует только в районе морской части желоба, затухая на шельфе и в открытом океане. Авторы утверждают, что эти частные решения (шельфовые волны и желобовые волны) можно получить, как предельные переходы из общей модели желоба; они локализованы в отдельных частях желоба и с очень хорошей точностью являются решениями общей модели океанского желоба.

Переходим к описанию этих частных решений.

## 5. Асимптотика желобовых волн на шельфе. Сшивка с шельфовой волной

Основные виды рельефа дна, определяющие типы захваченных волн, представлены на рис. 4. Во всех случаях волны распространяются так, что в северном полушарии (в южном — наоборот) мелкая вода (берег) остается с правой стороны относительно направления движения.



**Рис. 4.** Типы захваченных волн (направление показано стрелками) в зависимости от формы рельефа дна: *a* — желобовые волны; *b* — шельфовые волны; *в* — волны Кельвина; *г* — внутренние шельфовые волны; *д* — двойные волны Кельвина

**Fig. 4.** Types of captured waves (direction shown by arrows) depending on the shape of the bottom relief: *a* — trench waves; *b* — shelf waves; *c* — Kelvin waves; *d* — internal shelf waves; *e* — Kelvin double waves

Начнем рассмотрение с решения для прибрежной зоны. Предположим, что на шельфе решение носит осциллирующий характер. Тогда волновое число  $m$ , заданное соотношением (4.3), должно быть положительным. Для этого при  $\omega < 0$  должно выполняться условие:

$$\frac{-2\alpha k}{\alpha^2 + k^2} < \frac{\omega}{f} < 0. \quad (5.1)$$

Поскольку ось  $y$  направлена на север, то из выражения для фазы в (2.5) в продольном направлении желоба получаем  $\frac{\omega}{k} < 0$ . Следовательно, фаза шельфовой волны распространяется в отрицательном направлении, т. е. на юго-запад, оставляя берег справа (северное полушарие). При этом, из соотношения (4.4) автоматически получается так, что волновое число  $l$  в желобовой части будет чисто мнимым, следовательно, для желоба решение носит затухающий характер.

Первое качественное решение для шельфа — это осцилляция-затухание-затухание (направление от берега в сторону открытого океана). Авторы [10] сшивали решение следующим образом: из соотношения (4.6) при предельном переходе  $L_2 \rightarrow 0$  ( $\beta$  и  $l$  ограничены) получаем соотношение:

$$(k + \alpha)\sin mL_1 + m\cos mL_1 = 0 \quad (5.2)$$

или

$$\tan mL_1 = -\frac{m}{k + \alpha}, \quad m = m_n(k), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

Соотношение для амплитуд шельфовых волн  $B/A \rightarrow 0$ . Такой способ сшивок, при котором ширина желобовой части стремится к нулю, дает правильный результат из-за того, что справа есть полубесконечный океан конечной глубины. Однако попытка сделать то же самое симметрично для шельфовой части, устремляя ширину шельфа к нулю, приводит к неожиданному результату с сингулярностью. Авторы [10] не прокомментировали эту сингулярность и оставили вопрос открытым. Поэтому для симметричности предельных переходов шельфовой и желобовой волн мы делаем альтернативный предельный переход при  $L_2 \rightarrow \infty$ ,  $\beta \rightarrow 0$ . При этом получается  $l \rightarrow ik$ , а воспользовавшись соотношением  $\tan i l L_2 = i \tanh l L_2$ , мы в результате снова получаем соотношение (5.3). Данный результат является крайне устойчивым при  $L_2 \rightarrow \infty$ ,  $\beta \rightarrow 0$ , то есть не зависит от значения величины  $\beta L_2$ , которая может быть как бесконечно большой, так и бесконечно малой. Графический анализ уравнения (5.3) выполнен в работе [16], и здесь мы его приводить не будем.

Со стороны аналитики основная идея этой части нашей работы заключается в том, чтобы рассматривать желобовые волны в качестве некоего подвида классических топографических волн Россби с классическим дисперсионным соотношением. Мы также полагаем, что нет большой необходимости вводить новые классы волн с трансцендентными дисперсионными соотношениями. Развивая это направление, мы предлагаем альтернативную интерпретацию подходам [10] и [6]. Мы полагаем, что дисперсионными соотношениями правильнее называть уравнения (4.3) и (4.4) — дисперсионные соотношения для топографических волн, а соотношение (4.6) и его частные случаи мы рассматриваем как дополнительное условие, определяющее поперечную компоненту волнового числа.

Таким образом, мы получаем некие подклассы классических топографических волн Россби с дисперсионным соотношением, в котором есть особенность в нахождении поперечной компоненты волнового числа. Фактически мы предлагаем вернуться к трактовке, которая была предложена в первой оригинальной работе на эту тему — [16].

### **Шельфовые волны в альтернативном изложении**

Дадим более простую трактовку шельфовой части решения [10] — шельфовой волны в терминах топографических волн Россби. Напомним, что речь идет только о субинерционных колебаниях.

Рассмотрим формулу (4.1) применительно к шельфовой части топографии. Положим  $1/L = -2\alpha$ ,  $k_1 = m$ ,  $k_2 = k$  и подставим в (2.12). Окончательно получаем соотношение (4.3) для шельфовых волн в классическом виде топографических волн Россби в виде:

$$\omega = \frac{-2\alpha f k}{k^2 + m^2 + \alpha^2}. \quad (5.4)$$

Именно это соотношение правильнее называть дисперсионным соотношением для шельфовых волн. Далее, нужно наложить условие, что шельф не бесконечный, а имеет конечную ширину  $L_1$ . Геометрически понятно, что тогда появится некое условие, которое позволит сшить синус на шельфовой стороне желоба с экспонентой на океанической части желоба для каждого фиксированного значения волнового числа  $k$ , где  $0 < k < \infty$  (согласно решению [10],  $k$  считается положительным). Для этого нужно найти значение  $m$ , решив уравнение (5.3), и затем получить функциональную зависимость  $m = m(k)$ . Таких решений будет счетное множество  $m = m_n(k)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  Далее найденные значения подставляем в (5.4) и строим график (наносим одну точку на дисперсионной кривой). Затем берем новое значение волнового числа  $k$  и повторяем процедуру. Поэтому дисперсионное соотношение для шельфовых волн следует записывать в виде:

$$\omega = \frac{-2\alpha f k}{k^2 + m_n^2(k) + \alpha^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

Опираясь на результат работы [16], приведем оценку для  $m_n(k)$ :

$$\frac{(n-1/2)\pi}{L_1} < m_n(0) \leq m_n(k) \leq \frac{n\pi}{L_1}. \quad (5.6)$$

Функциональная зависимость  $m = m(k)$  крайне слабо изменяет дисперсионную кривую топографических волн Россби. Отметим, что [10] и [16] не рассмотрели один частный случай, который также должен быть реализован. Условие  $\sin(mL_1) = 0$  равносильно установке дополнительной твердой стенки при  $x = 0$ :  $\Psi_1(0) = \Psi_2(0) = 0$ . Для шельфовой зоны волновое число  $m$  перестает зависеть от продольной компоненты волнового вектора  $k$ , поэтому сразу находим в явном виде дискретный спектр:

$$\sin(mL_1) = 0, \quad m = \frac{n\pi}{L_1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

Волновое число в желобовой части  $l$  — снова чисто мнимое, т. е. имеет место затухание вне шельфа. Дисперсионное соотношение (4.3) принимает вид:

$$\omega = -\frac{2\alpha f k}{k^2 + m^2 + \alpha^2} = -\frac{2\alpha f k}{k^2 + (n\pi / L_1)^2 + \alpha^2}. \quad (5.8)$$

Это соотношение качественно похоже на (5.5), однако оно проще в том смысле, что не содержит неизвестной зависимости  $m = m(k)$  и тем самым не требует никакого численного счета. Это дисперсионное соотношение носит частный характер, однако на практике оно может быть полезно в силу простого вида и вполне понятного геометрического смысла:  $n$  — это количество полупериодов синуса, которое вписывается в шельфовую зону.

Далее, следуя [16], находим длинноволновую асимптотику  $k \rightarrow \infty$  дисперсионного соотношения (5.5):

$$\omega \approx \frac{-2\alpha f k}{m_n^2(0) + \alpha^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.9)$$

Зависимость от волнового числа получилась линейная, как и должно быть в длинноволновом пределе. Тогда фазовая скорость равна групповой и равна

$$c = c_{gr} \approx \frac{-2\alpha f}{m_n^2(0) + \alpha^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

Перейдем к безразмерным переменным, принимая масштаб длины  $L_1$  — ширину шельфовой части желоба: параметр  $\alpha^* = \alpha L_1$ , продольное волновое число  $k^* = k L_1$ , поперечное волновое число  $m^* = m L_1$ . Далее для простоты записи опускаем звездочки у переменных. Тогда оценка, например, первого поперечного волнового числа — первой моды — имеет вид:

$$\frac{\pi}{2} < m_1 \leq \pi, \quad (5.11)$$

для второй моды:

$$\frac{3\pi}{2} < m_2 \leq 2\pi. \quad (5.12)$$

Для Курильского профиля дисперсионные кривые шельфовых и желобовых волн представлены на рис. 5.

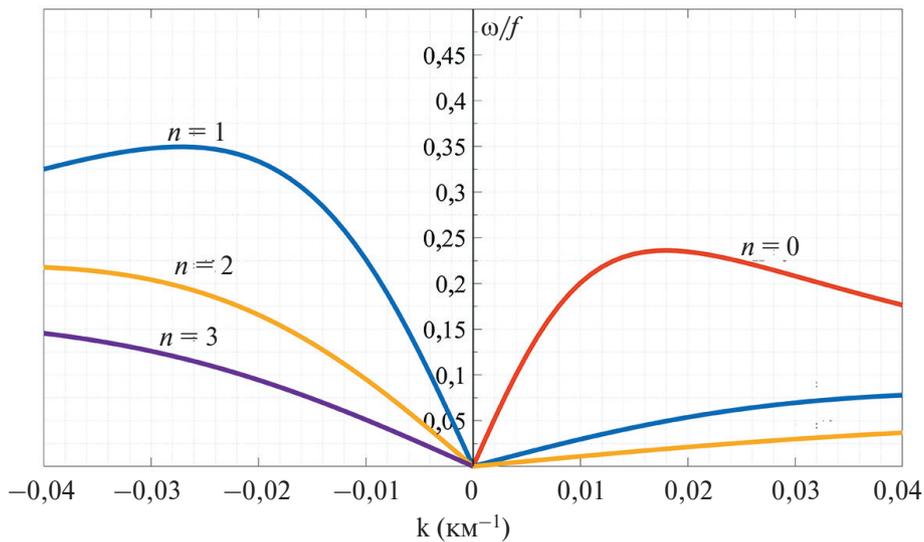


Рис. 5. Дисперсионная диаграмма, рассчитанная по формуле (5.8) для Курильского района, шельфовых (слева) и желобовых (справа) волн

Fig. 5. Dispersion diagram calculated using the formula (5.8) for the Kuril region: shelf (left) and trench (right) waves

## 6. Особенности желобовых волн

Обратим внимание на следующий момент, относящийся к терминологии. В монографии [6] (с. 102) говорится следующее: авторы [10] рассматривали «двойные волны Кельвина, распространяющиеся вдоль океанской стороны желоба на северо-восток». Однако в действительности в работе [10] вообще не встречается такой термин: «двойные волны Кельвина», и полученные для желоба решения авторы называют «желобовыми волнами» (*trench waves*). Мы также придерживаемся термина «желобовые волны» [20, 21]. Термин «двойные волны Кельвина» был введен Лонге-Хиггинс [13, 14] как предельный переход нулевой моды на непрерывной топографической особенности к топографическому профилю типа «ступенька» при стремлении ширины топографической особенности к нулю. Предельный переход, выполненный ниже в нашей работе, показывает обоснованность применения данного термина. Действительно, пусть решение является осциллирующим в желобовой части, т. е. волновое число  $l$  вещественно. Тогда из (4.4) следует, что должно выполняться соотношение:

$$0 < \frac{\omega}{f} < \frac{2\beta k}{\beta^2 + k^2}. \quad (6.1)$$

В этом случае волновое число  $m$  автоматически становится чисто мнимым  $m = iM$ , где  $M = \left( \frac{2\alpha f k}{\omega} + \alpha^2 + k^2 \right)^{1/2}$  (берется положительный знак корня). Дисперсионное соотношение в пределе  $L_1 \rightarrow 0$  ( $\alpha$  — ограничено) имеет вид:

$$(k - \beta)\sin(l L_2) + l \cos(l L_2) = 0 \quad (6.2)$$

или (см. [10])

$$\tan(l L_2) = -\frac{l}{k - \beta}. \quad (6.3)$$

Также при  $k = \beta$  [10] полагают  $l = 0$  — тривиальное решение. Однако из (6.2) видно, что есть и нетривиальное решение  $\cos(l L_2) = 0$ . Тогда соотношение амплитуд для желобовых волн переворачивается и становится  $A/B = 0$ .

### Желобовые волны в альтернативном изложении

Сделаем следующее преобразование: во второй формуле (4.1) положим  $1/L = 2\beta$ ,  $k_1 = l$ ,  $k_2 = k$  и затем подставим в (2.12). Затем для экспоненциального профиля топографии рассмотрим дисперсионное соотношение для топографических волн

$$\omega = \frac{2\beta f k}{k^2 + l^2 + \beta^2}. \quad (6.4)$$

Но (6.4) — это еще и дисперсионное соотношение для желобовых волн. Далее, для каждого фиксированного значения волнового числа  $k > 0$  нужно найти значение  $l$ , решив уравнение (6.2). Таким образом, получаем зависимость  $l = l(k)$ . Таких решений будет счетное множество  $l = l_n(k)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , поэтому дисперсионное соотношение для желобовых волн правильнее написать в виде:

$$\omega_n = \frac{2\beta f k}{k^2 + l_n^2(k) + \beta^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.5)$$

Далее, для численного счета снова перейдем к безразмерным переменным, только уже принимая за масштаб длины ширину океанической части желоба  $L_2$ :  $l^* = l L_2$ ,  $k^* = k L_2$ ,  $\beta^* = \beta L_2$ . Для Курильского желоба получаем  $\beta^* = 0,2332$ . Как и ранее, звездочки у переменных опускаем. Тогда уравнение (6.3) для нахождения зависимости  $l = l(k)$  в безразмерном виде для Курильского желоба принимает вид:

$$\tan l = -\frac{l}{k - 0,2332}. \quad (6.6)$$

Данное волновое число  $l$  уже рассматривалось выше, и поскольку дает очень большую длину волны, оно не представляет практического интереса.

Для желобовых волн в Курильском желобе важную роль играет наличие открытого океана постоянной глубины с внешней стороны от желоба. Согласно результатам работы [15], что также подтверждается

результатами [16], открытый океан слабо влияет на короткие желобовые волны, в то время как длинные волны, скорее всего, становятся неустойчивыми. Возможно, именно эта неустойчивость и порождает вихревые желобовые образования, наблюдаемые в Курильском желобе [22–27].

Предельный переход  $L_1 \rightarrow 0$  для желобовой волны, выполненный авторами [10], физически означает перенос твердой стенки с шельфа в самую глубокую часть желоба. Не совсем понятно, как удается избежать сингулярности для полученной асимптотики. Это также выглядит несколько странно и с физической точки зрения, так как для шельфовой волны делается предельный переход  $L_2 \rightarrow \infty$ , т. е. океанская (правая) граница желоба отодвигается на бесконечность. При этом для шельфовой части решения получается вполне ожидаемый результат, и шельфовая асимптотика выходит на шельфовую волну.

Теперь рассмотрим альтернативный переход и для желобовой асимптотики. Вместо  $L_1 \rightarrow 0$  примем, наоборот:  $L_1 \rightarrow \infty$ , т. е. шельфовую (левую) границу желоба отодвинем на бесконечность. При этом также добавим дополнительное условие  $\alpha \rightarrow 0$ , т. е. крутизна топографии стремится к нулю. Тогда компонента волнового числа  $m$  становится чисто мнимой. Для определенности положим  $m = ik, k > 0$ . Тогда, принимая во внимание  $\cot ik = -i \coth k$ , соотношение (4.6) для определения поперечной компоненты волнового числа  $l$  принимает вид:

$$\tan l L_2 = \frac{2l k}{l^2 + \beta^2 - k^2}. \quad (6.7)$$

А это и есть знакомое уравнение для внутренних шельфовых волн, полученное [16]. Таким образом, мы получаем вполне понятный физический результат: точно так же, как шельфовая асимптотика [10] дает шельфовую волну [16], желобовая, океаническая часть решения желоба выходит на внутреннюю шельфовую волну [16]. Почему-то авторы [10] не показали этот момент. Возможно, он не получился потому, что они сместили твердую стенку в центр желоба.

### 7. Двойная волна Кельвина

Классическая трактовка двойных волн Кельвина основана на ступенчатой модели топографии [9]:

$$\begin{aligned} H &= H_1, & x < 0, \\ H &= H_2, & x > 0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

В этом случае уравнение (2.6) примет вид:

$$\Psi_{xx} - k^2 \Psi = 0. \quad (7.2)$$

Решение, удовлетворяющее затуханию на бесконечности, имеет простой вид:

$$\begin{aligned} \Psi &= A \exp(-|k| x), & x < 0, \\ \Psi &= A \exp(-|k| x), & x > 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Амплитуда волны в этом случае экспоненциально затухает с одинаковой скоростью по обе стороны от разрыва.

Используя условие сшивок, получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$\frac{\omega}{f} = \frac{H_2 - H_1}{H_2 + H_1} \operatorname{sgn}|k|, \quad (7.4)$$

где  $H_2 > H_1$ ,  $\operatorname{sgn}$  — функция смены знака. Тогда для профиля типа «ступенька» получается, что для любого волнового числа существует только одно решение — одна субинерционная мода. Отметим, что при этом групповая скорость этих волн всегда равна нулю.

Хотя термин «двойная волна Кельвина» принадлежит Лонге-Хиггинс [13, 14], но само дисперсионное соотношение (7.4), по-видимому, было известно еще раньше и дано также в работе [16]. Позже Лонге-Хиггинс [13] рассмотрел задачу с непрерывными профилями топографии и, используя предельный переход от непрерывного профиля к профилю «ступенька», вывел второе дисперсионное уравнение для двойных волн Кельвина. При этом оказалось, что для непрерывного профиля существует счетный набор собственных функций, но при предельном переходе к профилю «ступенька» только одна низшая мода нечувствительна к форме профиля по глубине. Более высокие моды зависят от деталей профиля и при предельном переходе стремятся к стационарным течениям, на основании чего Лонге-Хиггинс [13] пришел к выводу, что самая низкая мода, скорее всего, и будет наблюдаться в реальном океане.

Принципиально важным моментом является то, что в следующей статье Лонге-Хиггинс [14] отказался от дисперсионного соотношения (7.4). Причина понятна: действительно, с физической точки зрения неверно, если фазовые скорости длинных волн принимают бесконечно большие значения. Лонге-Хиггинс [14], применяя более точные (до второго порядка) асимптотические разложения, получил, что для низшей моды длинных волн Россби вполне оправдано, что частота стремится к нулю, а не к константе при учете дивергенции волн. По сути, для баротропной моды он добавил в знаменатель баротропный радиус Россби  $f^2/gH$ . Однако, в случае, когда профиль глубины  $h(x)$  в переходной зоне экспоненциальный, это уже находится в противоречии с результатом Бухвальда и Адамса [16]. По мнению Лонге-Хиггинс [14], это противоречие связано с тем, что он учитывал горизонтальную дивергенцию волнового движения. Отметим, что данные факты не отражены в работах [6, 10, 11], хотя построенные на основе численных расчетов дисперсионные кривые в монографии [6] соответствуют результатам статьи Лонге-Хиггинс [14]. Один из этих результатов заключается в том, что частота стремится к нулю в длинноволновом пределе. Следует отметить, что сама процедура предельного перехода не совсем однозначна. Кривизна дисперсионной кривой для нулевой моды двойной волны Кельвина крайне сложна в окрестности нуля (для длинных волн). Это отмечают также и Бухвальд и Адамс [16]. Наши оценки для Камчатского желоба дают слишком малые значения волнового числа, т. е. соответствующие длины волн, скорее всего, носят чисто теоретический характер, так как фактически выходят за границы масштабов модели  $f$ -плоскости.

Во второй статье Лонге-Хиггинс [14] автор исправил предыдущий свой результат, однако в монографии [9] об этом не говорится. Главный результат заключается в следующем: для всех мод, включая и низшую моду (это важно), при условии учета дивергенции волн, групповая скорость топографических волн Россби и их фазовая скорость совпадают по направлению для длинных волн (при малых волновых числах) и имеют противоположные направления для коротких волн.

## 8. Заключение

Можно сформулировать следующие основные выводы из экспоненциальной топографической модели желоба. Фаза линейных топографических низкочастотных волн всегда распространяется, оставляя мелкую воду (или берег) справа. Далее, можно построить два отдельных класса локализованных решений: одно шельфовое, второе, фактически, тоже шельфовое, но которое принято называть желобовыми волнами (в некоторых источниках это решение ошибочно называют двойными волнами Кельвина). На дисперсионных кривых обоих видов волн есть, как экстремумы (нулевая групповая скорость), так и точки перегиба (экстремум групповой скорости). Это указывает на то, что энергия (вихри) может распространяться вдоль шельфа, как, например, для Курильского шельфа, на юго-запад (более длинные волны), так и на северо-восток (более короткие волны).

Однако для океанской части желоба (для желобовых волн), это не так. Более длинные волны имеют преимущественно северо-восточное направление распространения энергии, а более короткие — юго-западное. Желобовые волны на порядок более медленные (периоды больше, а скорости меньше), чем шельфовые волны. Это качественно объясняется прямой пропорциональностью фазовой скорости крутизне экспоненциального профиля топографии [4, 5].

Аналитические модели и численный счет показывают, что желобовые волны довольно быстро затухают в сторону шельфа и фактически не оказывают существенного влияния на шельфовую часть решения. Желобовые волны нельзя зарегистрировать, находясь на берегу, и при анализе чисто шельфовых решений можно не учитывать возможных осцилляционных решений, локализованных на желобе.

И наоборот, шельфовая волна крайне медленно затухает в сторону желоба (по крайней мере, для первых номеров мод), что крайне отрицательно для желобовых локализованных решений. Мы не можем однозначно утверждать, что шельф не влияет на желобовые волны. Очевидно, влияние шельфа на желобовые локализованные решения может проявиться при нелинейном походе.

Возможность распространения к полюсу низкочастотных волн Россби топографического типа, захваченных Курило-Камчатским желобом, была теоретически предсказана [10, 26], которые использовали термин «двойные волны Кельвина». Эти квазигеострофические волны возникают благодаря сохранению потенциальной завихренности и механизмам восстановления, обеспечиваемым силой Кориолиса и изменением глубины океана.

Аналитическая новизна данной работы состоит в том, что нам удалось произвести сшивки желобовых волн [10] и шельфовых волн [16], физически обоснованные и вполне ожидаемые. Для этого было предложено бесконечно увеличивать (расширять) соответствующие области шельфа или желоба при одновременном стремлении крутизны топографии к нулю.

## Финансирование

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта СПбГУ № 93016972, гранта РФФИ 22-27-00004 и по теме государственного задания 0128-2021-0003.

## Funding

The publication was made with the financial support of the St Petersburg State University Grant No. 93016972, RSF Grant No. 22-27-00004, and State assignment theme No. 0128-2021-0003.

## Литература

1. *Drivdal M., Weber J.E.H., Debernard J.B.* Dispersion relation for continental shelf waves when the shallow shelf part has an arbitrary width: Application to the shelf west of Norway // *Journal of Physical Oceanography*. 2016. Vol. 46, Iss. 2. P. 537–549. doi:10.1175/jpo-d-15-0023.1
2. *Гневыхив В.Г., Фролова А.В., Колдунов А.В., Белоненко Т.В.* Топографический эффект для волн Россби на зональном сдвиговом потоке // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*. 2021. Т. 14, № 1. С. 4–14. doi:10.7868/S2073667321010019
3. *Pedlosky J.* Geophysical fluid dynamics. Berlin: Springer, 1979. 624 p.
4. *Gnevyshev V.V., Frolova A.V., Belonenko T.V.* Topographic effect for Rossby waves on non-zonal shear flow // *Water Resources*. 2022. Vol. 49, N 2. P. 240–248. doi:10.1134/S0097807822020063
5. *Гневыхив В.Г., Фролова А.В., Кубряков А.А., Собко Ю.В., Белоненко Т.В.* Взаимодействие волн Россби со струйным потоком: основные уравнения и их верификация для Антарктического циркумполярного течения // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2019. Т. 55, № 5. С. 39–50. doi:10.31857/S0002-35155539-50
6. *Ефимов В.В., Куликов Е.А., Рабинович А.Б., Файн И.В.* Волны в пограничных областях океана. Л.: Гидрометеорологическое издательство, 1985. 250 с.
7. *Белоненко Т.В., Фролова А.В.* Антарктическое циркумполярное течение как волновод для волн Россби и мезомасштабных вихрей // *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса*. 2019. Т. 16, № 1. С. 181–190. doi:10.21046/2070-7401-2019-16-1-181-190
8. *Belonenko T., Frolova A., Gnevyshev V.* Detection of waveguide for Rossby waves using satellite altimetry in the Antarctic Circumpolar Current // *International Journal of Remote Sensing*. 2020. 41:16, P. 6232–6247, doi:10.1080/01431161.2020.1752955
9. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане, в 2-х частях / Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 846 с.
10. *Mysak L.A., Leblond P.H., Emery W.J.* Trench Waves // *Journal of Physical Oceanography*. 1979. Vol. 9, N 5. P. 1001–1013. doi:10.1175/1520-0485(1979)009<1001: TW>2.0.CO;2
11. *Mysak L.A.* Recent advances in shelf wave dynamics // *Reviews of Geophysics and Space Physics*. 1980. Vol. 18, N 1. P. 211–241.
12. *Сандалюк Н.В., Гневыхив В.Г., Белоненко Т.В., Кочнев А.В.* Приложение задачи о вихревом слое для района течения Гольфстрим // *Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса*. 2021. Т. 18, № 5. С. 242–251. doi:10.21046/2070-7401-2021-18-5-242-251
13. *Longuet-Higgins M.S.* On the trapping of waves along a discontinuity of depth in a rotating ocean // *Journal of Fluid Mechanics*. 1968. Vol. 31, pt. 3. P. 417–434.
14. *Longuet-Higgins M.S.* Double Kelvin waves with continuous depth profiles // *Journal of Fluid Mechanics*. 1968. Vol. 34, N 01. P. 49. doi:10.1017/s002211206800176x
15. *Mysak L.A., Johnson E.R., Hsiem W.W.* Baroclinic and barotropic instabilities of coastal currents // *Journal of Physical Oceanography*. 1981. Vol. 11, N 2. P. 209–230. doi:10.1175/1520-0485(1981)011<020
16. *Buchwald V.T., Adams J.K.* The propagation of continental shelf waves // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1968. Vol. 305, N 1481. P. 235–250. doi:10.1098/rspa.1968.0115
17. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996. 156 с.
18. *Didenkulova I., Pelinovsky E.* On shallow water rogue wave formation in strongly inhomogeneous channels // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2016. Vol. 49, N 19. P. 194001. doi:10.1088/1751-8113/49/19/194001
19. *Ertakov A.M., Stepanyants Y.A.* Transformation of longsurface and tsunami-like waves in the ocean with a variable bathymetry // *Pure and Applied Geophysics*. 2019. Vol. 177, N 3. P. 1675–1693. doi:10.1007/s00024-019-02259-4
20. *Rabinovich A.B., Thomson R.E.* Evidence of diurnal shelf waves in satellite-tracked drifter trajectories off the Kuril Islands // *Journal of Physical Oceanography*. 2001. Vol. 31. P. 2650–2668. doi:10.1175/1520-0485(2001)031<2650:EODSWI>2.0.CO;2

21. Rabinovich A.B., Thomson R.E., Bograd S.J. Drifter observations of anticyclonic eddies near Bussol' Strait, the Kuril Islands // *Journal of Oceanography*. 2002. Vol. 58. P. 661–671. doi:10.1023/A:1022890222516
22. Булатов Н.В., Лобанов В.Г. Исследование мезомасштабных вихрей восточнее Курильских островов по данным метеорологических спутников Земли // *Исследование Земли из космоса*. 1983. № 3. С. 40–47.
23. Rogachev K.A. Rapid thermohaline transition in the Pacific western subarctic and Oyashio fresh core eddies // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2000. Vol. 105, Iss. C4. P. 8513–8526. doi:10.1029/1999JC900330
24. Kaneko H., Itoh S., Kouketsu S., Okunishi T., Hosoda S., Suga T. Evolution and modulation of a poleward propagating anticyclonic eddy along the Japan and Kuril-Kamchatka trenches // *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2015. Vol. 120. P. 4418–4440. doi:10.1002/2014JC010693
25. Prants S.V., Lobanov V.B., Budyansky M.V., Uleysky M. Yu. Lagrangian analysis of formation, structure, evolution and splitting of anticyclonic Kuril eddies // *Deep Sea Research Part I: Oceanographic Research Papers*. 2016. Vol. 109. P. 61–75. doi:10.1016/j.dsr.2016.01.003
26. Ефимов В.В., Рабинович А.Б. О резонансных приливных течениях и их связи с континентальными шельфовыми волнами в северо-западной части Тихого океана // *Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1980. Т. 16, № 10. С. 1091–1101.
27. Пранц С.В. Вихри глубоководных желобов северо-западной части Тихого океана: обзор // *Известия РАН. Физика атмосферы и океана*. 2021. Т. 57, № 4. С. 387–400. doi:10.31857/S0002351521040106

## References

1. Drivdal M., Weber J.E.H., Debernard J.B. Dispersion relation for continental shelf waves when the shallow shelf part has an arbitrary width: Application to the shelf west of Norway. *Journal of Physical Oceanography*. 2016, 46, 2, 537–549. doi:10.1175/jpo-d-15-0023.1
2. Gnevyshev V.G., Frolova A.V., Koldunov A.V., Belonenko T.V. Topographic effect for Rossby waves on a zonal shear flow. *Fundamental and Applied Hydrophysics*. 2021, 14, 1, 4–14. doi:10.7868/S2073667321010019
3. Pedlosky J. Geophysical fluid dynamics. *Berlin, Springer*, 1979. 624 p.
4. Gnevyshev V.V., Frolova A.V., Belonenko T.V. Topographic effect for Rossby waves on non-zonal shear flow. *Water Resources*. 2022, 49, 2, 240–248. doi:10.1134/S0097807822020063
5. Gnevyshev V.G., Frolova A.V., Kubryakov A.A., Sobko Yu.V., Belonenko T.V. Interaction between Rossby waves and a jet flow: Basic equations and verification for the Antarctic circumpolar current. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2019, 55(5), 412–422. doi:10.1134/S0001433819050074
6. Efimov V.V., Kulikov E.A., Rabinovich A.B., Fine I.V. Waves in the ocean boundary regions. *Leningrad*, 1985, 250 p. (in Russian).
7. Belonenko T.V., Frolova A.V. Antarctic circumpolar current as a waveguide for Rossby waves and mesoscale eddies. *Sovremennye Problemy Distantionnogo Zondirovaniya Zemli iz Kosmosa*. 2019, 16, 1, 181–190. doi:10.21046/2070-7401-2019-16-1-181-190 (in Russian).
8. Belonenko T., Frolova A., Gnevyshev V. Detection of waveguide for Rossby waves using satellite altimetry in the Antarctic Circumpolar Current. *International Journal of Remote Sensing*. 2020, 41:16, 6232–6247, doi:10.1080/01431161.2020.1752955
9. LeBlond P., Mysak L.A. Waves in the Ocean. *Elsevier Scientific Publishing Company*, 1977. 602 p.
10. Mysak L.A., LeBlond P.H., Emery W.J. Trench Waves. *Journal of Physical Oceanography*. 1979, 9(5), 1001–1013. doi:10.1175/1520-0485(1979)009<1001:TW>2.0.CO;2
11. Mysak L.A. Recent advances in shelf wave dynamics. *Reviews of Geophysics and Space Physics*. 1980, 18, 1, 211–241.
12. Sandalyuk N.V., Gnevyshev V.G., Belonenko T.V., Kochnev A.V. Application of the vortex layer problem to the Gulf Stream area. *Sovremennye Problemy Distantionnogo Zondirovaniya Zemli iz Kosmosa*. 2021, 18, 5, 242–251. doi:10.21046/2070-7401-2021-18-5-242-251 (in Russian).
13. Longuet-Higgins M.S. On the trapping of waves along a discontinuity of depth in a rotating ocean. *Journal of Fluid Mechanics*. 1968, 31, 3, 417–434.
14. Longuet-Higgins M.S. Double Kelvin waves with continuous depth profiles. *Journal of Fluid Mechanics*. 1968, 34(01), 49. doi:10.1017/s002211206800176x
15. Mysak L.A., Johnson E.R., Hsiem W.W. Baroclinic and barotropic instabilities of coastal currents. *Journal of Physical Oceanography*. 1981, 11(2), 209–230. doi:10.1175/1520-0485(1981)011<020
16. Buchwald V.T., Adams J.K. The propagation of continental shelf waves. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1968. 305(1481), 235–250. doi:10.1098/rspa.1968.0115
17. Pelinovsky E.N. Hydrodynamics of tsunami waves. *Nizhny Novgorod. IAP RAS*. 1996, 156 p. (in Russian).

18. *Didenkulova I., Pelinovsky E.* On shallow water rogue wave formation in strongly inhomogeneous channels. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2016, 49(19), 194001. doi:10.1088/1751-8113/49/19/194001
19. *Ermakov A.M., Stepanyants Y.A.* Transformation of long surface and tsunami-like waves in the ocean with a variable bathymetry. *Pure and Applied Geophysics*. 2019, 177(3), 1675–1693. doi:10.1007/s00024-019-02259-4
20. *Rabinovich A.B., Thomson R.E.* Evidence of diurnal shelf waves in satellite-tracked drifter trajectories off the Kuril Islands. *Journal of Physical Oceanography*. 2001, 31, 2650–2668. doi:10.1175/1520-0485(2001)031<2650:EODSWI>2.0.CO;2
21. *Rabinovich A.B., Thomson R.E., Bograd S.J.* Drifter observations of anticyclonic eddies near Bussol' Strait, the Kuril Islands. *Journal of Oceanography*. 2002, 58, 661–671. doi:10.1023/A:1022890222516
22. *Bulatov N.V., Lobanov V.B.* Investigation of mesoscale eddies to the east of the Kuril Islands on the base of meteorological satellites data. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Fizika Atmosfery i Okeana*. 1983, 3, 40–47 (in Russian).
23. *Rogachev K.A.* Rapid thermohaline transition in the Pacific western subarctic and Oyashio fresh core eddies. *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2000, 105, 8513–8526. doi:10.1029/1999JC900330
24. *Kaneko H., Itoh S., Kouketsu S., Okunishi T., Hosoda S., Suga T.* Evolution and modulation of a poleward propagating anticyclonic eddy along the Japan and Kuril-Kamchatka trenches. *Journal of Geophysical Research: Oceans*. 2015, 120, 4418–4440. doi:10.1002/2014JC010693
25. *Prants S.V., Lobanov V.B., Budyansky M.V., Uleysky M. Yu.* Lagrangian analysis of formation, structure, evolution and splitting of anticyclonic Kuril eddies. *Deep Sea Research, Part I*. 2016, 109, 61–75. doi:10.1016/j.dsr.2016.01.003
26. *Efimov V.V., Rabinovich A.B.* On resonant tidal currents and their connection with continental shelf waves in the north-western Pacific Ocean. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR. Fizika Atmosfery i Okeana*. 1980, 16, 10, 1091–1101 (in Russian).
27. *Prants S.V.* Trench eddies in the Northwest Pacific: An overview. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*. 2021, 57, 4, 341–353. doi:10.1134/S0001433821040216

**Об авторах**

**ГНЕВЫШЕВ Владимир Григорьевич**, РИНЦ Author ID: 298530, ORCID ID: 0000-0001-6654-5570,  
Scopus Author ID: AAZ-6352-2021, WoS ResearcherID: 6507346231, avi9783608@gmail.com

**ТРАВКИН Владимир Станиславович**, РИНЦ Author ID: 1023273, ORCID ID: 0000-0002-7254-9313,  
Scopus Author ID: 57509420800, WoS ResearcherID: HPE-4729–2023, v.travkin@spbu.ru

**БЕЛОНЕНКО Татьяна Васильевна**, РИНЦ Author ID: 66026, ORCID ID: 0000-0003-4608-7781,  
Scopus Author ID: 6507005889, WoS ResearcherID: K-2162–2013, btvlibab@yandex.ru