

УДК 551.465

© А.С.Сафрай, И.В.Ткаченко, 2013

Санкт-Петербургский филиал Института океанологии им. П.П.Ширшова РАН  
safr7@yandex.ru

## ТРЕХМЕРНАЯ НЕГИДРОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВОДА–ВОЗДУХ. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В работе излагаются результаты численных экспериментов с трехмерной негидростатической моделью вода–воздух с использованием метода крупных вихрей (Large Eddy Simulation – LES) для осреднения полной системы уравнений Навье–Стокса и метода конечного объема жидкости (Volume of Fluid – VOF) для описания поверхности раздела и взаимодействия вода–воздух. Результаты численного эксперимента по обтеканию подводного препятствия сопоставлены с данными лабораторного эксперимента. Приведены предварительные результаты эксперимента по генерации внутренней волны поверхностной и их дальнейшему взаимодействию.

**Ключевые слова:** метод крупных вихрей, метод объема жидкости, внутренние и поверхностные волны.

Одной из целей статьи является разработка математической модели на основе осредненных по пространству уравнений Навье–Стокса (метод крупных вихрей – Large Eddy Simulation – LES), позволяющей изучать процессы формирования Верхнего квазиоднородного слоя (ВКС), генерацию и эволюцию внутренних и поверхностных волн, а также их взаимодействие.

Наибольшее распространение для описания динамики ВКС и внутренних волн (ВВ) в небольших районах (порядка сотен километров) получили модели на основе уравнений Рейнольдса, записанных в приближении Буссинеска [1–3]. При возможности детального пространственного разрешения предпочтительнее использовать негидростатические модели, которые позволяют точнее описывать нелинейные волновые и конвективные процессы, обусловленные стратификацией [4]. Влияние свободной поверхности либо не учитывается (приближение «твердой крышки» – равенство нулю нормальной к границе скорости [3]), либо учитывается путем определения положения свободной поверхности из кинематического граничного условия [2]. Первый подход принципиально не позволяет воспроизвести взаимодействие поверхностных и внутренних волн. При втором подходе явно описать обрушение поверхностных волн не удастся, но возможна параметризация на основе оценок групповой и фазовой скоростей ветровых волн.

В последние годы в технических приложениях для моделирования нелинейных эффектов на свободной поверхности используется метод объема жидкости (Volume of Fluid – VoF), который рассматривает среду вода–воздух как многофазную [5]. VoF в ходе прямого численного моделирования эволюции поверхности позволяет описывать такие эффекты, как обрушение волны, образование капель и брызг, бурунов.

В настоящей работе в качестве исходной используется LES-модель, разработанная в СПбФ ИО РАН и СПбГМТУ [6–8]. Для описания поверхности раздела вода–воздух реализован метод VoF, с помощью которого осуществляется прямое моделирование поверхности раздела. В отличие от большинства используемых моделей этого класса [5, 9] жидкость полагалась стратифицированной, что расширило область применения метода. Поскольку плотность воды на три порядка больше плотности воздуха, пришлось отказаться от использования приближения Буссинеска, что существенно усложняет числен-

ную реализацию модели, но одновременно позволяет надеяться на более полное описание исследуемых объектов/процессов.

**Постановка задачи и численная аппроксимация.** Согласно методу VoF, плотность многофазной (в данном случае двухфазной) среды представляет собой сумму

$$\rho = \alpha_a \rho_a + \alpha_w \rho_w, \quad (1)$$

где  $\rho_a$  – плотность воздуха,  $\rho_w$  – плотность морской среды,  $\alpha_a$  – объемная фракция воздуха,  $\alpha_w$  – объемная фракция морской среды.

Объемную фракцию воздуха  $\alpha_a$  можно выразить через объемную фракцию воды  $\alpha_w$ :

$$\alpha_a = 1 - \alpha_w. \quad (2)$$

Тогда плотность двухфазной среды записывается как

$$\rho = (1 - \alpha_w) \rho_a + \alpha_w \rho_w = \rho_a + \alpha_w (\rho_w - \rho_a). \quad (3)$$

Будем полагать, что плотность воздуха постоянна  $\rho_a = \text{const}$ . Плотность морской среды меняется с глубиной, и ее можно представить в виде

$$\rho_w = \rho_l + f(\rho_h - \rho_l), \quad (4)$$

где  $\rho_l$  – плотность легкой жидкости,  $\rho_h$  – плотность тяжелой жидкости,  $f$  – коэффициент смешения (безразмерная плотность жидкости). С учетом (3) выражение (4) можно записать следующим образом

$$\rho = \rho_a + \alpha_w [\rho_l + f(\rho_h - \rho_l) - \rho_a] = \rho_a + \alpha_w (\rho_l - \rho_a) + \alpha_w (\rho_h - \rho_l) f. \quad (5)$$

Отметим, что выражение (5) является нелинейным. Аналогичное выражение справедливо и для динамической вязкости

$$\mu = \mu_a + \alpha_w (\mu_l - \mu_a) + \alpha_w f (\mu_h - \mu_l). \quad (6)$$

Для учета эффекта поверхностного натяжения в уравнения импульса необходимо ввести дополнительное слагаемое  $F_\sigma = -\sigma \delta(\alpha_w) kn$ , где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения,  $\delta$  – дельта-функция, определенная на границе раздела морская среда–воздух,  $k, n$  – кривизна и нормаль к поверхности раздела [10]. Тогда окончательный вид уравнений движения вязкой стратифицированной жидкости, ограниченной свободной поверхностью, записывается в виде следующих равенств:

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle_\Delta}{\partial x_i} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle_\Delta}{\partial t} + \langle u_j \rangle_\Delta \frac{\partial \langle u_i \rangle_\Delta}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle_\Delta}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu \frac{\partial \langle u_i \rangle_\Delta}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}^{SGS}}{\partial x_j} + g_i + F_\sigma, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \langle f \rangle_\Delta}{\partial t} + \langle u_j \rangle_\Delta \frac{\partial \langle f \rangle_\Delta}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} D_s \frac{\partial \langle f \rangle_\Delta}{\partial x_j} - \frac{\partial J_j^{SGS}}{\partial X_j}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \alpha_w}{\partial t} + \langle u_j \rangle_\Delta \frac{\partial \alpha_w}{\partial x_j} = 0, \quad (10)$$

где  $\langle \dots \rangle_\Delta$  – оператор пространственного осреднения,  $u_i$  – компонента вектора скорости,  $p$  – давление,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости,  $D_s$  – коэффициент диффузии,  $g_i$  –

компонента вектора ускорения свободного падения. Функция  $\alpha_w$  является индикаторной. В уравнении (10) учтено, что турбулентный обмен между фазами отсутствует.

Параметризация подсеточных напряжений и потоков скаляра осуществляется на основе моделей добавочной вязкости Смагоринского

$$\tau_{ij}^{SGS} = -2\nu_{SGS}\langle S_{ij} \rangle_{\Delta}, \quad \langle S_{ij} \rangle_{\Delta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle_{\Delta}}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle_{\Delta}}{\partial x_i} \right), \quad J_j^{SGS} = -\frac{\nu_{SGS}}{SC_{SGS}} \frac{\partial \langle f \rangle_{\Delta}}{\partial x_j},$$

где  $\nu_{SGS} = C_S^2 \Delta^2 |S| f_S(Ri)$  – подсеточная вязкость;  $|S| = \sqrt{2\langle S_{ij} \rangle_{\Delta} \langle S_{ij} \rangle_{\Delta}}$ ;  $C_S$  – коэффициент Смагоринского;  $SC_{SGS} = 0.4 \cdot 0.7$  – турбулентное число Шмидта;  $Ri = N^2 / (du_1/dx_3)^2$  – число Ричардсона;  $N^2 = -g/\rho \, dp/dx_3$  – квадрат частоты Вайсяля. Функция плавучести принята в виде [8]

$$f_S(Ri) = (1 - Ri/C_{BS})^{3/2} (1 - Ri/SC_{SGS})^{-1},$$

где  $C_{BS} \approx 0.273$  – константа.

**Численная аппроксимация.** Для решения системы дифференциальных уравнений (7)-(10) используется полунявный проекционный метод [6]. На первом этапе определяются промежуточные значения скорости по известным (с предыдущего шага по времени или из начальных условий) полям скорости, давления и плотности. На втором этапе находятся поправки давления  $\delta p$ , являющиеся решением уравнения Пуассона. Затем корректируются промежуточные значения скорости и давления по найденным  $\delta p$ . На последнем этапе рассчитываются коэффициент смешения, объемная фракция жидкости и поле плотности. В пространственной области дискретизация осуществляется методом Петрова–Галеркина с линейным представлением интерполяционного базиса и проекционным базисом, предложенным в [11]. Аппроксимация производных имеет второй порядок точности. Система линейных алгебраических уравнений решается методом сопряженных градиентов. Для повышения эффективности расчетов используется алгоритм распределенных вычислений, основанный на декомпозиции по подобластям и декомпозиции аппроксимирующих матриц.

**Верификация модели.** Для оценки качества решения численной модели, в которой свободная поверхность описывается методом объема жидкости (VoF), была решена задача о гидравлическом скачке над подводной горкой при сверхкритическом режиме ее обтекания. Был воспроизведен эксперимент [12]. В средней части канала, размер которого  $10H \times 2H \times H$ , где  $H$  – высота канала, поперек потока размещено призматическое подводное препятствие, основание которого  $l = 3.2H$ , высота  $h = 0.28H$ . Число Фруда составляло  $Fr = u_0/\sqrt{gH} = 2.3$ , где  $u_0$  – скорость потока. Расчеты были выполнены на сетке, состоящей из 2.5 млн расчетных ячеек. В начальный момент времени скорость потока полагалась однородной. На твердых границах задавались условия прилипания. На входе и выходе из канала задавался профиль скорости для продольной компоненты скорости. На свободной поверхности фиксировалось значение давления.

На рис.1 показано возвышение свободной поверхности в районе препятствия. В целом результаты моделирования можно признать удовлетворительными. Качественное изменение уровня свободной поверхности в расчетах согласуется с экспериментальными данными. Наибольшие различия наблюдаются вверх по течению от препятствия.

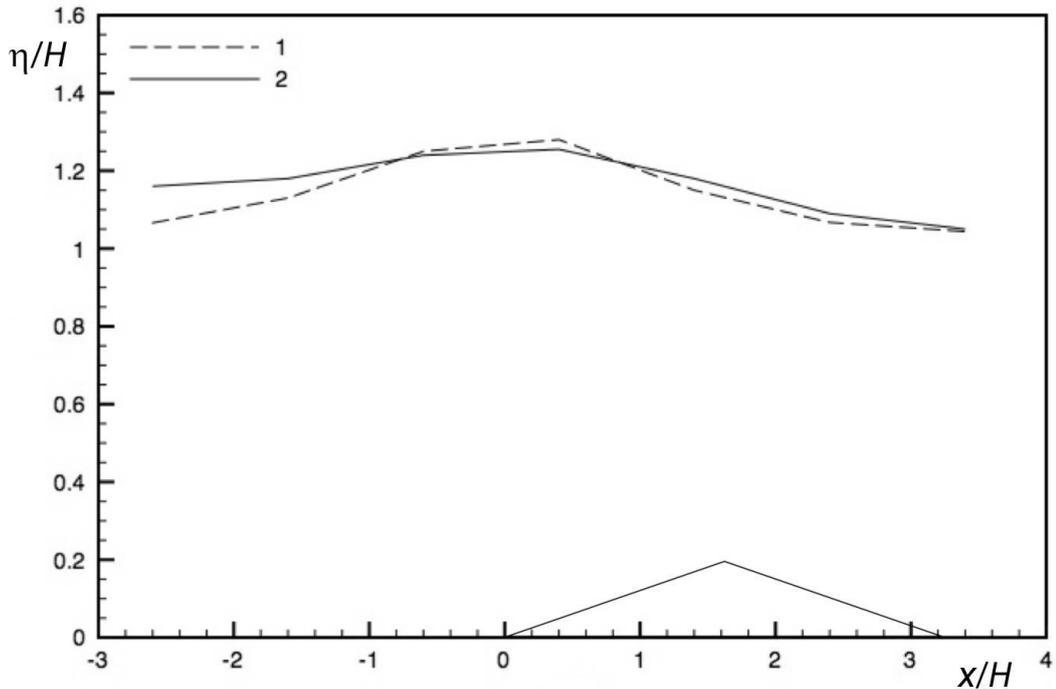


Рис.1. Возвышение свободной поверхности, направление течения слева на право: 1 – эксперимент [12], 2 – LES-VoF.

**Численное моделирование взаимодействия поверхностной и внутренней волны.** Взаимодействие внутренних и поверхностных волн является решающим для процессов передачи энергии и импульса от атмосферы к океану. Формирование верхнего квазиоднородного слоя и внутриволновой динамики на пикноклине, происходящее в результате этого взаимодействия, во многом определяет процессы перемешивания во всем океане. В рамках этой задачи изучаются многие проблемы океанологии, в том числе интерпретация поверхностных проявлений внутренних волн. Проведено большое количество теоретических и лабораторных исследований, посвященное решению данной проблемы. Для диапазона дециметровых и метровых волн разработана кинематическая модель [13], воспроизводящая влияние переменного подповерхностного течения, создаваемого внутренней волной, на кинематику поверхностных волн. Для высокочастотных волн большую роль играют влияние пленок поверхностно-активных веществ и турбулентность приповерхностного слоя при наличии ВВ. Последний механизм подробно анализировался в [14–15] и для волн больших длин.

В данной работе будут описаны результаты численных экспериментов по генерации внутренней волны поверхностной.

**Взаимодействие внутренней и поверхностной волны.** Исследование взаимодействия поверхностных и внутренних волн в настоящей работе осуществлялось с помощью задания на свободной поверхности регулярной волны, которая в последующие моменты времени свободно деформировалась. В качестве регулярной волны была выбрана волна Стокса второго порядка, длина которой составляла 3 м, амплитуда 0.1 м, волновое число – 4.6 рад/м, период – 1.36 с, частота – 4.6 рад/с, фазовая скорость – 2.2 м/с, скорость дрейфа –  $u_0 = 0.4$  м/с. Решение осуществлялось в прямоугольной области размером  $12H \times H \times 1.6H$ , где  $H = 0.5$  м – толщина слоя жидкости (морской среды). Глубина залегания пикноклина  $h = 0.2$  м, что соответствует натурной глубине 30–40 м. Частота плавуности принималась равной  $N = \sqrt{g/\rho_a \Delta\rho/H} = 0.44$  1/с. В начальный момент времени полагалось, что внутренние волны отсутствуют. На входной границе расчетной области, за которую была принята грань  $x_1 = -6H$ , задавался профиль скорости волны Стокса. На выходной границе  $x_1 = 6H$  – нормальная компонента скорости. На твердых поверх-

ностях использовался метод пристеночных функций. Числа Рейнольдса и Фруда были равны:  $Re = u_0 H / \nu = 2 \cdot 10^5$  и  $Fi = u_0 / NH = 1.82$  соответственно. Расчетная сетка состояла из 2.1 млн ячеек.

На рис.2 представлены результаты эксперимента в поле однородной жидкости для дальнейшего сопоставления с таковыми в стратифицированной. Здесь стоит отметить только, что при выбранном параметре крутизны 0.13 волна Стокса, являющаяся устойчивым решением потенциальной задачи [16], в ходе эволюции меняет свои параметры (уменьшение амплитуды).

На рис.3 показаны эволюция во времени поля безразмерной плотности  $f$  морской среды и положение свободной поверхности. После первого периода отчетливо наблюдается появление внутренних волн (ВВ) крутизна которых больше крутизны поверхностных волн (рис.2, а). Амплитуда ВВ составляет  $a_{iw} = 1.45a_{sw}$  от амплитуды поверхностных волн. При этом длина ВВ практически равна длине поверхностной. Однако после второго периода, когда сформировалась внутренняя волна, происходит трансформация внутренних и поверхностных волн и выглаживание поверхностных волн. Их амплитуда составляет  $0.76a_{sw}$  от первоначальной, а длина –  $0.89\lambda_{sw}$ . Амплитуда ВВ при этом практически не меняется. Несколько уменьшается ее длина, которая составляет  $0.93\lambda_{iw}$  от первоначального значения. Можно утверждать, что первоначальная квазидвухмерная форма волн сохраняется (рис.4).

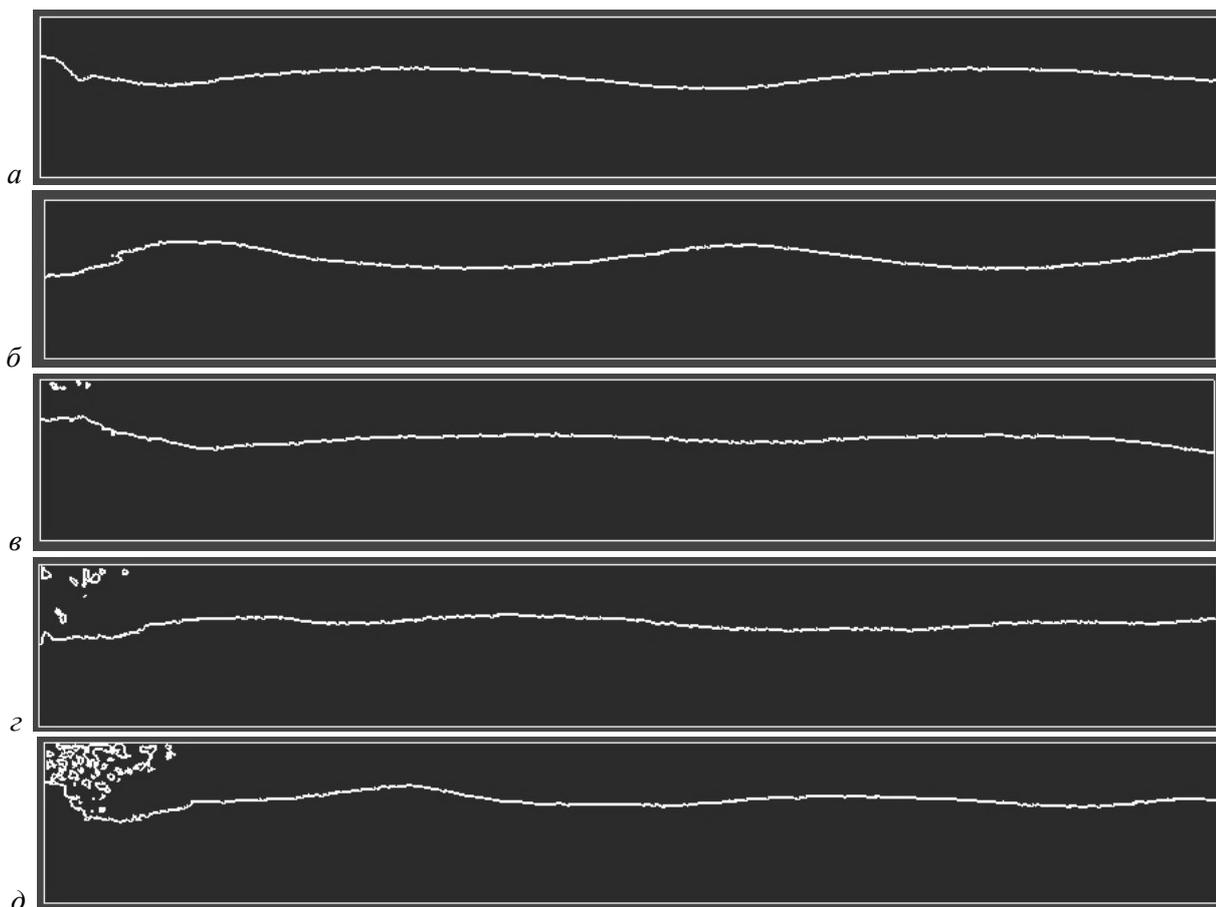


Рис.2. Эволюция во времени свободной поверхности однородной жидкости  $t$ : а–д – 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0  $T$  соответственно. Вертикальный разрез.

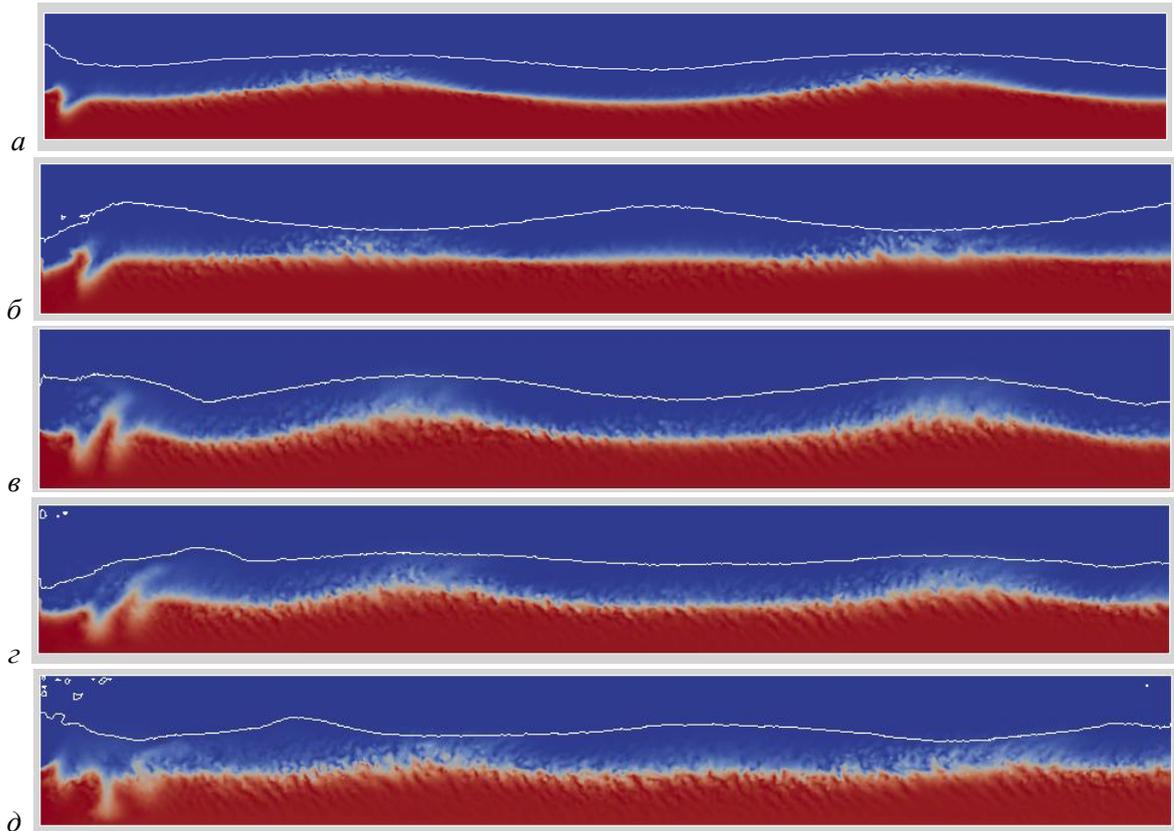


Рис.3. Эволюция во времени свободной поверхности и поля безразмерной плотности  $f$ : вертикальный разрез  $a-d$  – 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0  $T$  соответственно.

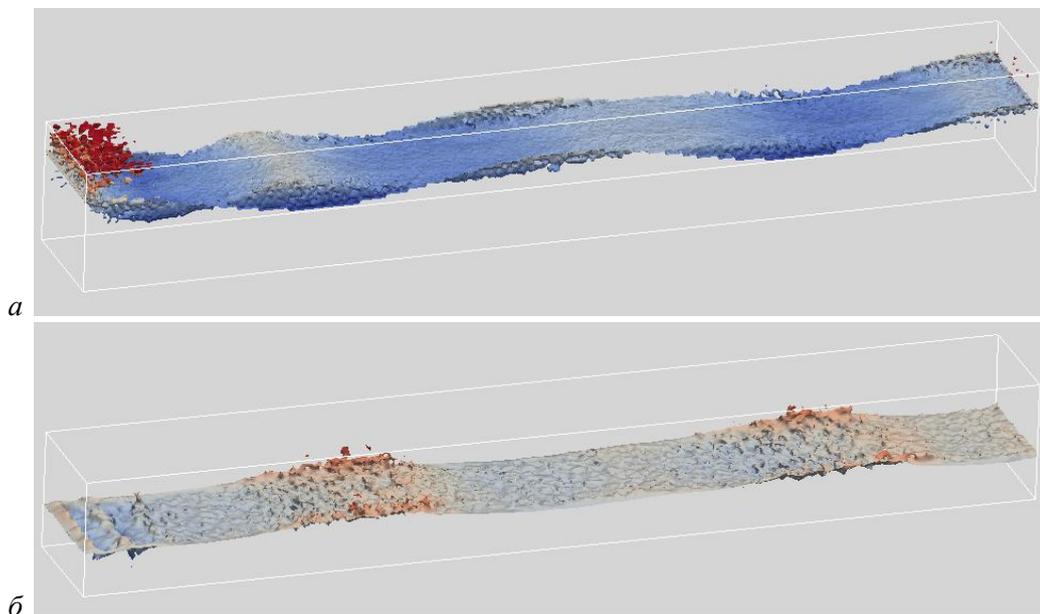


Рис.4. Вид свободной поверхности и изопикнической поверхности  $f = 0.5$  на момент времени 3.00 $T$ .

Однако со временем гребень поверхностной волны смещается относительно гребня ВВ и располагается над ее подошвой. Этот процесс происходит под действием турбулентности и сдвиговой неустойчивости. Соответствующей иллюстрацией служат рис.5 и 6.

На рис.5 показан вертикальный профиль турбулентной кинетической энергии (ТКЭ) на заднем склоне третьей волны. Видно, что максимум ТКЭ на глубине ПВ

уменьшается в ходе третьего периода, одновременно опускаясь к подошве ВВ, на момент  $2.5T$  значения ТКЭ образуют там второй максимум, который к моменту  $3T$  располагается близ горизонтальной оси ВВ. ТКЭ на глубине ПВ вновь начинает расти. Необходимо отметить, что благодаря LES-подходу в подсеточную ТКЭ «сбрасывается» малая часть кинетической энергии.

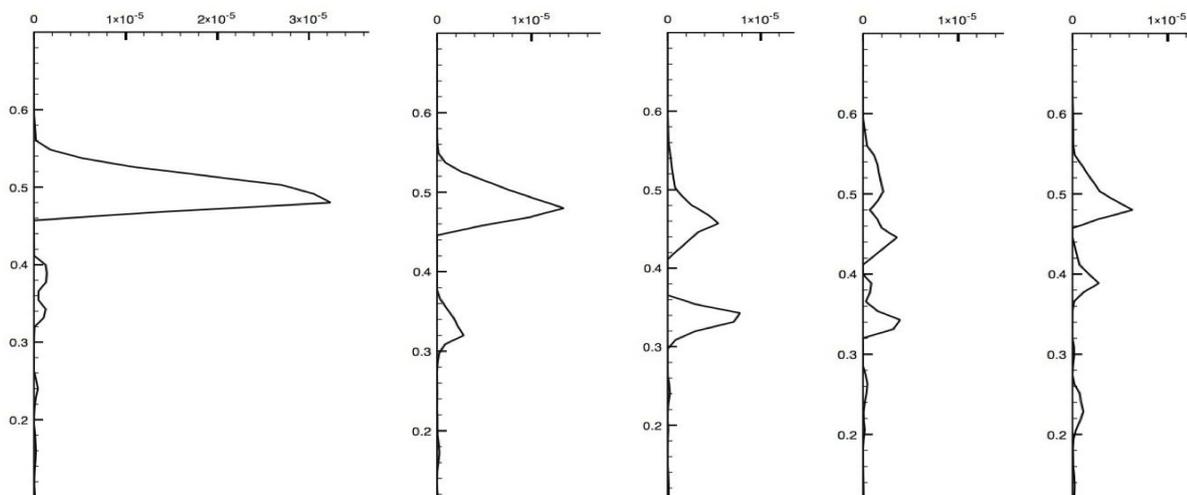


Рис.5 Вертикальный профиль турбулентной (подсеточной) кинетической энергии (ТКЭ) ( $x_1/H = -2, x_2/H = 0$ ) в моменты 2, 2.25, 2.5, 2.75,  $3T$ .

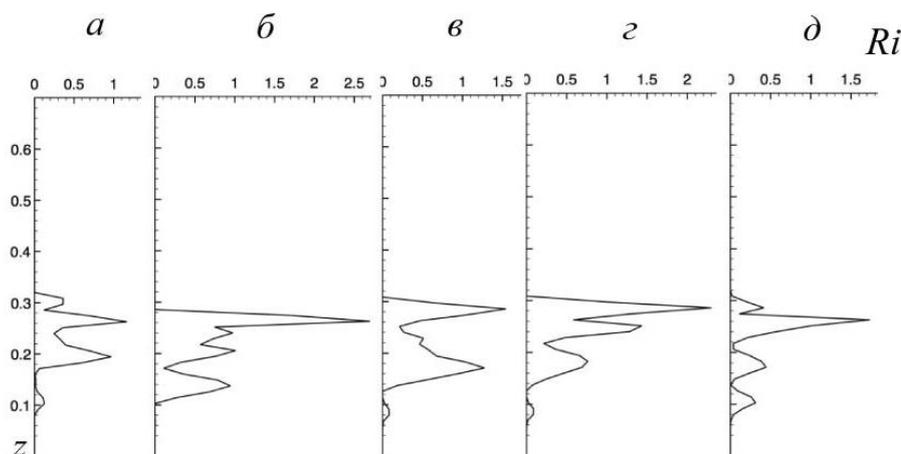


Рис.6. Вертикальный профиль числа Ричардсона ( $x_1/H = -2, x_2/H = 0$ ). а-д – 2, 2.25, 2.5, 2.75,  $3T$ .

Представленная на рис.6 информация о вертикальном распределении  $Ri$  показывает, что на глубине пикноклина, в зоне устойчивости, в ходе периода возникают участки с малыми значениями числа Ричардсона, ( $Ri \leq 0.25$ ), т.е. там возможно обрушение ВВ. Более подробная информация такого рода представлена на рис.7. Здесь зоны с  $Ri \leq 0.25$  располагаются на заднем склоне и над гребнем волны.

Анализ гидродинамических и гидрофизических полей на уровне свободной поверхности и на глубине залегания пикноклина в точках  $x_1/H = -2, x_2/H = 0, x_3/H = 1$ ; 0.6 показывает, что в течение первых двух периодов параметры волны Стокса сохраняются (рис.8). Имеет место лишь небольшое затухание амплитуды поверхностной волны вследствие действия сил вязкости (рис.8, б). Внутренняя волна, соответствующая волне Стокса, формируется после первого периода с запаздыванием на  $t^* = tu_0/H \approx 0.74$ . В дальнейшем при  $t^* > 1.65$ , после второго периода, появляются более короткие поверх-

ностные и внутренние волны. Причем можно утверждать, что трансформация поверхностной волны обусловлена ее взаимодействием с внутренней волной, так как до этого параметры волны не меняются.

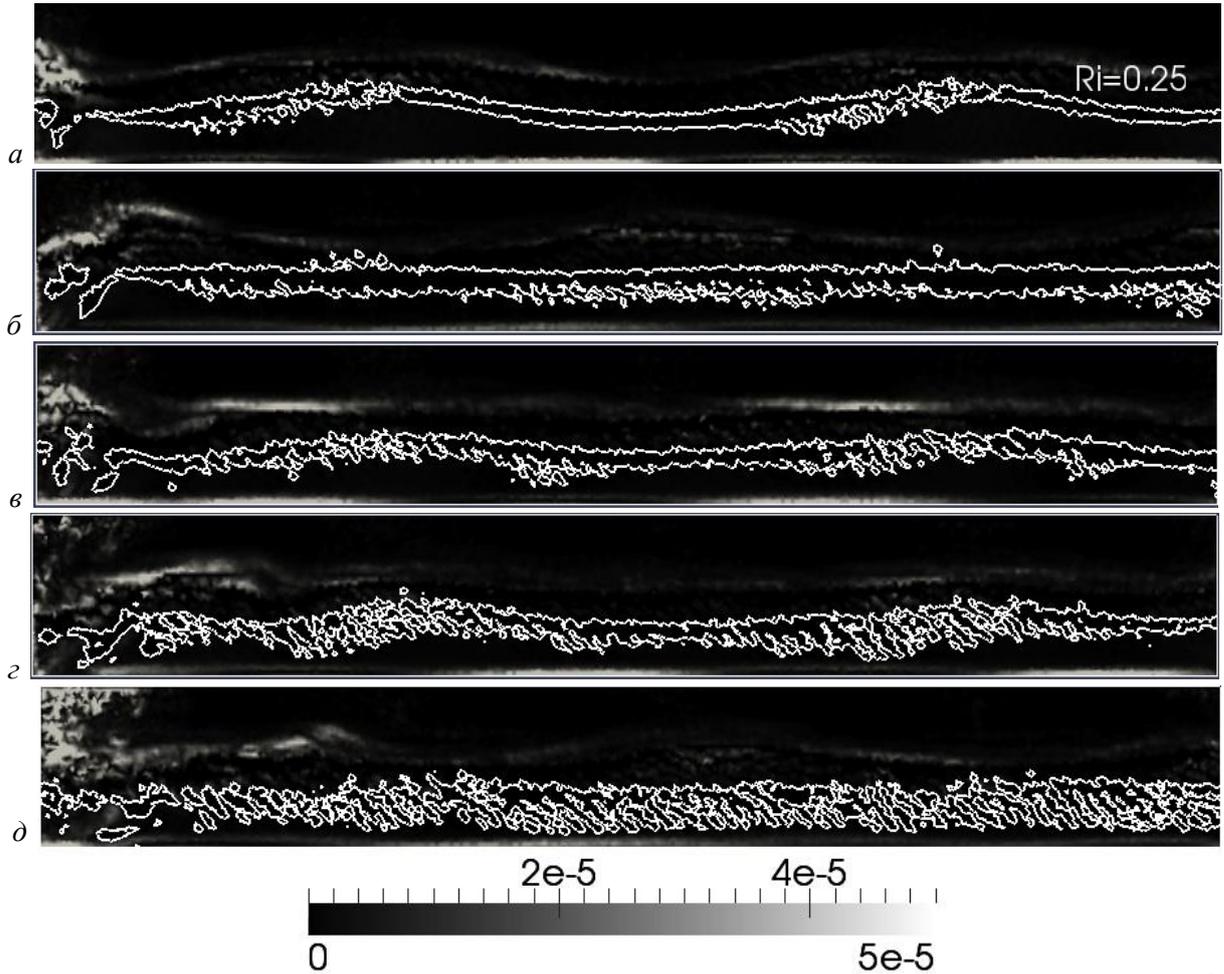


Рис.7. Эволюция во времени турбулентной кинетической энергии  $k_{SGS}/u_0^2$  и критического значения числа  $Ri$ . Вертикальный разрез:  $a-d$  – 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0 $T$ .

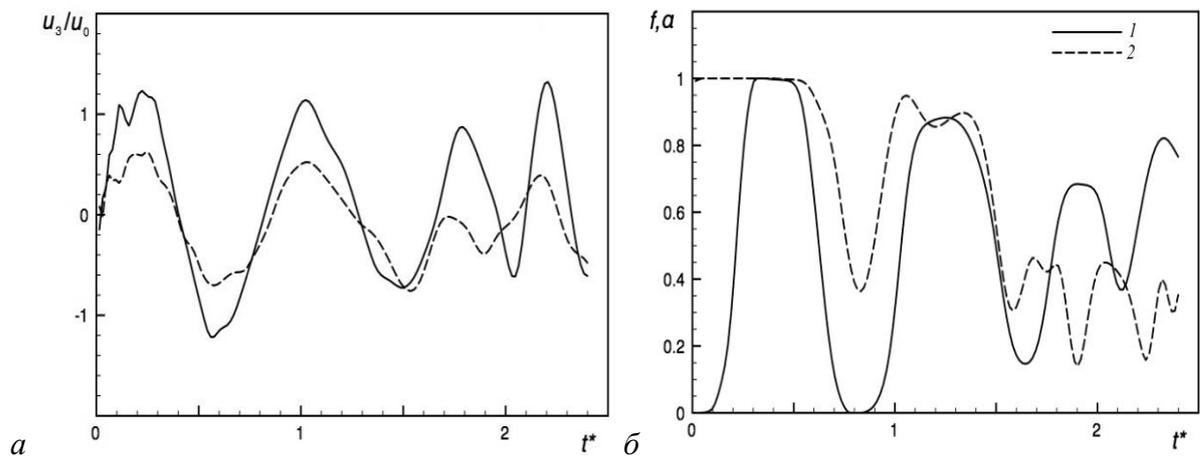


Рис.8. Эволюция во времени вертикальной компоненты скорости  $u_3/u_0$  (а) и безразмерной плотности, объемной фракции жидкости  $f, \alpha$  (б) в точках  $x_1/H = -2, x_2/H = 0, x_3/H = 1; 0.6$ . 1 – на уровне свободной поверхности, 2 – на уровне пикноклина.

\*\*\*

Сравнение результатов численного и лабораторного экспериментов показало адекватность получаемого численного решения. В волновом эксперименте получено подтверждение основного вывода теории [14–15] о выглаживании поверхностной волны над гребнем внутренней. В настоящее время этот процесс изучается более подробно.

Авторы статьи выражают глубокую благодарность СПб ИИА РАН и организаторам программы «Университетский кластер» за предоставленные в их распоряжения вычислительные средства.

## Литература

1. *Oezgoekmen T.M., Chassignet A.* Dynamics of two-dimensional turbulent bottom gravity currents // *J. Phys. Oceanogr.* 2002. V.32. P.1460–1478.
2. *Kanarska Yu., Maderich V.* A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows // *Ocean Dynamics.* 2003. № 53. P.176–185.
3. *Ford R.* A non-hydrostatic finite-element model for three-dimensional stratified oceanic flows. Part I: Model formulation // *Monthly Weather Review.* 2004. V.132. P.2816–2831.
4. *Vlasenko V., Alpers W.* Generation of secondary internal waves by the interaction of an internal solitary waves with an underwater bank // *J. of Geophysical Research.* 2005. N 110(C2). C02019, doi: 10.1029/2004JC002467.
5. *Hirt C.W., Nichols B.D.* Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // *J. of Comp. Physics* 1981. V.39(1). P.201–225.
6. *Tkatchenko I.V., Shin H.* The Generation of the Vortex Wake by Artificial obstacles // *Schiffbau Forschung.* 2004. Bd.43, N 2. P.59–67.
7. *Гурьев Ю.В., Ткаченко И.В.* Моделирование обтекания тела вращением потоком стратифицированной жидкости на основе метода крупных вихрей (LES) // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика.* СПб.: Наука, 2008. № 1. С.80–87.
8. *Сафрай А.С. Ткаченко И.В.* Численное моделирование гравитационных течений жидкости в наклонном канале // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2009. № 1. С.21–30.
9. *Shin H.R., Makarov B.P., Krishinan H., Ivanov V.* Assesment of the volume of fluid method for free-surface wave flow // *J. Marine Science and Technology.* 2005. N 10. P.173–180.
10. *Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C.* A continuum method for modeling surface tension // *J. Comput. Phys.* 1992. V.100. P.335–354.
11. *Шахверди Г.Г.* Ударное взаимодействие судовых конструкций с жидкостью. СПб.: Судостроение, 1993. 256 с.
12. *Bouzelha-Hammoum K., Bouhadeh M., Zitoun T., Guendouzen-Dabouz T.* Contribution to the study of a free-surface supercritical flow above an obstacle: theory – laboratory work // *6th IASME/WSEAS Intern. Conf. Fluid Mech. Aerodynamics (FMA' 08).* Rhodes. Greece. August 20–22. 2008. P.184–189.
13. *Басович А.Я., Баханов В.В., Таланов В.И.* Влияние интенсивности внутренних волн на ветровое волнение (кинематическая модель) // *Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность.* Сб. ст. ИПФ РАН. 1982. Горький. С.8–30.
14. *Баренблатт Г.И., Бенилов А.Ю.* Влияние внутренних волн на неоднородности гидрофизических характеристик поверхности океана // *Воздействие крупномасштабных внутренних волн на морскую поверхность.* Сб. ст. ИПФ РАН. 1982. Горький. С.52–74.
15. *Островский Л.А., Соустова И.А., Цимринг Л.Ш.* Воздействие внутренних волн на мелкомасштабную турбулентность в океане // *Препринт № 31,* Горький: ИПФ РАН, 1981. 15 с.
16. *Войткунский Я.И., Федяевский К.К., Фаддеев Ю.И.* Гидромеханика. Л.: Судостроение, 1968. 568 с.

Статья поступила в редакцию 18.04.2012 г.

