

УДК 551.466.6

© И.И. Диденкулова^{1,2,3}, Е.Н. Пелиновский^{3,4}, А.А. Родин^{1,2}, 2012

¹ Нижегородский государственный технический университет

² Институт кибернетики, Таллинский технологический университет, Таллин, Эстония

³ Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

⁴ Высшая школа экономики, Нижегородский филиал

dii@hydro.appl.sci-nnov.ru

ФОРМИРОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ВОЛН НА МЕЛКОЙ ВОДЕ С УЧЕТОМ ОБРУШЕНИЯ

В рамках нелинейной теории мелкой воды изучается формирование экстремальных волн (волн-убийц) в бассейне постоянной глубины. Показано, что в случае однонаправленного распространения необрушенных волн волновое поле перестает быть гауссовым, но вероятность появления больших волн при этом не возрастает. Обрушение волн также не приводит к появлению аномально больших волн, однако в случае волн большой амплитуды оно вызывает появление отраженной волны, которая может внести свой вклад в образование волн-убийц при встречном взаимодействии. В то же время при встречном распространении длинных нерегулярных волн с гладким профилем вероятность появления больших гребней возрастает. Вклад обрушения в этом случае изучен для различных сценариев встречного взаимодействия регулярных обрушенных волн различной амплитуды.

Ключевые слова: волны на воде, длинные волны, нелинейные волны, волны-убийцы, обрушение.

Волны-убийцы на поверхности моря за последние 10 лет стали предметом серьезного исследования в гидрофизике с применением методов нелинейной теории волн. При этом обычно учитываются два главных фактора эволюции морских волн: дисперсия, связанная с разностью в скоростях распространения отдельных спектральных компонент, и нелинейность, приводящая к асимметрии формы волны и изменению скорости ее распространения. Существующие механизмы формирования волн-убийц под воздействием нелинейности и дисперсии суммированы в недавних книгах и обзорах [1–4]. Особенно существенна дисперсия для волн в открытом океане, где значение фазовой и групповой скоростей отличается в 2 раза. Между тем, как показывает анализ наблюдаемых данных [5], большинство аварий и столкновений с волнами-убийцами происходит как раз в прибрежной зоне: в мелководной части океана и на берегу. Так, за 5 лет с 2006 по 2010 г. 50 % всех аварий, вызванных волнами-убийцами, произошло на берегу, 38.5 % – на мелководье и только 11.5 % – в глубоководной части океана и открытом море. Ущерб, вызванный такими столкновениями, также особенно значителен именно в прибрежной зоне. В частности, из 131 смертного случая, вызванного волнами-убийцами, 79 произошли на мелководье и 46 – на берегу.

Отметим, что на мелкой воде роль дисперсии ослабевает, и она проявляется только на достаточно протяженных шельфах. Основной моделью в этом случае является теория слабонелинейных волн, представленная известным уравнением Кортевега-де Вриза, в рамках которого показано, что нерегулярное волнение становится негауссовым и вероятность появления волн большой амплитуды возрастает [6, 7]. Вблизи же берега дисперсия становится совсем малой и ею можно пренебречь, в то время как нелинейность, наоборот, растет и приводит к наблюдаемому обрушению волн. Эти эффекты хорошо описываются в рамках нелинейной теории мелкой воды, которая активно применяется для решения практических задач прибрежной океанографии и морской гидротехники [8–10].

Исследование же процессов, ведущих к появлению волн-убийц в рамках теории мелкой воды, начато совсем недавно, причем только для необрушенных волн [11–13]. Целью данной статьи является обсуждение основных сценариев взаимодействия длинных волн, которые могут привести к появлению волн-убийц на мелкой воде с учетом эффектов сильной нелинейности и обрушения.

Теоретическая модель. В качестве теоретической модели будем использовать нелинейную теорию мелкой воды в бассейне постоянной глубины:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Hu) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где $H(x, t) = h + \eta(x, t)$ и $u(x, t)$ – толщина и скорость водного потока соответственно; h – постоянная глубина бассейна; g – гравитационная постоянная; $\eta(x, t)$ – смещение водной поверхности.

Однонаправленное взаимодействие длинных волн с гладким профилем. Поскольку в бегущей волне существует однозначная связь между скоростью и смещением, то порядок системы (1) может быть понижен [14, 15]:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + V(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0; \quad (2)$$

V – нелинейная скорость распространения различных участков волнового профиля:

$$V(\eta) = 3\sqrt{g(h + \eta)} - 2\sqrt{gh}. \quad (3)$$

В случае граничного условия при $x = x_0$: $\eta(x_0, t) = \eta_0(t)$ решение уравнения (2) имеет вид

$$\eta(x, t) = \eta_0 \left(t - \frac{x - x_0}{V(\eta)} \right) \quad (4)$$

и представляет собой так называемую простую, или риманову, волну [10, 14, 16]. При распространении риманова волна постепенно укрупняется и трансформируется в ударную волну, или бор. Этот процесс также может быть продемонстрирован аналитически, если рассчитать крутизну переднего склона волны, которая представляет собой производную от профиля водной поверхности:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{-\frac{1}{V} \frac{d\eta_0}{dt}}{1 + (x - x_0) \frac{dV^{-1}}{d\eta} \frac{d\eta_0}{dt}}. \quad (5)$$

Из равенства (5) видно, что крутизна волны становится бесконечной на длине обрушения волны

$$L = \frac{1}{\max \left(-\frac{dV^{-1}}{d\eta} \frac{d\eta_0}{dt} \right)}. \quad (6)$$

Отметим, что нелинейная скорость распространения волн (3) становится отрицательной для волн большой амплитуды и критическая толщина потока, когда $V = 0$, равна [15]:

$$H_{cr} = \frac{4h}{9}. \quad (7)$$

Таким образом, очень глубокая впадина волны начинает двигаться в направлении, противоположном ее основному движению. Этот парадокс может быть разрешен при анализе длины обрушения волны (6). Из выражения (6) видно, что сильнонелинейная волна обрушается вблизи точки $x = x_0$, следовательно, не может быть исследована в рамках исходных уравнений (1), и мы ограничиваем толщину рассматриваемого потока $H > H_{cr}$. Однако, как будет показано ниже, при учете обрушения обозначенный эффект приводит к образованию отраженной волны.

Скорость частиц потока в римановых волнах описывается следующим выражением:

$$u(\eta) = 2\left(\sqrt{g(h+\eta)} - \sqrt{gh}\right), \quad (8)$$

из которого следует, что скорость потока положительна под гребнем волны и отрицательна под впадиной.

Описанный выше подход может быть применен как к детерминистским волнам, так и случайному полю [17, 18]. В этом случае поведение таких характеристик волнового поля, как длина обрушения, интенсивность основной гармоник, субгармоник и др., могут быть изучены статистически. Некоторые аналитические результаты для случайного поля римановых волн были получены в работе [17]. В частности, если поле падающих волн представляет собой случайный стационарный процесс, то его вероятностное распределение не меняется с расстоянием. Конечно, этот результат получен в приближении необрушенных волн, и обрушение волн может его изменить.

Довольно часто для описания случайного поля используется гауссово распределение. При этом в случае слабонелинейных волн смещение водной поверхности и скорость волнового потока представляют собой гауссовы процессы, в то время как в случае сильнонелинейных римановых волн, как это следует из (8), их распределения различны, а соответствующие плотности вероятности W связаны следующим соотношением [19]:

$$W(u) = W(\eta) |d\eta/du|. \quad (9)$$

Применительно к образованию экстремальных волн в океане эти результаты означают, что вероятность возникновения волн-убийц в поле римановых волн не меняется с расстоянием и не зависит от нелинейности волн. Подчеркнем еще раз, что данный результат получен аналитически в приближении длинных волн без учета обрушения. Учет обрушения обсуждается в следующем разделе.

Однонаправленное взаимодействие волн с учетом обрушения. Описание процесса обрушения волн даже в рамках теории мелкой воды является трудной математической задачей. Как известно из работы [10], длинная волна большой амплитуды при распространении трансформируется в ударную волну, или бор, в то время как длинные волны малой амплитуды преобразуются в ундулярный (волнистый) бор или последовательность солитонов. В данном разделе мы фокусируем внимание на взаимодействии сильнонелинейных волн большой амплитуды в бассейне постоянной глубины и их последующей трансформации в бор.

Обрушение приводит к диссипации волновой энергии и требует модификации основных уравнений. В простейших случаях, особенно при малых амплитудах, диссипа-

цию параметризуют вязкостью, так называемым Бюргерсовским членом. Для волн большой амплитуды обычно используют другой подход, связанный с записью исходных уравнений в форме законов сохранения, которые справедливы и для обрушенных волн. Этот подход и используется здесь. Он реализован численно с помощью программного комплекса CLAWPACK (www.amath.washington.edu/~claw/), основанного на методе конечных объемов [20, 21].

Если волна имеет достаточно малую амплитуду, то ее эволюция происходит по стандартному сценарию, хорошо известному из нелинейной акустики: импульс трансформируется в ударный, который затухает со временем и растягивается в пространстве [9, 17, 18]. Этот процесс показан на рис. 1 для волны отрицательной полярности в бассейне глубиной 1 м [22]. Фактически такая трансформация может быть описана уравнением Бюргерса. Примечательно, что в рамках этого уравнения может быть изучена и динамика нерегулярных волн, так называемая бюргерсовская турбулентность. При этом волновое поле затухает, оставаясь негауссовым, а вероятность появления больших волн уменьшается [17].

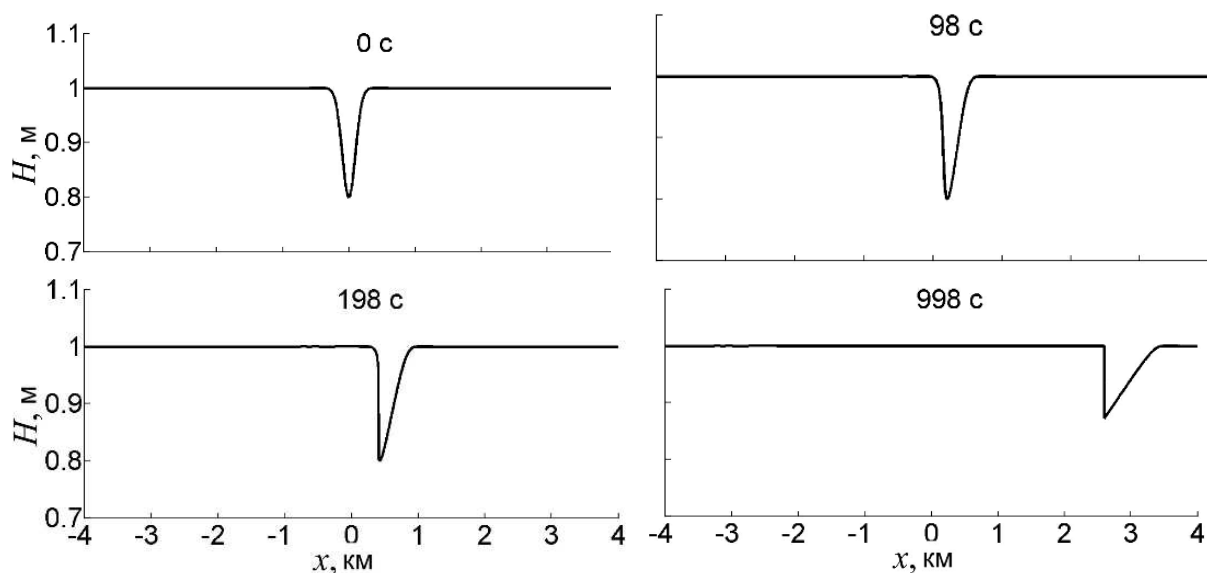


Рис. 1. Формирование ударной волны малой амплитуды с начальной амплитудой волны 0.2 м.

Совершенно неожиданные результаты получаются, если увеличить амплитуду впадины. Здесь при формировании ударного фронта с него срывается вершинка, которая распространяется в противоположную сторону (рис. 2).

Этот процесс также влияет на однонаправленное взаимодействие двух волн (рис. 3). При распространении волны сливаются в один импульс, оставляя за собой отраженные волны, которые в случае случайного поля, в свою очередь, будут взаимодействовать с другими падающими волнами, движущимися во встречном направлении. Уже из продемонстрированного единичного сценария видно, что взаимодействие нерегулярных волн представляет собой сложный процесс, требующий значительных машинных ресурсов для его численного моделирования.

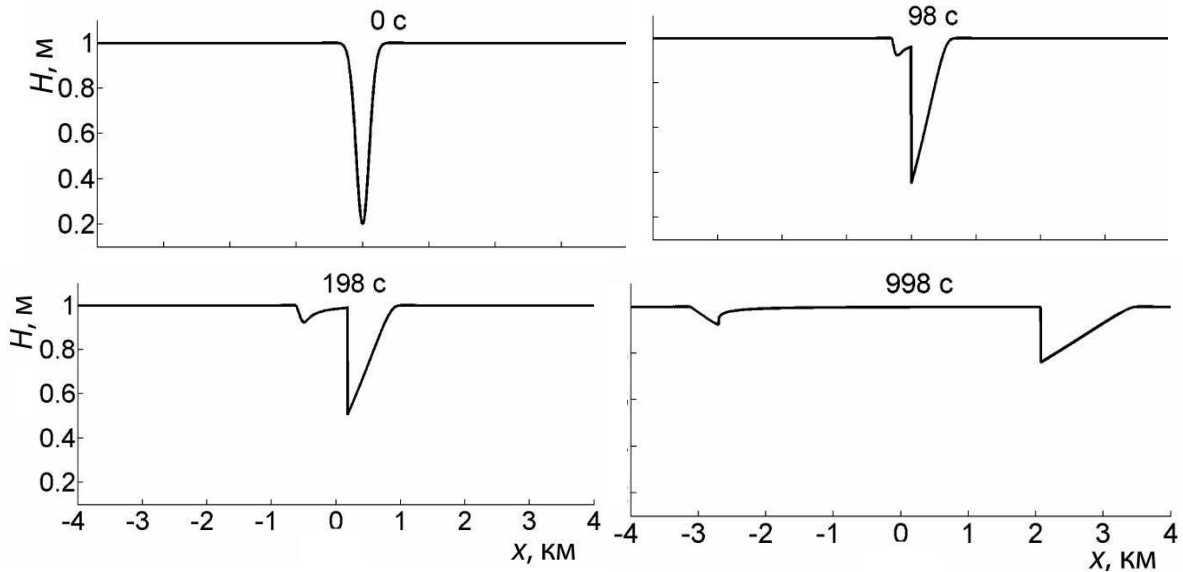


Рис. 2. Эволюция сильнонелинейной ударной волны с начальной амплитудой 0.8 м.

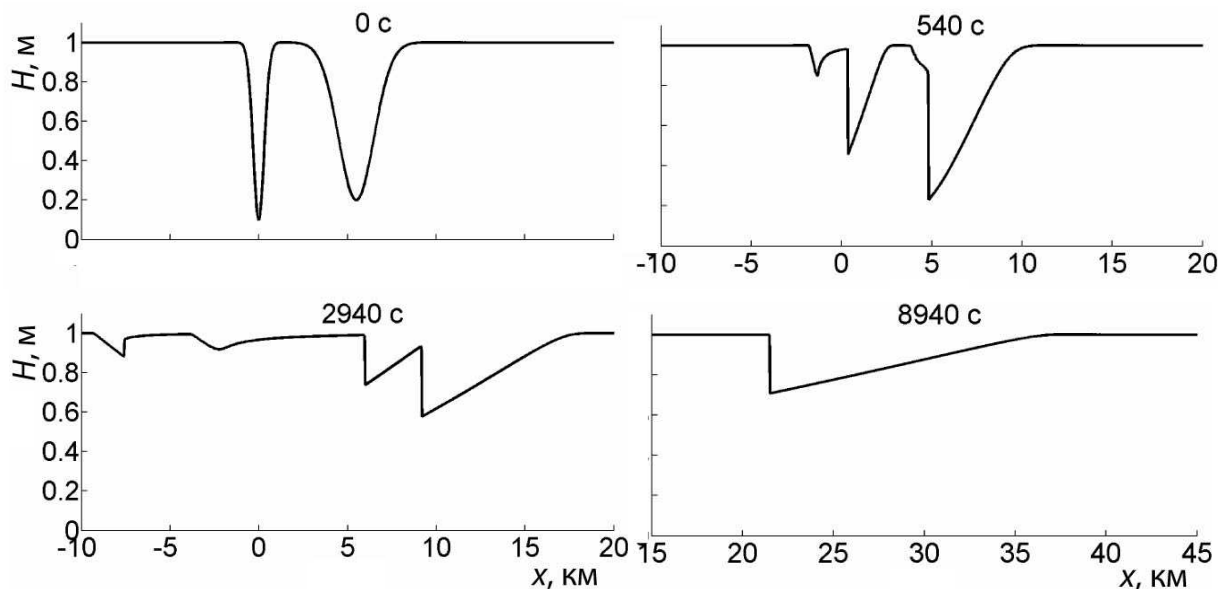


Рис. 3. Однонаправленное взаимодействие двух впадин с начальными амплитудами 0.9, 0.8 м и характерными длинами волн 0.9 и 2.8 км соответственно.

Взаимодействие длинных необрушенных волн со стенкой. Рассмотрим взаимодействие римановой волны со стенкой, что также соответствует встречному взаимодействию двух одинаковых римановых волн. В этом случае система (1) должна решаться с учетом граничного условия непротекания воды через стенку ($x = 0$):

$$u(x=0, t) = 0. \quad (10)$$

Взаимодействие римановой волны со стенкой в бассейне постоянной глубины подробно описано в [9, 11], поэтому остановимся только на главных результатах, опуская сам вывод. В частности, удастся связать максимальные значения толщины водного потока вдали от берега H_{in} и на стенке H_w :

$$\frac{H_w}{h} = 1 + 4 \left[\frac{H_{in}}{h} - \sqrt{\frac{H_{in}}{h}} \right]. \quad (11)$$

Из этого выражения видно, что высота волны на стенке нелинейно растет с увеличением высоты падающей волны. Динамику взаимодействия слабонелинейной волны высотой 0.2 м с вертикальной стенкой можно наблюдать на рис. 4. В этом случае волна слегка укручается при подходе к стенке и плавно накатывается на нее. Максимальная высота наката при этом составляет 0.42 м, что соответствует оценке, сделанной по формуле (11), и близка к значению, полученному из линейной теории (0.4 м).

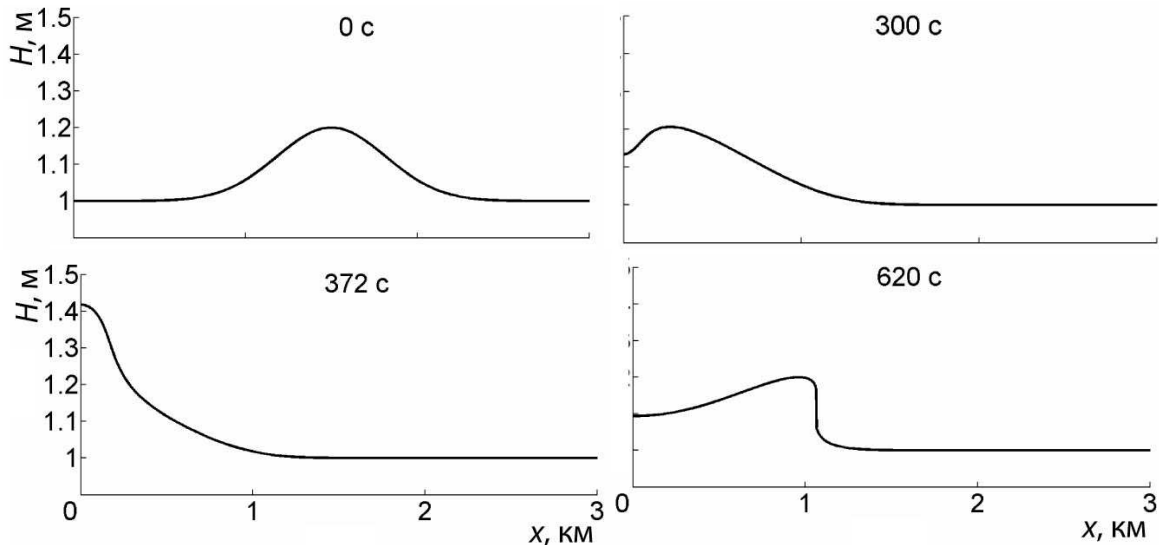


Рис. 4. Взаимодействие со стенкой волны, имеющей начальную высоту 0.2 м.

Поскольку падающая и отраженная волны всегда могут быть разделены в пространстве, то обозначенный подход может быть применен и для случайного поля волн. В этом случае мы сможем описать спектр и функции распределения волнового поля. Используя соотношение (11), можно найти связь между распределениями максимальных значений толщины водного потока в падающей волне $W_{H_{in}}$ и на стенке W_{H_w} [11, 12]:

$$W_{H_w}(H_w) = W_{H_{in}}(H_{in}) \left| \frac{dH_{in}}{dH_w} \right|_{H_{in}(H_w)}. \quad (12)$$

Тогда вероятность превышения уровня воды, отражающая возникновение волнубийц, может быть найдена интегрированием плотности вероятности (12). Если предположить, что H_{in} вдали от берега распределены по Рэлею (т.е. само поле представляет собой гауссов процесс):

$$P(H_{in}) = \exp\left(-\frac{2(H_{in} - h)^2}{A_s^2}\right), \quad (13)$$

где A_s – так называемая значительная амплитуда, определяемая через дисперсию гауссового процесса как 2σ , то соответствующая вероятность превышения уровня воды на стенке может быть рассчитана из (12). Соответствующие ее расчеты представлены на рис. 5 для различных значений параметра $\varepsilon = H_s / h$, где $H_s = 2A_s$ – значительная ампли-

туда волн на стенке, которая, как это следует из линейной теории, в 2 раза превышает соответствующую амплитуду волн вдали от берега.

Из рис. 5 видно, что вероятность образования высоких волн растет с увеличением нелинейности и, следовательно, волны-убийцы возникают чаще вблизи берега, чем в открытом море. Это объясняет большое количество аварий и несчастных случаев, вызванных волнами-убийцами в прибрежной зоне [5].

Еще раз подчеркнем, что данный результат был получен в приближении необрушенных волн с плавным профилем. Учет обрушения в задаче взаимодействия волны со стенкой может быть произведен численно.

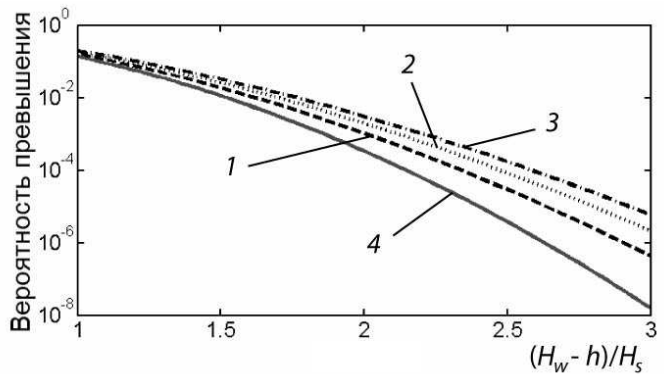


Рис. 5. Вероятность превышения уровня воды на стенке для различных значений параметра. 1 – $\varepsilon = 0.2$; 2 – 0.4; 3 – 0.6; 4 – распределение Релея.

Взаимодействие длинных волн со стенкой с учетом обрушения изучалось численно в бассейне постоянной глубины. Падающая волна имела гауссову форму:

$$H_{in}(x) = h + A \exp\left(-\frac{4(x+x_0)^2}{\lambda^2}\right), \quad u_{in} = 2(\sqrt{gH_{in}} - \sqrt{gh}), \quad (14)$$

где x_0 – положение волны вдали от берега; A и λ – высота и характерная длина волны соответственно. Расчеты выполнены с помощью программного комплекса CLAWPACK.

Пример формирования ударной волны при ее подходе к стенке и взаимодействие обрушенной волны со стенкой, расположенной в $x = 0$, показаны на рис. 6. Начальная высота волны составляла 0.9 м.

Через 612 с сформировавшаяся ударная волна вплотную подошла к стенке (в этот момент ее высота составляла 0.7 м) и ударила о нее с высоким заплеском (636 с), после чего сформировалась отраженная волна в виде прямоугольной ступеньки (780 с), которая при распространении от стенки постепенно затухает, приобретая треугольную форму (1648 с).

Поскольку в наблюдениях волн-убийц на берегу наиболее частым сценарием (64 % общего числа наблюдений) являются именно высокие всплески на отвесных клифах (обрывах, образованных действием прибоа) или береговых стенках [5], то попробуем оценить высоту всплеска, произошедшего при взаимодействии ударной волны со стенкой (636 с на рис. 6).

Как уже говорилось выше, уровень воды на стенке для гладких необрушенных волн может быть вычислен из нелинейной теории мелкой воды по формуле (11). Напомним, что в линейной теории высота волны на стенке равна удвоенной высоте падающей волны, т.е.

$$\frac{H_w}{h} = 2 \frac{H_{in}}{h} - 1. \quad (15)$$

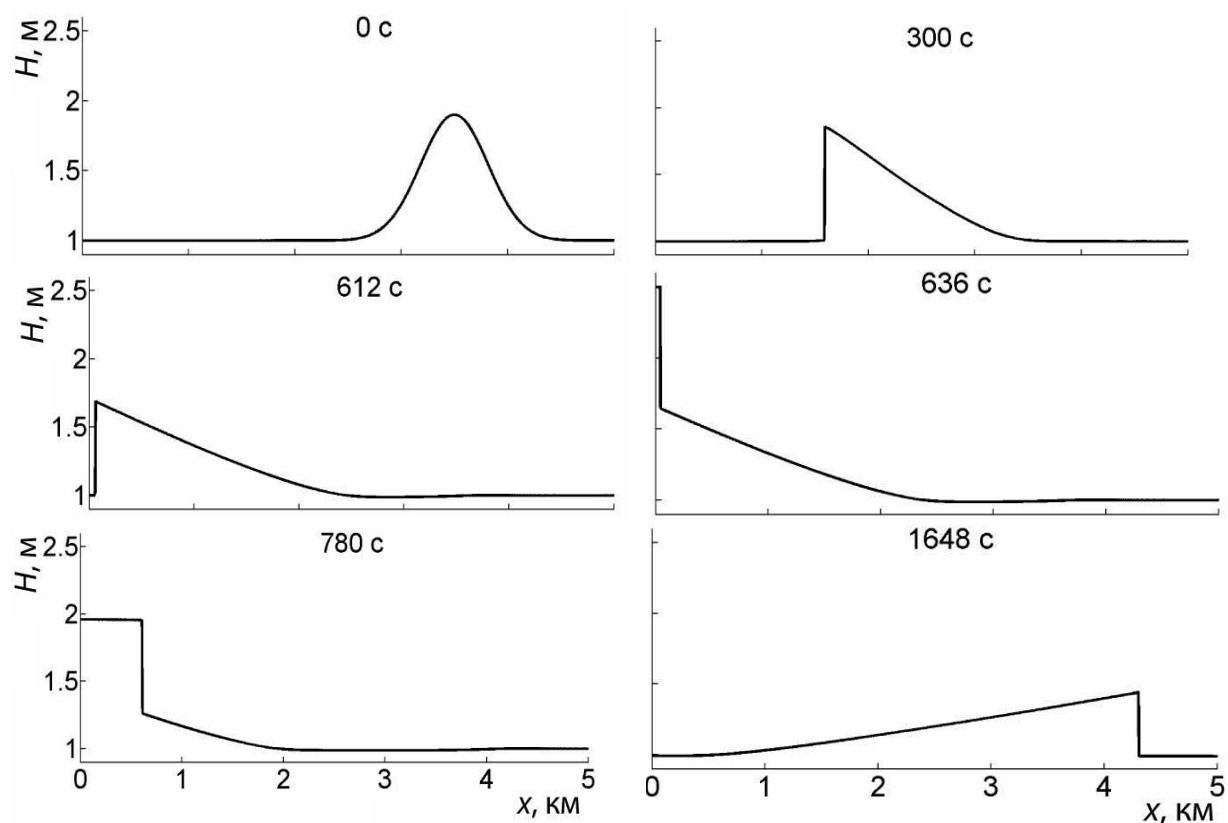


Рис. 6. Взаимодействие со стенкой волны с начальной высотой 0.9 м.

Обе эти зависимости представлены на рис. 7. Видно, что наблюдаемые данные находятся выше обеих кривых – обрушение увеличивает вероятность появления экстремальных волн на стенке.

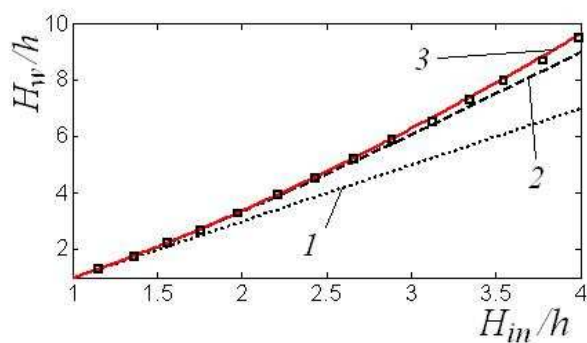


Рис. 7. Максимальный уровень воды на стенке, рассчитанный по формулам (15) (линия 1), (11) (линия 2), (17) (линия 3) и численно (точки).

Оценим высоту всплеска с позиций бесконечно протяженного бора, накатывающегося на стенку [8, 10]. В этом случае задача сводится к описанию распространения скачка уровня воды (бора) и определяется законами сохранения массы и импульса на скачке для падающей и отраженной волн:

$$\begin{cases} (c_{in} - u) \frac{H_{in}}{h} = c_{in}, \\ u(c_{in} - u) \frac{H_{in}}{h} - \frac{gh}{2} \left(\frac{H_{in}}{h} \right)^2 = -\frac{gh}{2}, \\ c_r \frac{H_w}{h} = (c_r - u) \frac{H_{in}}{h}, \\ -\frac{gh}{2} \left(\frac{H_w}{h} \right)^2 = -\frac{gh}{2} \left(\frac{H_{in}}{h} \right)^2 + u(c_r - u) \frac{H_{in}}{h}, \end{cases} \quad (16)$$

где c_{in} и c_r – соответственно скорости падающего и отраженного бора; u – скорость потока. Из системы (16) можно найти связь между высотой подходящего потока и уровнем воды на стенке:

$$\frac{H_w}{h} = \frac{1}{2} \left[\frac{H_{in}}{h} - 1 + \sqrt{1 - 2 \frac{H_{in}}{h} + \left(\frac{H_{in}}{h} \right)^2 + 4 \left(\frac{H_{in}}{h} \right)^3} \right]. \quad (17)$$

На рис. 7 отражены все три описанные теоретические зависимости, выраженные формулами (11), (15) и (17), а также приведены результаты численного расчета для различной начальной высоты волны.

Видно, что при небольшой высоте подходящего потока все три теоретические кривые достаточно близки. С увеличением высоты потока начинает сказываться нелинейность, и это ведет к отличию нелинейного решения (11) и решения для бесконечно протяженного бора (17) от линейного (15). Однако сами решения (11) и (17) демонстрируют очень хорошее совпадение, вплоть до $H_{in}/h = 2$, после чего они начинают постепенно расходиться. В проведенном численном расчете на стенку накатывалась ударная волна с ограниченной протяженностью, поэтому формула для бесконечно протяженного бора (17) дает слегка завышенную оценку.

Итак, в случае однонаправленного распространения длинных волн в бассейне постоянной глубины даже при условии обрушения вероятность появления больших волн не возрастает, хотя нелинейность и сказывается на негауссовости волнового поля. В сильно-нелинейной волне при обрушении может возникать отраженная волна, что нарушает приближение однонаправленных волн. В то же время встречное взаимодействие длинных волн приводит к увеличению вероятности появления аномальных волн (волн-убийц). Это также наблюдается при взаимодействии волны с вертикальными сооружениями (стенки, парапеты) в портах и при ее подходе к отвесным берегам и клифам. Это также хорошо согласуется с данными наблюдений волн-убийц, представленных в каталоге [5].

Работа частично поддержана грантами РФФИ (11-05-00216, 11-02-00483, 11-05-9706, 11-05-92002), грантом президента РФ (1440.2012.5), целевым финансированием Министерства образования и науки Эстонии (грант SF0140007s11), Научным фондом Эстонии (грант 8870) и программой DoRa 4.

Литература

1. Куркин А.А., Пелиновский Е.Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. Н. Новгород: ННГУ, 2004. 157 с.
2. Kharif Ch., Pelinovsky E., Slunyaev A. Rogue Waves in the Ocean. Springer, 2009. 216 p.
3. Dysthe K., Krogstad H.E., Muller P. Oceanic rogue waves // Ann. Rev. Fluid Mech. 2008. V.40. P.287–310.

4. Garrett C., Gemmrich J. Rogue Waves // *Physics Today*. 2009. V.62, N 6. P.57.
5. Nikolkina I., Didenkulova I. Rogue waves in 2006-2010 // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 2011. V.11. doi:10.5194/nhess-11-1-2011.
6. Pelinovsky E., Sergeeva (Kokorina) A. Numerical modeling of the KdV random wave field // *Eur. J. Mech.* 2006. V.25. P.425–434.
7. Sergeeva A., Pelinovsky E., Talipova T. Nonlinear random wave field in shallow water: variable Korteweg–de Vries framework // *Natural Hazards and Earth System Science*. 2011. V.11, N 1. P.323–330.
8. Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 272 с.
9. Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами. Н.Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
10. Стокер Дж.Дж. Волны на воде. М.: ИЛ, 1959. 618 с.
11. Pelinovsky E., Kharif C., Talipova T. Large-amplitude long wave interaction with a vertical wall // *Eur. J. Mech.* 2008. V.27. P.409–418.
12. Didenkulova I., Pelinovsky E. Rogue waves in nonlinear hyperbolic systems (shallow-water framework) // *Nonlinearity*, 2011. V.24. R1–R18.
13. Didenkulova I., Pelinovsky E., Sergeeva A. Statistical characteristics of long waves nearshore // *Coastal Engineering*. 2011. V.58. P. 94–102.
14. Диденкулова И.И., Заубо Н., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н. Крутизна и спектр нелинейно деформируемой волны на мелководье // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 2006. Т.42, № 6. С.839–842.
15. Zahibo N., Didenkulova I., Kurkin A., Pelinovsky E. Steepness and spectrum of nonlinear deformed shallow water wave // *Ocean Engineering*. 2008. V.35, N 1. P.47–52.
16. Engelbrecht Yu., Fridman V., Pelinovsky E. Nonlinear evolution equations // Longman. 1988. 122 p.
17. Гурбатов С.Н., Малахов А.И., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 214 с.
18. Руденко О., Солуян С. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 384 с.
19. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Ч.1: Случайные процессы. М.: Наука, 1976. 491 с.
20. LeVeque R.J. Finite-volume methods for hyperbolic problems. Cambridge Univ. Press, 2004. 559 p.
21. Murawski K. Analytical and numerical methods for wave propagation in fluids. World Scientific, 2002. 256 p.
22. Пелиновский Е.Н., Родин А.А. Нелинейная деформация волны большой амплитуды на мелководье // *Докл. РАН*. 2011. Т.438, № 3. С.337–340.

Статья поступила в редакцию 21.07.2011 г.

