

УДК 532.5.013

© В.Е. Захаров, А.И. Дьяченко, 2012

Новосибирский государственный университет

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Черноголовка

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Москва

University of Arizona, Department of Mathematics, USA

zakharov@math.arizona.edu

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ И ВОЛНЫ-УБИЙЦЫ

Рассмотрена задача об образовании волн-убийц на поверхности глубокой воды. Предложены две аналитические модели для двухмерной идеальной жидкости. Первая основана на точных уравнениях Эйлера, в которых сделано конформное преобразование области занимаемой жидкости на полуплоскость. Во второй, приближенной, предложено каноническое преобразование переменных в гамильтониане, в результате чего получено простое нелинейное уравнение для нормальной канонической переменной. Численно изучено образование волны-убийцы в рамках обеих моделей.

Ключевые слова: волны-убийцы, гидродинамика жидкости со свободной поверхностью, конформное преобразование, уравнение Захарова, численное моделирование.

Двухмерное потенциальное течение идеальной глубокой жидкости в области со свободной поверхностью представляет собой один из классических объектов исследований гидродинамики. Удобный подход описания потенциальных течений жидкости со свободной поверхностью для произвольной размерности пространства основан на использовании канонического формализма, известного с 1968 г. [1]. Пусть несжимаемая жидкость занимает в плоскости (x, y) область, ограниченную свободной поверхностью:

$$y = \eta(x, t), \quad -\infty < x < \infty. \quad (1)$$

Будем считать течение жидкости потенциальным $V = \nabla\phi$, где ϕ подчиняется уравнению Лапласа

$$\Delta\phi = 0. \quad (2)$$

Это уравнение должно быть рассмотрено вместе со следующими граничными условиями:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla\phi|^2 + g\eta = P, \quad \frac{\partial\eta}{\partial t} + \eta_x \phi_x = \phi_y \quad (3)$$

при $y = \eta(x, t)$ и

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, y \rightarrow -\infty, \quad \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, |x| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Здесь g – гравитационное ускорение, а P – постоянное давление на поверхности (не нарушая общности, полагаем $P = 0$). Система уравнений (3) и (4) является гамильтоновой. Введем величину ψ – значение потенциала на свободной поверхности:

$$\psi(x, t) = \phi(x, y, t)|_{y=\eta} = \phi(x, \eta(x, t), t). \quad (5)$$

Как было установлено в [1], $\eta(x, t)$ и $\psi(x, t)$ являются канонически сопряженными величинами:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta}, \quad (6)$$

а гамильтониан H совпадает с полной энергией жидкости:

$$H = T + UT = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\eta} (\nabla \phi)^2 dy U = \frac{g}{2} \int \eta^2 dx. \quad (7)$$

Уравнения (3) в этом случае следуют из вариационного принципа Гамильтона:

$$\delta S = 0, \quad S = \int L dt, \quad L = \int \psi \frac{\partial \eta}{\partial t} dx - H. \quad (8)$$

Здесь мы будем говорить в основном о двухмерной жидкости и рассмотрим два подхода к описанию таких течений (иными словами, к решению уравнений (3), (4)).

1. Точные уравнения, в которых сделано конформное преобразование области, занимаемой жидкостью на нижнюю полуплоскость.

2. Приближенные, кубически нелинейные уравнения, в которых сделано каноническое преобразование, максимально упрощающее их вид.

Развитие методов численного моделирования волн на поверхности жидкости дало возможность проводить вычислительные эксперименты, в ходе которых можно наблюдать существенно нелинейную динамику волн. Мы будем говорить о приложении этих методов к задаче образования волн-убийц на поверхности жидкости. Предполагаем, что термин «волна-убийца» знаком читателю. Подробное описание этого явления можно найти в работах [2–4].

Конформные уравнения в гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости. Применение конформных преобразований в задачах потенциального течения идеальной жидкости имеет большую историю. Однако традиционным является использование конформных преобразований в стационарных задачах. Идея использования конформных переменных для нестационарных задач была высказана в работе Л.В.Овсянникова [5]. Им были получены нестационарные уравнения, описывающие поверхностные волны идеальной жидкости со свободной поверхностью. Это уравнение для конформного преобразования и уравнение для потенциала на границе полуплоскости. Уравнения получаются интегро-дифференциальные. Далее, в работах [6–10], были получены новые формы уравнений в конформных переменных, описывающих нелинейную динамику поверхностных волн. Эти уравнения и были использованы для проведения вычислительных экспериментов по изучению волн-убийц. Математическая корректность уравнений в конформных переменных была установлена в работе [11].

Изложим краткий вывод таких уравнений. Для того чтобы упростить уравнения (3) и (4), необходимо сделать конформное преобразование [12] области на z -плоскости, занимаемой жидкостью, на нижнюю полуплоскость комплексной переменной $w = u + iv$:

$$-\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < 0.$$

После такого преобразования граница жидкости будет задаваться параметрически действительной и мнимой частями конформного преобразования, взятого на вещественной оси:

$$y = y(u, t), \quad x = x(u, t) = u + \tilde{x}(u, t); \quad (9)$$

здесь вещественная и мнимая части – $\tilde{x}(u, t)$ и $y(u, t)$ – связаны между собой преобразованием Гильберта:

$$y = \hat{H}\tilde{x}, \quad \tilde{x} = -\hat{H}y, \quad \hat{H}^2 = -1 \text{ и } \hat{H}(f(u)) = P.V. \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u') du'}{u' - u}.$$

После конформного преобразования $\phi(x, y, t) \rightarrow \phi(u, v, t)$. Пусть $\Psi(u, t) = \phi(u, 0, t)$ – значение потенциала на свободной поверхности. Тогда кинетическая энергия (7) принимает следующий вид:

$$T = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi \hat{H} \Psi_u du, \quad (10)$$

а для вычисления симплектической формы в Лагранжиане (8) имеем

$$dx = x_u du, \quad \eta_t dx = (y_t x_u - x_t y_u) du \quad (11)$$

и Лагранжиан выражается как

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi (y_t x_u - x_t y_u) du + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi \hat{H} \Psi_u du - \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 x_u du + \int_{-\infty}^{\infty} f(y - \hat{H}\tilde{x}) du. \quad (12)$$

Здесь f – множитель Лагранжа. Варьируя действие S по Ψ и y [12], получим, что $y(u, t)$ и $\Psi(u, t)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$y_t = (y_u \hat{H} - x_u) \frac{\hat{H} \Psi_u}{J}, \quad (13)$$

$$\Psi_t = -\frac{\Psi_u^2 + \hat{H} \Psi_u^2}{2J} + \hat{H} \left(\frac{\hat{H} \Psi_u}{J} \right) \Psi_u + \frac{\hat{H} \Psi_u}{J} \hat{H} \Psi_u - gy, \quad (14)$$

где g – это ускорение силы тяжести, а

$$J = x_u^2 + y_u^2 = 1 + 2\tilde{x}_u + \tilde{x}_u^2 + y_u^2. \quad (15)$$

Другая форма уравнений (13) и (14), полученная в работе [12], выглядит так:

$$y_t x_u - x_t y_u = -\hat{H} \Psi_u, \quad \Psi_t x_u - x_t \Psi_u + g y x_u = \hat{H} (\Psi_t y_u - y_t \Psi_u + g y y_u). \quad (16)$$

Интегралы движения приобретают следующий вид:

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} \Psi \hat{H} \Psi_u du + \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 x_u du, \quad M = \int_{-\infty}^{\infty} y x_u du, \quad P_y = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi x_u du, \quad P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi y_u du. \quad (17)$$

Если уж мы применили конформное преобразование и используем комплексный потенциал скорости, то следует вместо вещественных уравнений (13) и (14) написать комплексные уравнения для $z(w, t)$ и комплексного потенциала скорости $\Phi(w, t)$. Эти уравнения можно получить, применяя оператор проектирования

$$\hat{P}(f) = \frac{1}{2}(1 + i\hat{H})(f)$$

к уравнениям (13) и (14):

$$z_t = iUz_u, \Phi_t = iU\Phi_u - \widehat{P}\left(\frac{|\Phi_u|^2}{|z_u|^2}\right) + ig(z-u). \quad (18)$$

Здесь U – комплексная скорость переноса:

$$U = 2\widehat{P}\left(\frac{-\widehat{H}\Psi_u}{|z_u|^2}\right).$$

Оказалось, что уравнения (18) могут быть упрощены просто заменой переменных. Действительно, вместо переменных $z(w,t)$ и $\Phi(w,t)$ введем новые функции – $R(w,t)$ и $V(w,t)$ – следующим образом:

$$R = \frac{1}{z_w}, \quad \Phi_w = -iVz_w \quad (19)$$

($V = i\frac{\partial\Phi}{\partial z}$, т.е. комплексная скорость). Заметим, что, поскольку $z(w,t)$ является конформным преобразованием, его производная существует в нижней полуплоскости и не имеет там нулей. Таким образом, функция $R(w,t)$ также является аналитической в нижней полуплоскости и имеет следующие граничные условия:

$$R(w,t) \rightarrow 1, |w| \rightarrow \infty, Im(w) \leq 0.$$

Очевидно, что для V граничные условия выглядят так:

$$V(w,t) \rightarrow 0, |w| \rightarrow \infty, Im(w) \leq 0.$$

Тогда для этих функций уравнения приобретают весьма изящную форму:

$$R_t = i(UR' - U'R), \quad V_t = i(UV' - R\widehat{P}'(V\bar{V})) + g(R-1). \quad (20)$$

Здесь $U = \widehat{P}(V\bar{R} + \bar{V}R)$.

Полученные уравнения кубически нелинейны и включают в себя линейный интегральный оператор. Они являются уравнениями гидродинамического типа, но действуют в комплексной плоскости. Важную роль в этих уравнениях играет комплексная скорость переноса U . Она переносит нули функции $R(w,t)$, которые являются особыми точками конформного отображения $z(w,t)$. Разные типы нулей предполагается изучить в следующей статье. Здесь же следует отметить, что в численном моделировании наблюдаются лишь корневые (\sqrt{w}) точки ветвления.

В уравнениях (20) легко учесть и поверхностное натяжение, надо заменить лишь второе уравнение на

$$V_t = i(UV' - R\widehat{P}'(V\bar{V}) + g(R-1)) - 2\sigma R\widehat{P}'(Q'\bar{Q} - \bar{Q}'Q),$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, а $Q = \sqrt{R}$.

Следует отметить, что уравнения (20) сохраняют свою форму и для других граничных условий. Например, вместо граничных условий (4) можно рассмотреть периодические условия, а также жидкость конечной глубины.

Отметим также, что новые уравнения включают в себя только производные конформного отображения и комплексного потенциала скорости.

Модуляционная неустойчивость и волна-убийца. В этом параграфе мы изучаем модуляционную неустойчивость волны Стокса. В качестве начального условия мы

используем стационарную нелинейную волну Стокса с длинноволновой модуляцией. Эта волна неустойчива относительно роста модуляции длинного масштаба. Этот замечательный факт был сначала установлен в [13], который вычислил инкремент неустойчивости в пределе длинноволновой модуляции. Поскольку инкремент Лайтхилла был пропорционален волновому числу модуляции, результат был в принципе неполон: в коротких масштабах неустойчивость должна отсутствовать. Точный инкремент был найден независимо в [1, 14, 15].

Для численного моделирования мы, начиная с 2001 г. (работа [7]), перешли к численному решению уравнений (20). И для этого имеются веские причины. Было установлено, сначала эмпирически, а затем с объяснением (в [16]), что численное решение уравнений (20) для переменных R и V является наиболее устойчивым. Численный код для решения этих уравнений был разработан в работе [8].

Мы используем спектральный метод для численного решения уравнений (20). Следует отметить, что конформное преобразование – обычный подход, неоднократно применявшийся для изучения волны Стокса. Уравнения для ее коэффициентов Фурье-разложения были решены численно многими авторами (см., напр., [17]). Идея осуществления конформного преобразования при численном моделировании динамики волны появилась в начале 1980-х годов [18]. Но поскольку уравнения (20) в то время не были известны, авторы использовали квазилагранжевый подход в гидродинамике. После некоторых экспериментов и обсуждения их результатов идея использования конформного преобразования перестала казаться привлекательной по следующей причине: конформное преобразование не очень хорошо для описания особенностей с углом на поверхности, естественно появляющегося на свободной поверхности жидкости. Эта причина серьезна, если пространственная разностная сетка редка. Однако современные компьютеры делают возможным использовать очень точные разностные сетки, состоящие из больше чем миллиона узлов или спектральных мод. Таким образом, этот аргумент перестал быть актуальным.

Следует отметить, что эти уравнения не являются обычными уравнениями в частных производных. Их можно назвать «Гильберт-дифференциальными» уравнениями, которые наряду с обычным дифференцированием по u

$$f \rightarrow \partial f / \partial u \quad (21)$$

включают в себя интегральное преобразование Гильберта:

$$f \rightarrow \hat{H} f . \quad (22)$$

С аналитической точки зрения две эти операции совершенно различны. Но с точки зрения численного решения – очень похожи. Действительно, для Фурье-гармоник операция (21) означает

$$f_k \rightarrow ikf_k ,$$

а преобразование (22) соответствует

$$f_k \rightarrow i \operatorname{sign}(k) f_k .$$

С вычислительной точки зрения две эти операции – одинакового уровня трудности.

В численных экспериментах исследовалась локализация энергии в первоначальном, почти однородном цуге волн Стокса. Моделирование проводилось в периодической области 2π , так что волновые числа – это целые числа. Гравитационная постоянная $g = 1$. Волна Стокса характеризуется крутизной (steepness) $\mu = ak_0$ (k_0 – волновое число, a – амплитуда волны). Если $\mu \ll 1$, волна Стокса является почти

монохроматической. В этой серии экспериментов $\mu = 0.1$. Столь малая крутизна позволяет взять в качестве начальных данных суперпозицию монохроматической волны (с $k_0 = 100$) и возмущения (Гауссов шум в Фурье-спектре). Количество Фурье-гармоник, задействованных в вычислениях, было сравнительно небольшим – 12 288 (это 4096×3).

Инкремент модуляционной неустойчивости:

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2} \left(\left(\frac{\delta k}{k_0} \right)^2 (ak_0)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{\delta k}{k_0} \right)^4 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (23)$$

Здесь $\omega_0 = \sqrt{gk_0}$ – частота волны, а δk определяет неустойчивые гармоники, такие что $k_1 = k_0 + \delta k$, $k_2 = k_0 - \delta k$.

Максимальное значение инкремента

$$\gamma_{\max} = \omega_0 \cdot \frac{1}{2} (ak_0)^2 \quad (24)$$

достигается для возмущения с волновым числом p :

$$p = \sqrt{2} (ak_0) \cdot k_0. \quad (25)$$

Профиль волны Стокса определяется стационарным уравнением $y = \frac{c^2}{2g} (1 - |R|^2)$, а скорость V связана с формой поверхности как $V = ic(R - 1)$.

Возмущение вносилось в амплитуду первой гармоники, т.е.

$$R_{100} \rightarrow (1 + 0.05)R_{100}.$$

Начальный профиль поверхности показан на рис. 1 (при $t = 0$), Фурье-спектр начального условия – на рис. 2.

После достаточно большого времени (более 1300 волновых периодов) наблюдается формирование волны-убийцы, как показано на рис. 3. Эта волна вырастает до своего максимального уровня на несколько волновых периодов, после чего исчезает или опрокидывается. Детальная форма волны-убийцы показана на рис. 4.

Уравнения в конформных переменных позволяют моделировать такое опрокидывание. На рис. 5 показан момент опрокидывания для аналогичного численного эксперимента, но с $\mu = 0.14$.

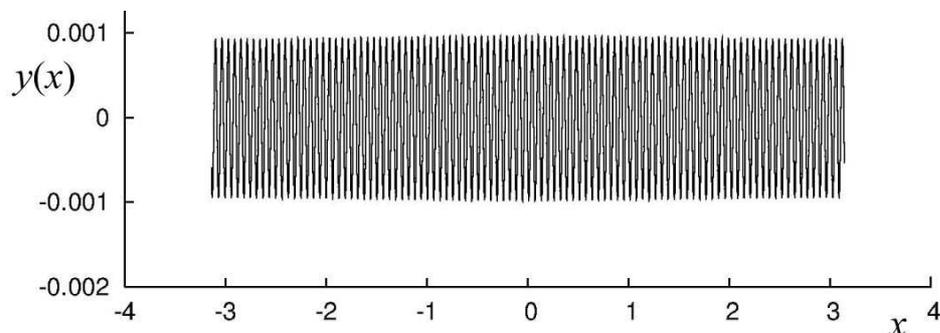


Рис. 1. Начальный профиль волны.

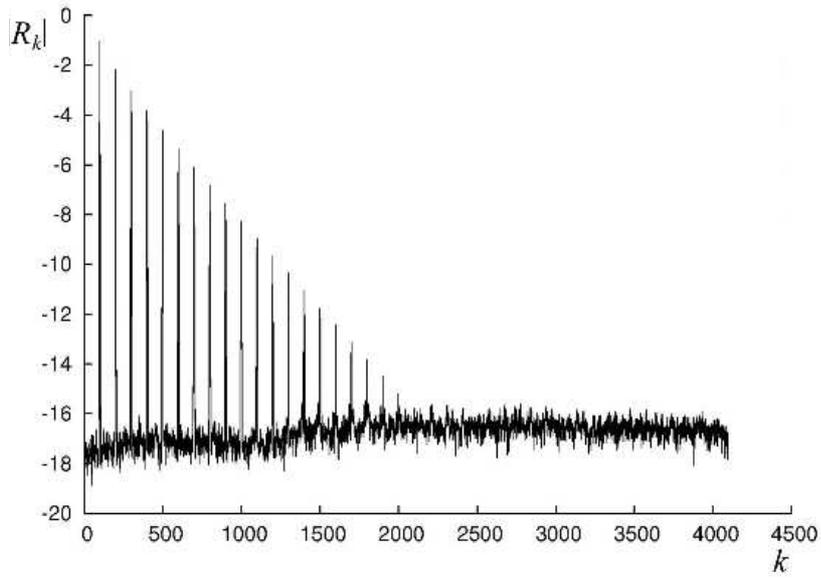


Рис. 2. Фурье-коэффициенты $|R_k|$ при $t = 0$ ($\mu \cong 0.095$).

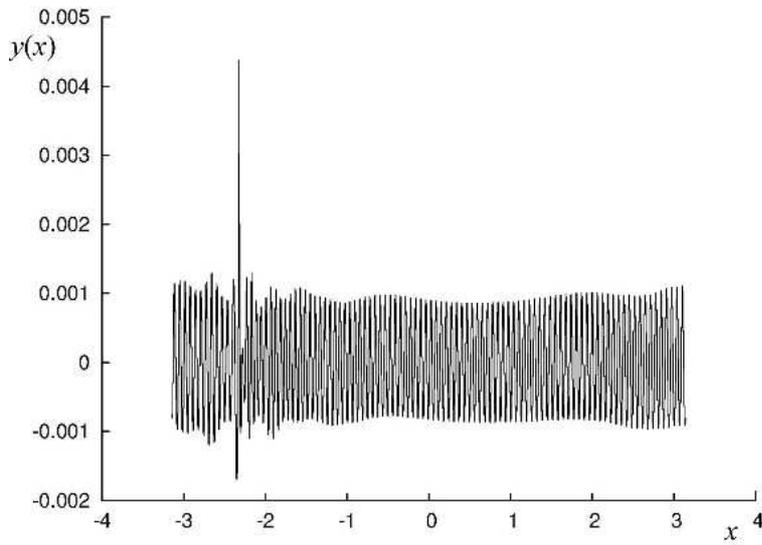


Рис. 3. Волна-убийца при $T = 802.07$.

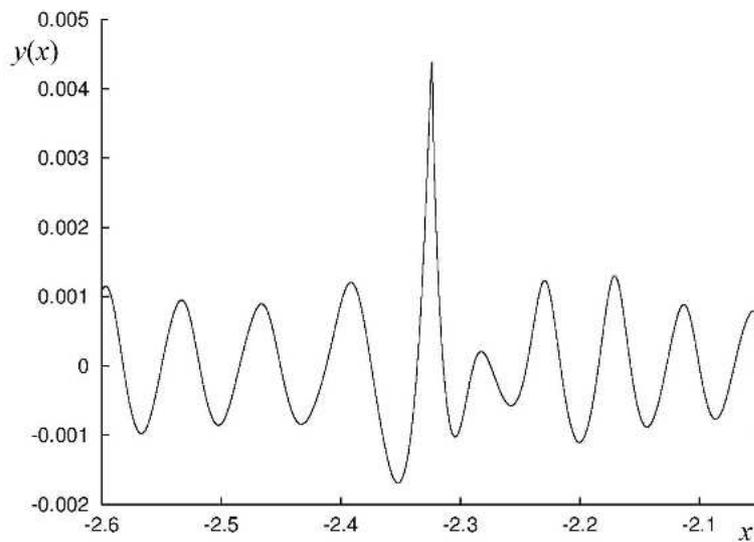
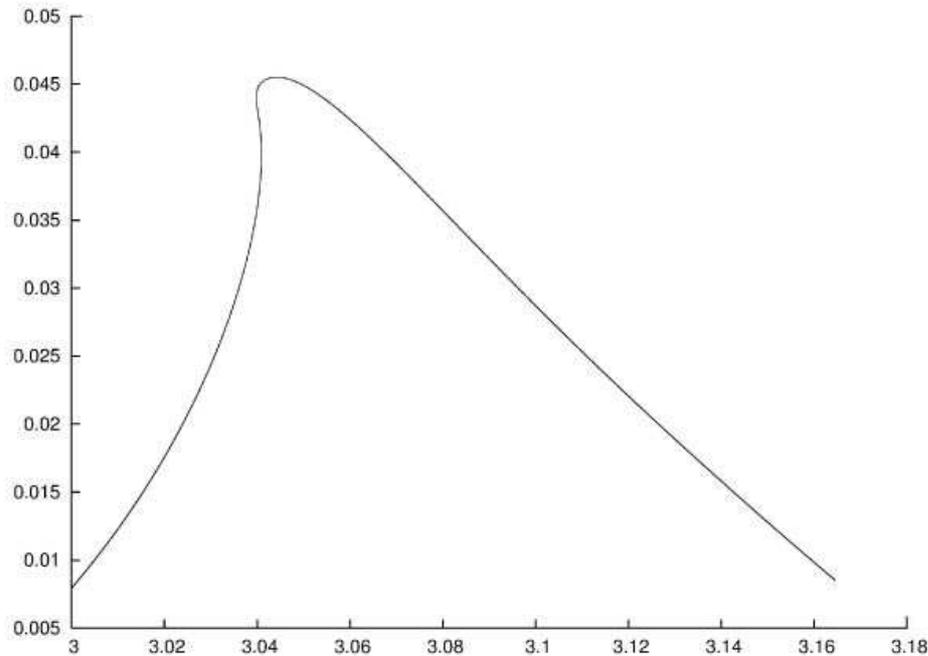


Рис. 4. Поверхность с высоким разрешением при $T = 802.07$.

Рис. 5. Профиль опрокидывающейся волны с $\mu = 0.14$.

Гигантский бризер. Численное моделирование в рамках полностью нелинейных уравнений демонстрирует существование гигантского бризера на поверхности глубокой воды. Мы проводили следующий эксперимент. В качестве начальных условий для профиля поверхности выбиралось солитонное решение нелинейного уравнения Шредингера:

$$\eta(x) = \frac{\lambda}{\sqrt{2k_0^2}} \frac{\cos(k_0 x)}{\cosh(\lambda x)}, \quad (26)$$

в котором параметры λ и k_0 выбирались далеко за пределами применимости уравнения Шредингера, а именно – моделирование проводилось в периодической области размером $L = 2\pi$ и $k_0 = 50$. Величина λ менялась в пределах от 30 до 50. Потенциал скорости на поверхности жидкости в начальный момент был равен $\psi(x) = c\eta(x)$, где c – линейная фазовая скорость. Через некоторое время, после того как начальный бризер излучает «лишнее», мы наблюдали устойчивую локальную структуру, сходную качественно с солитоном НУШ, но с крутизной порядка 0.5–0.6. Этот гигантский бризер, представленный на рис. 6, является устойчивым.

Если увеличить центральную часть бризера, как на рис. 7, то легко видеть, что его крутизна близка к предельной $1\sqrt{3} = 0.57735$.

Устойчивость бризера продемонстрирована на рис. 8, где бризер движется на фоне волнения малой амплитуды, не взаимодействуя с ним.

Отсутствие излучения из бризера демонстрирует также и пространственно-временной спектр поверхности (рис. 9), в котором отсутствуют отрицательные частоты. Видно, что бризер состоит из волн, движущихся только в одном направлении.

Такая ситуация характерна для интегрируемых систем. Но эта гипотеза нуждается в проверке.

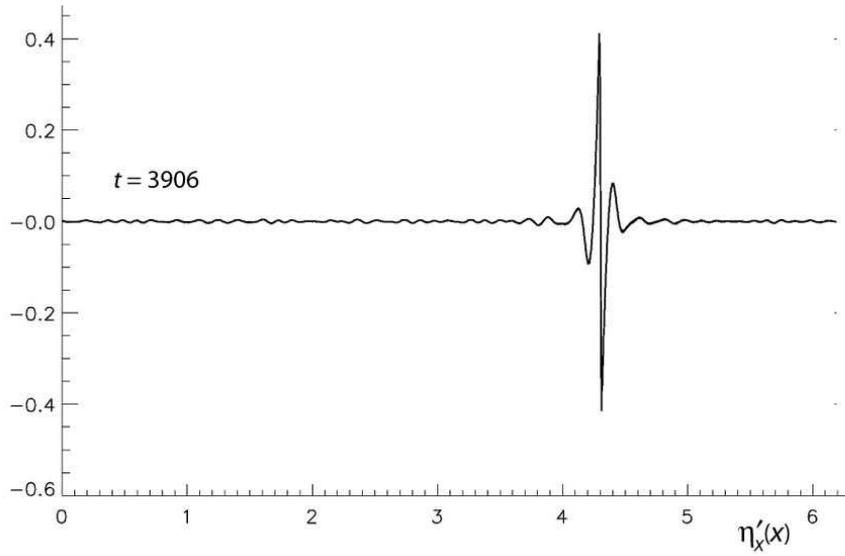


Рис. 6. Устойчивый бризер.

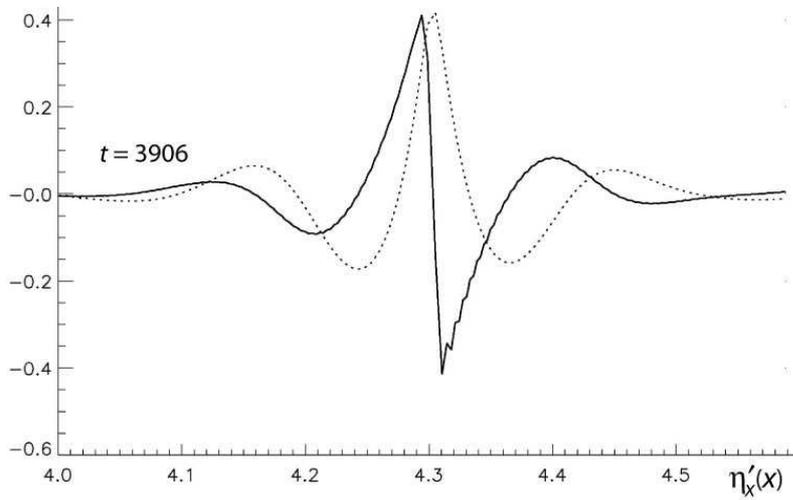


Рис. 7. Почти предельная крутизна.

Пунктирная линия соответствует профилю поверхности, умноженному на $k_0 = 50$.

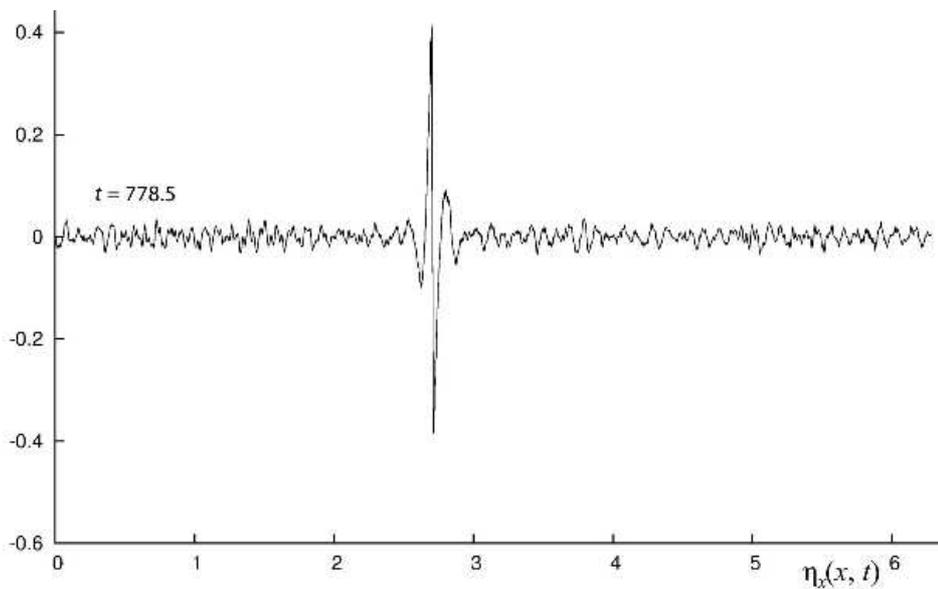


Рис. 8. Бризер и волны малой амплитуды.

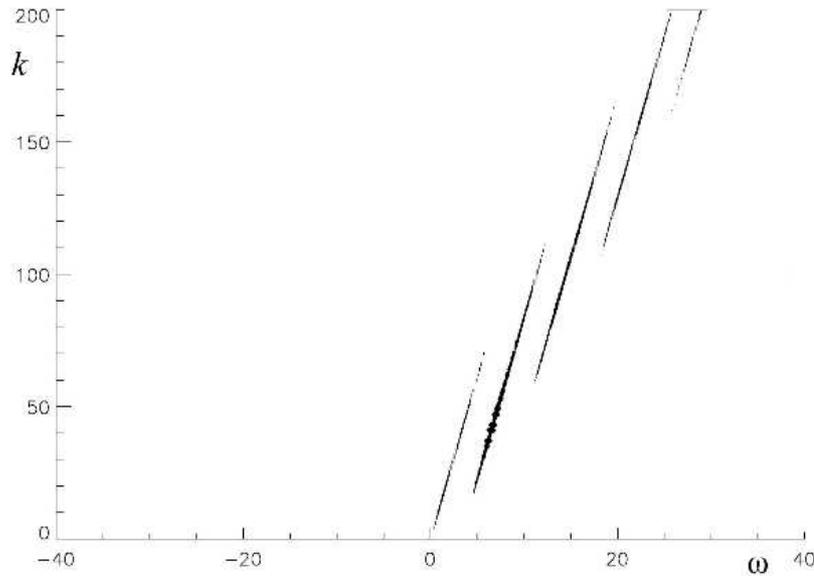


Рис. 9. Пространственно-временной спектр бризера.

Компактные уравнения для глубокой воды. В этом параграфе мы рассмотрим приближенные уравнения динамики поверхности глубокой воды. Для начала запишем приближенный гамильтониан (до четвертого порядка по нелинейности включительно) в терминах канонических переменных $\eta(x, t)$ и $\psi(x, t)$:

$$H = \frac{1}{2} \int (\psi \hat{k} \psi + g \eta^2) dx + \frac{1}{2} \int \eta \{ \psi_x^2 - (\hat{k} \psi)^2 \} dx + \frac{1}{2} \int \eta (\hat{k} \psi) \{ \hat{k} (\eta (\hat{k} \psi)) + \eta \psi_{xx} \} dx.$$

Оказывается, что этот гамильтониан может быть существенно упрощен. Это упрощение базируется на двух фактах:

1) в [19] было показано, что четырехволновый коэффициент для двумерной жидкости равен нулю на резонансной поверхности $k + k_1 = k_2 + k_3$, $\omega_k + \omega_{k_1} = \omega_{k_2} + \omega_{k_3}$;

2) в [20, 21] и на рис. 9 было показано, что бризер состоит из волн, движущихся в одном направлении без излучения.

Эти два факта позволяют применить каноническое преобразование для гамильтониана, которое существенно его упрощает. Это преобразование подробно представлено в работах [22, 23]. Здесь мы лишь коротко изложим идею и результат. Сначала вместо вещественных канонических переменных $\eta(x, t)$ и $\psi(x, t)$ введем нормальные канонические переменные a_k следующим образом:

$$\eta_k = \sqrt{\frac{\omega_k}{2g}} (a_k + a_{-k}^*) \quad \psi_k = -i \sqrt{\frac{g}{2\omega_k}} (a_k - a_{-k}^*).$$

Здесь $\omega_k = \sqrt{gk}$ – частота гравитационных волн, а Фурье-преобразования $\psi(x) \rightarrow \psi_k$ и $\eta(x) \rightarrow \eta_k$ определены как

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ikx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f_k e^{+ikx} dk.$$

Переменные a_k удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + i \frac{\delta H}{\delta a_k^*} = 0.$$

Далее переходим от a_k к новым нормальным каноническим переменным b_k так, чтобы исключить нерезонансные кубические члены в гамильтониане. Это преобразование описано в [1, 24, 25]:

$$\begin{aligned} a_k = & b_k + \int \Gamma_{k_1 k_2}^k b_{k_1} b_{k_2} \delta_{k-k_1-k_2} dk_1 dk_2 - 2 \int \Gamma_{kk_1}^{k_2} b_{k_1}^* b_{k_2} \delta_{k+k_1-k_2} dk_1 dk_2 + \\ & + \int \Gamma_{kk_1 k_2} b_{k_1}^* b_{k_2}^* \delta_{k+k_1+k_2} dk_1 dk_2 + \int B_{kk_1}^{k_2 k_3} b_{k_1}^* b_{k_2} b_{k_3} \delta_{k+k_1-k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 + \\ & + \int C_{kk_1 k_2}^{k_3} b_{k_1}^* b_{k_2}^* b_{k_3} \delta_{k+k_1+k_2-k_3} dk_1 dk_2 dk_3 + \int S_{kk_1 k_2 k_3} b_{k_1}^* b_{k_2}^* b_{k_3}^* \delta_{k+k_1+k_2+k_3} dk_1 dk_2 dk_3. \end{aligned} \quad (27)$$

Правильный выбор $B_{kk_1}^{k_2 k_3}$ позволяет существенно упростить гамильтониан, который записывается в компактном, элегантном виде в X -пространстве:

$$H = \int b^* \hat{\omega}_k b dx + \frac{1}{4} \int |b'|^2 \left[\frac{i}{2} (bb^* - b^*b') - \hat{k} |b|^2 \right] dx. \quad (28)$$

Соответствующее уравнение движения имеет следующий вид:

$$i \frac{\partial b}{\partial t} = \hat{\omega}_k b + \frac{i}{8} \left[b^* \frac{\partial}{\partial x} (b'^2) - \frac{\partial}{\partial x} (b^* \frac{\partial}{\partial x} b^2) \right] - \frac{1}{4} \left[b \cdot \hat{k} (|b'|^2) - \frac{\partial}{\partial x} (b' \hat{k} (|b|^2)) \right]. \quad (29)$$

Его простейшее решение – монохроматическая волна

$$b(x) = B_0 e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} \quad (30)$$

с частотой

$$\omega_0 = \omega_{k_0} + \frac{1}{2} k_0^3 |B_0|^2. \quad (31)$$

Инкремент модуляционной неустойчивости теперь имеет вид

$$\gamma_k^2 = \frac{1}{8} \frac{\omega_{k_0}^2}{k_0^4} (1 - 6\mu^2) k^2 \left[\mu^2 (k_0 - \frac{|k|}{2})^2 - \frac{k^2}{8} \right].$$

Отличие между инкрементом, полученным в рамках НУШ, отмечено жирным шрифтом.

Численный эксперимент. Было проведено численное моделирование образования волны-убийцы, аналогичное описанному выше, но теперь в рамках компактного уравнения (29). Типичная картина образования волны-убийцы представлена на рис. 10.

Компактное уравнение (29) описывает волну-убийцу почти так же хорошо, как и полностью нелинейные уравнения (3), существенно превосходит НУШ и уравнение Дысте. Его легко обобщить для трехмерной жидкости, получая течение «почти» двумерным, в духе уравнения Кадомцева–Петвиашвили для уравнения Кортевега де-Вриза, полагая частоту двумерной:

$$H = \int b^* \hat{\omega}_{k_x, k_y} b dx dy + \frac{1}{4} \int |b'_x|^2 \left[\frac{i}{2} (bb_x^* - b^*b'_x) - \hat{k}_x |b|^2 \right] dx dy. \quad (32)$$

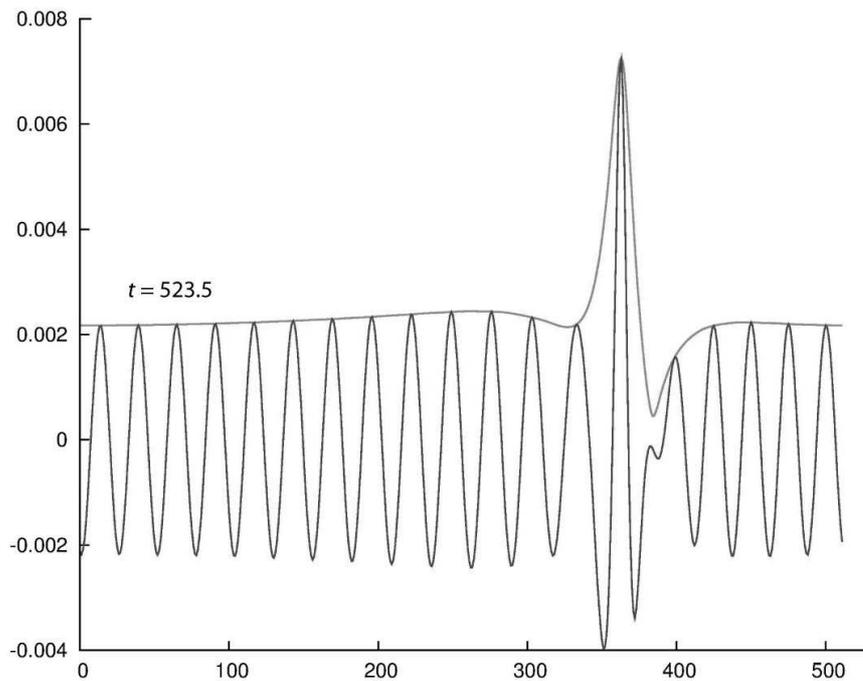


Рис. 10. Образование волны-убийцы: $|b(x)|$ и $\text{Re}(b(x))$.

Работа выполнена при поддержке грантом Миннауки РФ № 11.G34.31.0035, а также The US Army Corps of Engineers Grant W912-BU-08-P-0143, ONR Grant N00014-06-C-0130, NSF Grant DMS 0404577, Grant NOPP «TSA-a two scale approximation for wind-generated ocean surface waves», грантами РФФИ 09-01-00631 и 09-05-13605, грантами «Фундаментальные проблемы в нелинейной динамике» Президиума РАН и «Ведущие научные школы РФ».

Литература

1. Zakharov V.E. Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1968. V.2. P.190–194.
2. Куркин А.А., Пелиновский Е.Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского гос. технического университета, 2004. 158 с.
3. Liu P. A chronology off reaque wave en counters // Geofizika. 2007. V.24, N 1. P.57–70.
4. Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A. Rogue Waves in the Ocean. Springer–Verlag: Berlin–Heidelberg, 2009. 216 p.
5. Овсянников Л.В. К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды // Сб. науч. тр. СО АН СССР. Новосибирск: Ин-т гидродинамики. 1973. Вып.15. С.104–125.
6. Дьяченко А.И., Захаров В.Е., Кузнецов Е.А. Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости // Физика плазмы. 1999. Т.22, № 10. С.916–928.
7. Дьяченко А.И. О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. АН. 2001. Т.376, № 1. С.27–29.
8. Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Eur. J. Mech. B Fluids. 2002. V.21. P.283–291.
9. Chalikov D., Sheinin D. Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface // J. Comp. Phys. 2005. V.210. P.247–273.
10. Ruban V.P. Water waves over a time-dependent bottom: Exact description for 2D potential flows // Phys. Let. A. 2005. V.340, N 1–4. P.194–200.
11. Шамин Р.В. Об оценке времени существования решений уравнения, описывающего поверхностные волны // Докл. АН. 2008. Т.418, № 5. С.603–604.
12. Dyachenko A.I., Kuznetsov E.A., Spector M.D., Zakharov V.E. Analytical description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping) // Phys. Let. A. 1996. V.221. P.73–79.

13. *Lighthill M.J.* Contributions to the Theory of Waves in Non-linear Dispersive Systems // J. Appl. Math. 1965. V.1, N 3. P.269–306.
14. *Захаров В.Е.* Об устойчивости волн в нелинейных средах с дисперсией // ЖЭТФ. 1966. Т.51, № 4. С.1107–1114.
15. *Benjamin T.B., Feir J.E.* The disintegration of wave trains on deep water. Part 1. Theory // J. Fluid Mech. 1967. V.27. P.417–430.
16. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Prokofiev A.O.* Freak waves: Peculiarities of Numerical Simulations // Extreme Ocean Waves / Eds. E.Pelinovsky, C Harif. Springer, 2008. P.1–30.
17. *Zufiria J.A., Saffman P.G.* The superharmonic instability of finite-amplitude surface waves on water of finite depth // Stud. Appl. Maths. 1986. V.74, N 3. P.259–266.
18. *Meiron D., Orzag S., Israeli M.* Applications of numerical conformal mapping // J. Com. Phys. 1981. V.40, N 2. P.345–360.
19. *Dyachenko A.I., V.E.Zakharov V.E.* Is the free-surface hydrodynamics an integrablesystem? // Phys. Let. A. 1994. V.190. P.144–148.
20. *Dyachenko A.I., Zakharov V.E.* On the Formation of Freak Waves on the Surface of Deep Water // JETP Let. 2008. V.88, N 5. P.307–311.
21. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I.* About Shape of Giant Breather // European Journal of Mechanics, B/Fluids. 2010. V.29, N 2. P.127–131.
22. *Dyachenko A.I., Zakharov V.E.* Compact equation for gravity waves on deep water // JETP Let. 2011. V.93, N 12. P.701–705.
23. *Dyachenko A.I., Zakharov V.E.* On dynamical equation for water waves in one horizontal dimension // European J. of Mechanics, B/Fluids. 2011. Accepted Manuscript, Available online 7 September, 2011.
24. *Krasitskii V.P.* Canonical transformation in a theory of weakly nonlinear waves with a nondecay dispersion law // Sov. Phys. JETP. 1990. V.71. P.921–927.
25. *Zakharov V.E., Lvov V.S., Falkovich G.* Kolmogorov Spectra of Turbulence I, Springer–Verlag. 1992. 263 p.

Статья поступила в редакцию 10.09.2011 г.

