

УДК 532.5

© Р.В. Шамин, 2012

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва
Новосибирский государственный университет
roman@shamin.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛН-УБИЙЦ НА ОСНОВЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Рассматриваются эволюционные дифференциальные включения как обобщение динамических уравнений, описывающих поверхностные волны на воде. Показана корректность аппроксимации исходных уравнений с помощью дифференциальных включений. Продемонстрировано применение дифференциальных включений в качестве методов сведения исходных уравнений к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, а также полученных дисперсных динамических систем для обоснования вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: волны-убийцы, дифференциальные включения, динамические системы.

Статья посвящена математическим вопросам моделирования волн-убийц в океане. Как известно, в последнее время волны-убийцы привлекают большое внимание океанологов, физиков, математиков [1–7]. Волны-убийцы, представляя собой одиночные, внезапно возникающие волны в океане, являются очень сложным и необычным явлением. Описание некоторых случаев, встреч с волнами-убийцами в океане можно найти в работах [8–10]. Для адекватного изучения таких волн необходимо разрабатывать новые методы исследования поверхностных волн на воде. Основной подход к изучению волн-убийц, который рассматривается в данной статье, состоит в использовании полных нелинейных уравнений гидродинамики идеальной жидкости со свободной поверхностью. Специфика исследования с помощью этих уравнений состоит в том, что необходимо уметь решать полные нелинейные уравнения в частных производных на больших временных интервалах и с большой точностью. Как известно, уравнения, описывающие нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью, являются весьма сложными для проведения численных расчетов и теоретического исследования. В настоящей статье рассматриваются уравнения в конформных переменных. Впервые идея их использования для моделирования нестационарного течения была изложена в работе [11], в теоретических работах (напр., [12]). На рубеже 1995–2005 гг. эти уравнения стали широко использоваться [13–16] для проведения вычислительных экспериментов. Выяснилась высочайшая эффективность уравнений в численных расчетах, что позволило подойти к изучению волн-убийц путем численного решения уравнений гидродинамики идеальной жидкости со свободной поверхностью.

В настоящей работе рассматривается обобщение дифференциальных уравнений в конформных переменных на случай эволюционных дифференциальных включений. Такое обобщение оказывается эффективным с точки зрения численных методов, а также имеет адекватный физический смысл. Использование дифференциальных включений вместо дифференциальных уравнений приводит к тому, что вместо стандартной динамической системы мы получаем дисперсную динамическую систему. Последняя характеризуется тем, что положение системы описывается не точкой, а множеством в фазовом

пространстве. Такие динамические системы начали рассматриваться в середине прошлого века и оказались весьма эффективными в ряде теоретических и практических вопросов. В нашем случае это позволяет учесть случайные (и нужной степени малости) внешние воздействия на свободную поверхность, с одной стороны, и ошибки при численном моделировании – с другой.

В начале статьи рассматриваются уравнения в конформных переменных, описывающие поверхностные волны на воде. Численное решение этих уравнений позволяет наблюдать возникновение волн-убийц в вычислительных экспериментах. Далее вводится аппроксимация исходных уравнений дифференциальными включениями, показана корректность такого обобщения. По сути, рассматриваемая аппроксимация дифференциальными включениями является одним из видов регуляризации некорректных задач. Далее рассматривается один из конструктивных методов построения такой аппроксимации, основанной на приближении системами обыкновенных дифференциальных уравнений, которое, с одной стороны, является естественным численным методом, а с другой – позволяет строить точные решения дифференциальных включений, описывающие волны-убийцы. В конце статьи приведен характерный профиль волны-убийцы, являющийся решением дифференциального включения. Обсуждаются возможности применения предлагаемого метода для планирования вычислительных экспериментов, а также вопрос, связанный с устойчивостью решений дифференциальных включений, описывающих волны-убийцы.

Уравнения в конформных переменных, описывающие волны на воде. В настоящей работе моделирование волн-убийц основано на численном решении уравнений, описывающих нестационарное течение идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Мы будем рассматривать плоское потенциальное течение с бесконечно глубоким дном. По горизонтальной переменной рассмотрим 2π -периодические условия. Такие предположения являются естественными для моделирования волн-убийц.

Будем использовать уравнения в конформных переменных. Рассмотрим вариант этих уравнений, предложенный в работах [14–15]. Пусть идеальная жидкость занимает бесконечную область в переменных (x, y) , ограниченную криволинейной границей. Вводим комплексную плоскость $z = x + iy$. Эту область можем (по теореме Римана) конформно отобразить на нижнюю полуплоскость с переменными $w = u + iv$.

Обратное конформное отображение выражается аналитической функцией

$$z = z(t, w).$$

Эта функция является также функцией времени, поскольку мы рассматриваем нестационарную задачу. Зная функцию $z(t, u)$, мы можем восстановить профиль свободной поверхности. Для описания потенциального течения идеальной жидкости необходимо также знать потенциал скоростей. Поскольку этот потенциал является гармонической функцией, то все его значения могут быть описаны значением этого потенциала лишь на границе области и граничных условиях на бесконечности. Пусть $\psi(t, z)$ – значение потенциала скоростей на свободной поверхности. Соответственно через $\Phi(t, z)$ обозначим аналитическую в области, занимаемой жидкостью, функцию такую, что $\operatorname{Re} \Phi(t, z) = \psi(t, z)$. Будем рассматривать функцию $\Pi(t, w) = \Phi(t, z(t, w))$, которая также будет аналитичной в нижней полуплоскости. Теперь введем новые переменные:

$$R(t, w) = \frac{1}{z'(t, w)}, \quad V(t, w) = i \frac{\Pi'(t, w)}{z'(t, w)}.$$

Здесь и далее штрихом обозначена производная по переменной w . Эти функции являются аналитическими в нижней полуплоскости и удовлетворяют краевым условиям:

$$\begin{aligned} R(t, w) &\rightarrow 1, \operatorname{Im} w \rightarrow -\infty, \\ V(t, w) &\rightarrow 0, \operatorname{Im} w \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Согласно работе [15], функции R и V будем искать в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} R(w, t) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) e^{-ikw}, \\ V(w, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) e^{-ikw}. \end{aligned}$$

Функции R и V полностью описывают динамику поверхностных волн идеальной жидкости. При этом нам достаточно знать лишь значения этих функций на вещественной оси (при $v = 0$), поэтому в дальнейшем будем рассматривать аргумент u вместо w .

Покажем, как с помощью этих функций восстановить свободную поверхность и значение потенциала на свободной поверхности. Для функции $1/R$ имеет место представление

$$\frac{1}{R} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) e^{-iku}.$$

Значения коэффициентов c_k несложно получить рекуррентно из соотношения

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) e^{-iku} \right) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(t) e^{-iku} \right) = 1.$$

Умножением рядов можно получить разложение

$$-i \frac{V(t, u)}{R} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) e^{-iku}.$$

Теперь восстановим функцию $z(t, u)$ следующим образом:

$$z(t, u) = u + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} c_k(t) e^{-iku},$$

а функцию $\Pi(t, u)$ по формуле

$$\Pi(t, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-ik} d_k(t) e^{-iku}.$$

Свободную поверхность получим как геометрическое место точек по следующему правилу:

$$\Gamma(t) = \{(\operatorname{Re} z(t, u), \operatorname{Im} z(t, u)) : u \in (0, 2\pi)\}.$$

Значение потенциала на свободной поверхности находится по формуле

$$\Psi(t, u) = \operatorname{Re} \Pi(t, u).$$

Функции R и V удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{R}(t, u) &= i(U(t, u)R'(t, u) - U'(t, u)R(t, u)), \\
 \dot{V}(t, u) &= i(U(t, u)V'(t, u) - V'(t, u)R(t, u)) + g(R(t, u) - 1), \\
 0 < u < 2\pi, 0 < t < T, \\
 R(t, 0) &= R(t, 2\pi), V(t, 0) = V(t, 2\pi), 0 < t < T, \\
 R(0, u) &= R_0(u), V(0, u) = V_0(u), 0 < u < 2\pi.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь функции U и V вычисляются по формулам

$$U = P(V\bar{R} + \bar{V}R), \quad V = P(V\bar{V}), \quad P = \frac{1}{2}(I + iH).$$

Математическая корректность рассмотренных выше уравнений была установлена в цикле работ [17–22]. В этих работах были установлены существование и единственность решений уравнений (1), предложены эффективные численные методы и доказана сходимость численных методов.

Аппроксимация дифференциальными включениями. Уравнения (1) были получены в предположениях, что динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью происходит в безвоздушном пространстве. Эти предположения необходимы для вывода динамических уравнений. При этом возникают два обстоятельства. Первое – полученные уравнения (1) невозможно решить точно, второе – условие, что динамика поверхностных волн происходит в безвоздушном пространстве, является довольно сильной абстракцией, поскольку для изучения морских волн, в частности волн-убийц, необходимо учитывать внешние воздействия на свободную поверхность и случайные флуктуации свободной поверхности. Выходом из этой ситуации может стать использование дифференциальных включений.

Эволюционные дифференциальные включения описывают не единственное решение, а целое их семейство, называемое интегральной воронкой. В работе [23] были предложены динамические системы, положение которых описывается не одной точкой в фазовом пространстве, а некоторой областью в фазовом пространстве. Такие системы называются обобщенными или дисперсными динамическими системами. Адекватным описанием дисперсных динамических систем как раз и являются эволюционные дифференциальные включения [24]. Построим аппроксимацию уравнений (1) дифференциальными включениями, при этом дадим им физическую трактовку.

Для формулировки основных результатов необходимо ввести функциональные пространства, в которых будем искать решения уравнений. Для $s \geq 0$ обозначим через $Q_s = \{w = u + iv \in C : 0 < u < 2\pi, -\infty < v < s\}$ неограниченную область. Рассмотрим пространство E_s функций, аналитических в Q_s , представленных в виде $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{-ikw}$ с нор-

мой $\|f\|_{E_s}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|^2 e^{2sk}$. Множество, которое будет описывать решения, обозначим через M_T^s . Определим это множество следующим образом:

$$A(t, u) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) e^{-iku},$$

$$\max_{t \in [0, T]} |a_k(t)| \leq C e^{-s|k|},$$

$$a_k \in C^2[0, T].$$

В практических вычислениях это условие означает экспоненциальное убывание по модулю коэффициентов a_k , что является необходимым условием для эффективного проведения расчетов.

Задача в терминах дифференциального включения может быть сформулирована следующим образом. Для заданных $\varepsilon \geq 0$ и $s > 0$ найти

$$0 < T_\varepsilon < T, \quad R, V \in M_{T_\varepsilon}^s, \quad \delta_R, \delta_V \in L_\infty(0, T_\varepsilon; E_0),$$

$$\|\delta_R\|_{L_\infty(0, T_\varepsilon; E_0)} \leq \varepsilon, \quad \|\delta_V\|_{L_\infty(0, T_\varepsilon; E_0)} \leq \varepsilon,$$

удовлетворяющие уравнениям

$$R_t(u, t) = i(UR_u - U_u R) + \delta_R(u, t),$$

$$V_t(u, t) = i(UV_u - B_u R) + g(R - 1) + \delta_V(u, t).$$

Эта задача представляет собой задачу нахождения селектора для следующей системы дифференциальных включений:

$$R_t(u, t) \in B_\varepsilon(i(UR_u - U_u R)),$$

$$V_t(u, t) \in B_\varepsilon(i(UV_u - B_u R) + g(R - 1)). \quad (2)$$

Селектором для системы дифференциальных включений называется пара функций из множества M_T^s , удовлетворяющая (2).

Здесь через $B_\varepsilon(\cdot)$ обозначен замкнутый шар радиуса ε в пространстве $L_2(0, T_\varepsilon; E_0)$.

Рассмотрим вопрос о разрешимости задачи (2). При $\varepsilon = 0$ задача (2) совпадает с задачей (1). При изучении вопроса о разрешимости задач (1) и (2) мы сталкиваемся с характерной проблемой в теории волн на воде, состоящей в том, что решения, вообще говоря, существуют лишь на конечном временном интервале. Причем разрушение решения может возникнуть как вследствие нарушения гладкости свободной поверхности, так и в результате возникновения самопересечения профиля свободной поверхности. Первая возможность разрушения решения для уравнений (1) была исследована в работе [19], математические методы, позволяющие оценивать время образования самопересечения были предложены в работе [20–21].

Введем величину $LT(\varepsilon)$ (lifetime – время жизни, англ.) по следующей формуле:

$$LT(\varepsilon) = \sup\{T_\varepsilon\}.$$

Согласно сделанным выше замечаниям, через $LT(0)$ обозначается время существования решения задачи (1). Чтобы обосновать метод аппроксимации задачи (1) дифференциальными включениями, необходимо установить следующие факты: 1) существование решения у аппроксимируемой задачи, 2) разрешимость аппроксимирующей задачи и 3) сходимость решений аппроксимирующей к решению исходной задачи. Следующая теорема устанавливает корректность, т. е. разрешимость приближаемых задач и сходимость приближений к исходной задаче, аппроксимации дифференциальными включениями.

Теорема 1. В условиях задач (1) и (2) имеет место:

1. $LT(0) > 0$, что означает существование решения задачи (1) на достаточно малом временном интервале.
2. $LT(\varepsilon) > 0$ для любого $\varepsilon > 0$, что означает существование селектора для задачи (2).
3. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} LT(\varepsilon) = LT(0)$, что означает: время существования решений задачи (2) сходится к времени жизни исходной задачи.
4. Пусть $(R^\varepsilon, V^\varepsilon)$ есть решение задачи (2) на $[0, LT(\varepsilon)]$, а (R, V) соответственно – решение задачи (1) на $[0, LT(0)]$; тогда имеет место выражение

$$\|R - R^\varepsilon\|_{C^1([0, LT(\varepsilon)]; E_0)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0;$$

$$\|V - V^\varepsilon\|_{C^1([0, LT(\varepsilon)]; E_0)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Доказательство этой теоремы в различных вариантах можно найти в математических работах [17, 21].

Функции δ_R и δ_V являются невязками в уравнении (1). Можно дать физическую интерпретацию этим функциям. Действительно, функция δ_V соответствует плотности внешней силы, действующей на свободную поверхность. С помощью функции δ_R можно рассматривать флуктуации свободной поверхности.

Использование задачи (2) вместо исходной задачи (1) имеет ряд преимуществ как с точки зрения физической постановки, так и математического моделирования. Дело в том, что, хотя исходная система уравнений (1) представляет собой нелинейную систему интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, для нахождения решений задачи (2) можно использовать обыкновенные дифференциальные уравнения.

Аппроксимация обыкновенными дифференциальными уравнениями. Согласно результатам, полученным в предыдущем разделе для нахождения селектора в задаче (2), необходимо найти приближенное (в смысле невязки) решение задачи (1). Это решение можно получить с помощью метода прямых, заключающегося в аппроксимации уравнений по пространственным переменным, что приводит к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, эволюционные дифференциальные уравнения в абстрактных пространствах приближаются системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод и его применение детально представлены в работах [20]. Опишем применение этого метода для задачи (1).

Учитывая, что система (1) является системой интегро-дифференциальных уравнений, будем использовать представление неизвестных функций с помощью рядов Фурье. Пусть $N \geq 1$ – фиксированное число размерности приближенной задачи. Приближенные решения будем искать в виде

$$R^N(t, u) = 1 + \sum_{k=1}^N r_k^N(t) e^{-iku}, \quad V^N(t, u) = \sum_{k=1}^N v_k^N(t) e^{-iku}.$$

Использование представления в виде конечных сумм Фурье имеет существенные преимущества при вычислении оператора P . Действительно, пусть

$$h = \sum_{k=-N}^N h_k e^{-iku};$$

тогда имеем $P[h] = \frac{h_0}{2} + \sum_{k=1}^N h_k e^{-iku}$.

Поскольку операция умножения функций не является замкнутой в классе функций, представимых в виде конечных сумм Фурье, введем бинарную операцию $*$, которая является замкнутой для множества таких функций. Пусть

$$A = \sum_{k=-N}^N a_k e^{-iku}, \quad B = \sum_{k=-N}^N b_k e^{-iku}.$$

Тогда для $C = AB$ имеем

$$C = \sum_{k=-2N}^{2N} c_k e^{-iku}.$$

Операцию $*$ введем следующим образом:

$$A * B = \sum_{k=-N}^N c_k e^{-iku},$$

где c_k – коэффициенты Фурье функции C .

Приближенные решения R^N и V^N будем искать как решения следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} R_t^N &= i(U^N * R_u^N - U_u^N * R^N), \\ V_t^N &= i(U^N * V_u^N - B_u^N * R^N) + g(R^N - 1), \end{aligned} \quad (3)$$

где $U^N = P(V^N * \bar{R}^N + \bar{V}^N * R^N)$, $B = P(V^N * \bar{V}^N)$.

Полученная система является системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов Фурье функций R и V . Эта система уже может быть решена численно с помощью стандартного метода Рунге–Кутты 4-го порядка.

Рассмотрим еще один метод, позволяющий строить точные решения задачи (2). Допустим, что с помощью некоторого численного метода, например метода Рунге–Кутты, и последующей линейной интерполяцией по времени мы получили приближенное решение уравнения (3), которое может быть представлено в виде

$$R(u, t) = \sum_{k=0}^N r_k(t) e^{-iku}, \quad V(u, t) = \sum_{k=0}^N v_k(t) e^{-iku}.$$

Тогда, согласно общим теоремам в теории обыкновенных дифференциальных уравнений для любого $\varepsilon > 0$, можно выбрать такое большое число N и достаточно малый шаг по времени, что эти функции будут удовлетворять системе (2) при таких функциях δ_R и δ_V , что будет выполнено условие

$$\|\delta_R\|_{L_\infty(0, T_\varepsilon; E_0)} \leq \varepsilon, \quad \|\delta_V\|_{L_\infty(0, T_\varepsilon; E_0)} \leq \varepsilon.$$

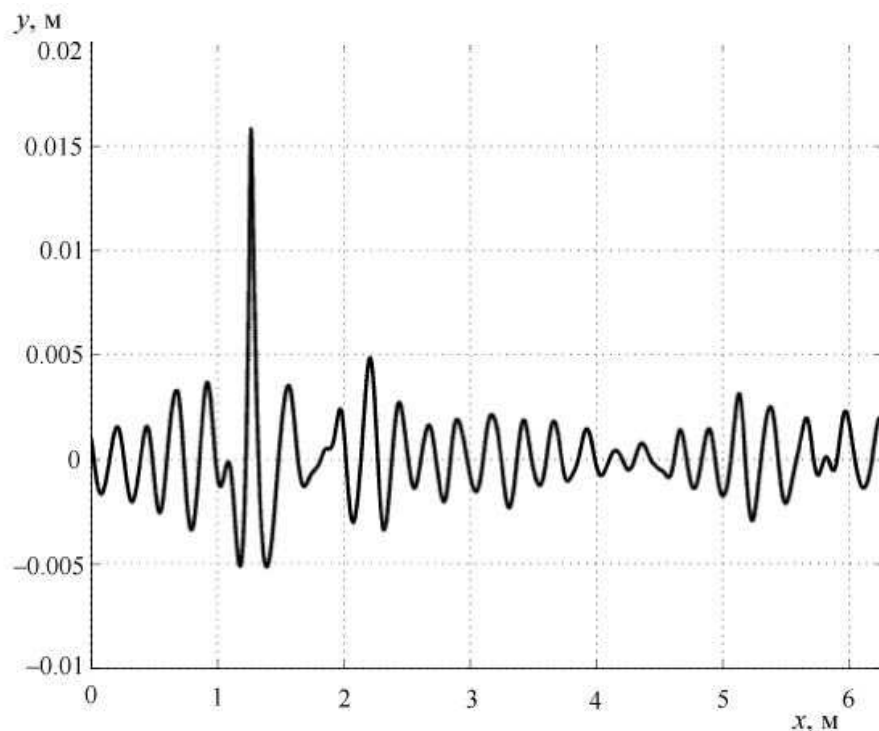
При этом можно заметить, что поскольку правые части уравнений (1) не содержат операции деления, то функции δ_R и δ_V могут быть представлены в конечном виде:

$$\delta_R(u, t) = \sum_{k=0}^{3N} \delta_{rk}(t) e^{-iku}, \quad \delta_V(u, t) = \sum_{k=0}^{3N} \delta_{vk}(t) e^{-iku}.$$

Таким образом, мы можем построить решение задачи (2) в конечном виде. Можно показать, что для этого нам необходимо произвести лишь конечное число арифметических операций. В этом смысле можно получить результат, говорящий о том, что задача (2) имеет конструктивное решение в смысле конструктивной математики. Для практики это означает, что найденное численное решение задачи (3), описывающее волну-убийцу, на самом деле является точным решением задачи (2), где полученные функции δ_R и δ_V имеют физическую интерпретацию. То есть можно утверждать следующее: если допустить сколь угодно малое внешнее воздействие на свободную поверхность и малые флуктуации этой поверхности, то волна-убийца возникает и мы получаем ее описание в конечном виде. Это подтверждается практикой вычислительных экспериментов.

О численном моделировании волн-убийц. Основной целью изучения динамических систем, описывающих поверхностные волны в океане, является проведение вычислительных экспериментов для получения различных характеристик волн-убийц. В работе [5] описаны вычислительные эксперименты, на основе которых были получены оценки вероятности возникновения волн-убийц в зависимости от параметров начального волнения. В этой работе численно решались уравнения (1). При этом применялась процедура сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описанная в предыдущем разделе. Таким образом, можно считать, что по сути в этой работе находились селекторы для дифференциального включения (2). Учитывая, что точность получаемых численных решений была весьма высокой, можно утверждать: эти селекторы удовлетворяли дифференциальным включениям при достаточно малом ε .

Приведем характерный профиль волны-убийцы, который получается при решении дифференциальных включений (см. рисунок).



Характерный профиль волны-убийцы,
полученный в ходе вычислительного эксперимента.

Автором совместно с Анной Смирновой (Российский университет дружбы народов) также проводились численные опыты по исследованию влияния функций δ_R и δ_V на

факт возникновения волн-убийц. В результате многочисленных вычислительных экспериментов было установлено, что при разумных величинах $\varepsilon > 0$ факт возникновения волны-убийцы, а также время ее возникновения и другие качественные характеристики являются инвариантными к наличию возмущающих функций. Это показывает, что использование динамических систем на основе эволюционных дифференциальных включений оказывается адекватным для численного исследования волн-убийц.

На современном этапе исследование волн-убийц во многом связано с численным моделированием уравнений, описывающих течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Спецификой является то обстоятельство, что необходимо проводить вычислительные эксперименты на больших временных интервалах и с большой точностью. В настоящей статье рассмотрены математические методы, позволяющие дать обоснование вычислительным экспериментам. Эти методы основаны на аппроксимации исходных уравнений эволюционными дифференциальными включениями.

Использование дифференциальных включений позволяет математически строго учитывать ошибки аппроксимации нелинейных уравнений в частных производных системами обыкновенных дифференциальных уравнений, а также ошибки численного решения этих уравнений. С другой стороны, использование дисперсных динамических систем является математическим выражением того факта, что на свободную поверхность действует случайное внешнее возмущение.

Автор благодарит академика В.Е. Захарова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НШ-7550.2006.2 и Программой фундаментальных исследований Президиума РАН «Математические методы в нелинейной динамике», а также при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (договор № 11.G34.31.0035 от 25 ноября 2010 г. между Минобрнауки России, НГУ и ведущим ученым).

Литература

1. Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A. Rogue Waves in the Ocean. Springer, 2009. 216 p.
2. Куркин А.А., Пелиновский Е.Н. Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. Н.Новгород, 2004.
3. Chalikov D. Freak waves: Their occurrence and probability // Phys. fluids. 2009. V.21. Issue 7. P.076602-1-076602-18.
4. Dyachenko A.I., Zakharov V.E. On the Formation of Freak Waves on the Surface of Deep Water // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т.88, N 5. С.356–359.
5. Захаров В.Е., Шамин Р.В. О вероятности возникновения волн-убийц // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т.91, вып.2. С.68–71.
6. Бухановский А.В., Лопатухин Л.И., Рожков В.А. Физика и статистика необычных морских ветровых волн // Изв. РГО. 2005. Т.137, вып.6. С.19–28.
7. Lopatoukhin L.J., Boukhanovhky A.V. Freak wave generation and their probability // Int. Shipbuild. progr. 2004. V.51, N 2/3. P.157–171.
8. Дивинский Б.В., Левин Б.В., Лопатухин Л.И., Пелиновский Е.Н., Слюняев А.В. Аномально высокая волна в Черном море: наблюдения и моделирование // ДАН. 2004. Т.395, № 5. С.690–695.
9. Давидан И.Н., Лопатухин Л.И. На встречу со штормами. Л.: Гидрометеиздат, 1982.
10. Дивинский Б.В., Косьян Р.Д., Подымов И.С., Пушкарев О.В. Экстремальное волнение в северо-восточной части Черного моря в феврале 2003 г. // Океанология. 2003. Т.43, №6. С.948–950.
11. Whitney J.C. The numerical solution of unsteady free-surface flows by conformal mapping // Proc. Second Inter. Conf. «Numer. Fluid Dynamics» / Ed. M.Holt. Springer-Verlag. 1971. P.458–462.
12. Овсянников Л.В. К обоснованию теории мелкой воды // Сб.науч.тр. «Динамика сплошной среды». АН СССР, СО Ин-т гидродинамики. Новосибирск, 1973. Вып.15. С.104–125.

13. *Chalikov D., Sheinin D.* Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface // *Comp. phys.* 2005. V.210. P.247–273.
14. *Дьяченко А.И.* О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью // *Докл. АН.* 2001. Т.376, № 1. С.27–29.
15. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A.* New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // *Eur. J. Mech. Fluids.* 2002. V.21. P.283–291.
16. *Ruban V.P.* Water waves over a time-dependent bottom: Exact description for 2D potential flows // *Phys. Let. A.* 2005. V.340, N 1–4. P.194–200.
17. *Шамин Р.В.* Описание динамики волн на воде на основе дифференциальных включений // *Докл. АН.* 2011. Т.438, № 4. С.453–455.
18. *Шамин Р.В.* Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью // *Сиб.журн. вычисл. матем.* 2006. Т.9, № 4. С.379–389.
19. *Шамин Р.В.* К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши-Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // *Современная математика. Фундаментальные направления.* 2007. Т.21. С.133–148.
20. *Шамин Р.В.* Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008. 133 с.
21. *Шамин Р.В.* Динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных // *Современная математика. Фундаментальные направления.* 2008. Т.28. С.3–144.
22. *Шамин Р.В.* Поверхностные волны на воде минимальной гладкости // *Там же.* 2010. Т.35. С.126–140.
23. *Барбашин Е.А.* К теории обобщенных динамических систем // *Уч. зап. МГУ. Математика.* 1948. 135, № 2. С.110–113.
24. *Толстоногов А.А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986.

Статья поступила в редакцию 09.09.2011 г.

