Численное моделирование больших волн

УДК 551.466.3

© *Д.В. Чаликов*, 2012
Санкт-Петербургский филиал Института океанологии им. П.П. Ширшова РАН
dmitry-chalikov@yandex.ru

ПОРТРЕТ ВОЛНЫ-УБИЙЦЫ

Обсуждаются методы моделирования экстремальных волн. Точная одномерная модель потенциальных волн используется для воспроизведения генерации экстремальной высокой волны вплоть до начала ее обрушения. Показана эволюция формы волны, энергии и обсуждаются ее разрушительные свойства.

Ключевые слова: конформное преобразование, численное моделирование, поверхностные волны, экстремальные волны, волны-убийцы.

В 1963 г. автор этой статьи плавал матросом в Тралфлоте. Лов рыбы происходил в Северной Атлантике, Баренцевом и Норвежском морях. Однажды, работая на палубе, мы услышали крик штурмана, высоко свесившегося из иллюминатора: «Берегись!». Штурман тут же исчез и задраил иллюминатор. Мы оглянулись и увидели, что горизонт в одном месте был высоко перекрыт водяной горой, которая быстро приближалась к судну. Обычно горизонт с высоты четырех метров был виден очень далеко. Все работающие на палубе, кроме меня, кинулись к снастям и схватились за них. Судно стояло лагом к волне, оно вдруг резко накренилось, и на палубу хлынул мощный поток воды высотой больше моего роста, который смыл за борт всю нашу многотонную добычу, а заодно попытался смыть и меня. Однако, находясь уже в воде, я сумел ухватиться за ванты. После этого вода быстро сошла с палубы, а нам ничего не оставалось, как ждать очередного подъема трала. Моряки, давно работающие в этом районе, сказали мне, что такая волна не редкость: она приходит едва ли не каждый год.

Тогда автор статьи еще не знал, что ему придется изучать это явление: однако, вспоминая много лет спустя тот яркий случай, я описал наиболее характерные признаки такой большой волны: а) высота волны, по-видимому, была порядка 5–7 м, тогда как высота окружающих волн – не более 3 м; б) длина волны вдоль гребня составляла не менее нескольких сотен метров, а в направлении ее движения, по-видимому, значительно меньше; в) перед фронтом волны образовалась глубокая впадина, которая была причиной резкого крена судна; г) при подходе верхний склон волны выглядел почти вертикальным.

Появление этих волн в океане долгое время было предметом легенд (описанный выше случай, однако, является фактом). Специалисты по теории волн, находившиеся под гипнозом линейных теорий, только усиливали всеобщий скептицизм. Эти волны были, наконец, обнаружены экспериментально, и, начиная с 70-х годов прошлого столетия, они стали объектом все более интенсивных исследований. В настоящее время достоверно известны многие случаи повреждения или гибели пассажирских и грузовых судов, а также прибрежных конструкций, вызванные огромными ветровыми волнами. Гибель, по крайней мере 22 супертанкеров, связывают с экстремальными волнами. Количество более мелких судов, пропавших в океане после встречи с такой волной, не поддается учету, поскольку зачастую не остается в живых ни одного очевидца. Феномен экстремальных волн был недавно подробно описан в монографии [1].

В силу своей уникальности, экспериментальные исследования экстремальных волн сталкиваются с огромными трудностями. В океане они встречаются слишком редко, чтобы стать объектом систематического изучения. Даже самые длинные волновые лабораторные каналы имеют недостаточную протяженность, для того чтобы в них успела произойти концентрация энергии в виде экстремальной волны. Наиболее доступным методом исследования остаются теоретические модели и численное моделирование.

Присутствие искривленной движущейся поверхности создает необычайные трудности в теоретических исследованиях волн, поэтому до 80-х годов прошлого столетия поверхностные волны изучались на основе упрощенных численных и теоретических моделей, многие из которых вообще не могут быть отнесены к гидродинамике. Полные уравнения использовались только в классической работе Стокса [2], в которой на основе конформных переменных были открыты волны, названные по имени автора. Удивительно, что во всех последующих работах по одномерным волнам метод, основанный на конформных переменных, использовался редко. Исключением является аналитическое решение для стационарных капиллярных волн, найденное Краппером [3]. Точные двухмерные и трехмерные уравнения для потенциальных волн решаются методом поверхностного интеграла, однако этот метод громоздок и неточен. Конформные переменные начали применяться для теоретических исследований, начиная с 80-х годов (см. краткий обзор в [4]). Первая попытка применения конформного преобразования для построения численной модели была осуществлена Уитни [5], который привел результаты единственного расчета. Формулировка Уитни выглядит неоправданно сложно: он использовал очень низкое пространственное разрешение и, по-видимому, не применял преобразования Фурье. Согласование расчетов с аналитическим решением было не очень точным. Видимо, поэтому работа не была продолжена. Идея конформного преобразования пришла к автору этой статьи независимо от публикаций в 1989 г. Уравнения для декартовых координат свободной поверхности в конформной нестационарной системе координат были получены в 1991 г., и, начиная с 1992 г., в соавторстве с Д. Шейниным была разработана численная модель одномерных волн [4–7], основанная на полных нелинейных уравнениях. Модель была проверена путем сравнения с точными стационарными решениями для гравитационных волн (волны Стокса), капиллярно-гравитационных волн и капиллярных волн (волны Краппера). Для волн Стокса и волн Краппера были разработаны эффективные алгоритмы, также основанные на конформных переменных. Оказалось что численная модель исключительно точна. Это неудивительно, так как после перехода к конформным переменным уравнения содержат производные только по горизонтальной координате, вычисляемые в пространстве Фурье с большой точностью. Поскольку уравнение Лапласа для потенциала скорости после конформного преобразования координат сохраняет свою форму, «вертикальная» производная от потенциала также вычисляется с высокой точностью. Основные погрешности в решение вносит аппроксимация по времени, поэтому применяется сравнительно дорогой метод Рунге–Кутта четвертого порядка. Модель была далее использована для вычисления пространственно-временного спектра для всех видов волн. Было установлено, что даже в многомодовом волновом поле двухмерный спектр отчетливо распадается на ветки, каждая из которых соответствует разным порядкам спутных волн (bound waves). Поскольку амплитуды этих мод для гравитационных волн уменьшаются, как амплитуды мод волны Стокса, можно предположить, что реальное волновое поле является, скорее, суперпозицией волн Стокса, чем линейных волн [8, 9].

Все эти результаты были впервые опубликованы на конференции ONR (Office of Naval Research) в 1994 г. [10]. По просьбе В.Е. Захарова, был сделан дополнительный доклад по модели, посвященный динамике волн при отсутствии силы тяжести. Подробные результаты были далее изложены в официальном отчете NOAA (National Oceanic

and Atmospheric Administration)[1] и в сборнике «Advances in Fluid Mechanics» [6]. Далее модель использовалась для исследования различных проблем физики одномерных волн (см., например, [8, 11–14]). Позже группа вычислительных работ, использующих конформное преобразование, была выполнена В.Е.Захаровым с сотр. [15–19]. В последние годы применение конформного преобразования в моделировании волн было расширено. В работах [20, 21] конформные координаты использовались одновременно для волн и атмосферного пограничного слоя над ними в совместной задаче о взаимодействии волн и ветра. В работе [22] конформные цилиндрические координаты применены для трехмерного моделирования вихревых движений, генерируемых двухмерными потенциальными волнами. В работах Рубана (см., например, [23]) конформные координаты вместе с разложением по малому параметру, определяющему узость волнового спектра, использовались для моделирования почти однонаправленных двухмерных волн.

Недавние работы [14, 21], имеющие прямое отношение к теме настоящего сборника, были посвящены исследованию механики и статистики экстремальных волн. Последняя статья описывает беспрецедентно обширные результаты, полученные более чем в 4 тыс. длительных численных экспериментов с начальными условиями, соответствующими различным стадиям развития волн. Было показано, что волны с высотой от подошвы до гребня, превышающей высоту двух существенных волн, появляются сравнительно редко, но систематически, с повторяемостью порядка не менее чем 10^{-4}. Повторяемость таких волн не зависит от стадии развития волнения, но, разумеется, к реальным экстремальным волнам могут быть отнесены достаточно высокие, появляющиеся при сильном ветре и больших разгонах. Благодаря автомодельности уравнений высота экстремальных волн пропорциональна существенной высоте волны, что значительно облегчает исследование. Развитие экстремальной волны может начаться в результате групповых эффектов; дальнейшая ее эволюция, вероятно, может поддерживаться модуляционной неустойчивостью, а в последней фазе происходит сильная концентрация энергии вокруг пика волны – она сильно заостряется, а высота увеличивается при почти точном сохранении энергии. Этот неизученный механизм, очевидно, связан с сильной нелинейностью.

Экстремальные волны были найдены среди волн с длиной волны, близкой к длине волны в пике спектра. Поиск максимальной в цуге волны $H_f = H_{tc}/H_s$ проводился в движущемся окне длиной $L_e = 1.5L_p$, где L_p – длина волны в пике спектра $L_p = 2\pi/k_p$ ($k_p = 8$ – волновое число в пике спектра на данный момент). Оказалось, что высота экстремальной волны распределена в интервале $2.0 < H_{tc}/H_s < 2.5$ (H_{tc} – высота волны от подошвы до гребня, H_s – существенная высота волны). Форма волны варьируется в широких пределах: как правило, протяженность подветренного склона гораздо меньше, чем наветренного, т.е. волна наклонена по направлению движения (но встречаются и обратные случаи). Глубина подветренной и наветренной подошв изменяется также в широких пределах, но, как правило, она значительно глубже, чем глубина подошвы в окружающем волновом поле. Никаких специфических закономерностей такого рода, кроме большой высоты, для экстремальных волн не обнаружено. Наиболее существенно то, что все экстремальные волны могут быть разбиты на две группы: обрушивающиеся и необрушивающиеся. Воздействие этих волн на объекты в реальных условиях различно в зависимости от того, является объект закрепленной или плавающей конструкцией. Нефтяная платформа может быть повреждена и необрушивающейся высокой волной, тогда как обрушивающаяся волна наиболее опасна для судов, которые могут быть повреждены гидродинамическим ударом. В некоторых случаях суда могут просто переломиться на участках волнового профиля с большой кривизной. Само понятие «экстремальность» зависит от размеров объекта.

[1] Отчет [6] рассылается по запросу.

В расчетах момент обрушения определялся по появлению неоднозначной поверхности – хотя бы в одной точке области. Конформные координаты столь гибки, что допускают неоднозначность поверхности в декартовых координатах, так что интегрирование может быть продолжено и далее. Но это не входило в наши намерения. Для данной проблемы важно, что после достижения неоднозначности поверхность уже никогда не стабилизируется: количество жидкости, пересекающей вертикаль пика волны, быстро возрастает, поэтому факт обрушения идентифицируется с большой точностью. Вплоть до этого момента сумма потенциальной и кинетической энергии, объем и горизонтальный импульс, которые являются инвариантами адиабатической проблемы, сохраняются с точностью до нескольких знаков.

Результаты многомодовых численных экспериментов показали, что модель воспроизводит появление экстремальных волн практически без предикторов, что принципиально противоречит популярному предложению Янсена [24] использовать в качестве предиктора вертикальную асимметрию волнового поля. Это предложение базируется на расширенной трактовке линейной теории неустойчивости Бенджамина–Фейера [25]. Надежды зашли так далеко, что схема прогноза опасных волн, основанная на расчете асимметрии, внедрена в волновую прогностическую модель WAM в Европейском центре среднесрочного прогноза погоды (ECMRWF). Успешность этого прогноза определяется простой вероятностью возникновения экстремальных волн, и когда-нибудь прогноз может оправдаться, что, разумеется, инициирует экстремальную волну публикаций. Основная погрешность такого рода построений состоит в том, что большая локальная асимметрия возникает одновременно с экстремальными волнами, поэтому с равным успехом можно предсказывать аномальную асимметрию, принимая в качестве предиктора появление экстремальных волн. Тем не менее ни одна, ни другая величина никак не могут выражаться в весьма неточно прогнозируемом волновом спектре, относящемся к большой области, которая включает десятки тысяч индивидуальных волн.

Расчеты [4] показали, что иногда высота волны от подошвы до гребня может систематически превышать удвоенную высоту существенной волны. В среднем одна треть таких волн разрушается, создавая экстремальные условия. Тем не менее, если высота волны приближается к трем высотам существенной волны, она разрушается всегда.

Целью настоящей статьи является непосредственная демонстрация геометрии и механики экстремальной волны, которая возникла в ходе численного эксперимента. Уравнения, численная схема были подробно описаны в предыдущих работах автора [6, 7].

В настоящей работе в качестве начальных условий задавалась случайная суперпозиция линейных волн со случайными фазами. Число мод равно 1000, число узлов сетки – 4000. Амплитуды волн выбирались так, чтобы спектр соответствовал спектру Пирсона–Московитца. Спектральный пик был помещен на волновое число $k_p = 8$. Генерация экстремальных волн является таким неустойчивым явлением, что период достижения обрушения волны оказывается зависимым даже от начального распределения фаз. Расчет всегда проводился до возникновения вычислительной неустойчивости, порожденной тенденцией к обрушению одной из волн. Далеко не всегда волна, стремящаяся обрушиться, достигает большой высоты: в большинстве случаев обрушение происходит не там, где высота велика, а скорее там, где возникает бóльшая крутизна; так что обрушиваться могут и маленькие волны. В ходе моделирования была собрана коллекция из нескольких сотен экстремальных волн с высотой $H_{tc} > 2H_s$. Статистические свойства таких волн были достаточно подробно рассмотрены в [4], а в настоящей статье мы даем типичный пример обрушивающейся экстремальной волны, достигшей высоты $H_{tc} = 2.51H_s$.

На рис. 1 дана последовательность профилей волны в течение примерно одного периода. Высота волны, отсчитываемая в данном случае от наветренной подошвы до гребня, нормированная на H_s, стремительно растет от 2.1 до 2.5. При этом волна заостряется,

и в верхней ее части образуется надстройка с вертикальной передней стенкой. На рис. 2 дана эволюция профиля колумнарной энергии, равной сумме кинетической и потенциальной энергий единичного столба. Как видно из рисунка, энергия быстро концентрируется вокруг пика волны. Ее максимальное значение в гребне за один период вырастает с 4 до 22 ед., при этом суммарная энергия волны остается постоянной. Заметим, что уже в начале этого развития волна была достаточно высокой. Может быть, она получила энергию за счет модуляционной неустойчивости. Этот факт нельзя ни доказать, ни опровергнуть, потому что в многомодовом волновом поле в разные моменты времени роль наибольшей волны принимают на себя другие различные волны, поэтому проследить всю эволюцию волны, которой суждено стать экстремальной, практически невозможно. В Фурье-пространстве эта эволюция прослеживается еще хуже. Эксперименты с сильно идеализированным волновым полем так далеки от действительности, что было бы, пожалуй, неправильно распространять обнаруженные закономерности на реальные волны. Все натурные данные показывают, что экстремальная волна возникает внезапно, без предыстории, как в рассматриваемом численном эксперименте. Эволюция, изображенная на рис. 2, вообще не имеет никакого отношения к модуляционной неустойчивости, которая развивается относительно медленно и всегда связана с увеличением энергии рассматриваемой моды за счет других мод. В данном случае этого не происходит, поскольку сохраняется полная энергия волны. Кроме того, волна очень мало напоминает то, что в теории неустойчивости считается модой. Скорее, она является сильнонелинейным объектом, в котором концентрируется энергия по внутренним причинам, не связанным непосредственно со спектральным или пространственным окружением.

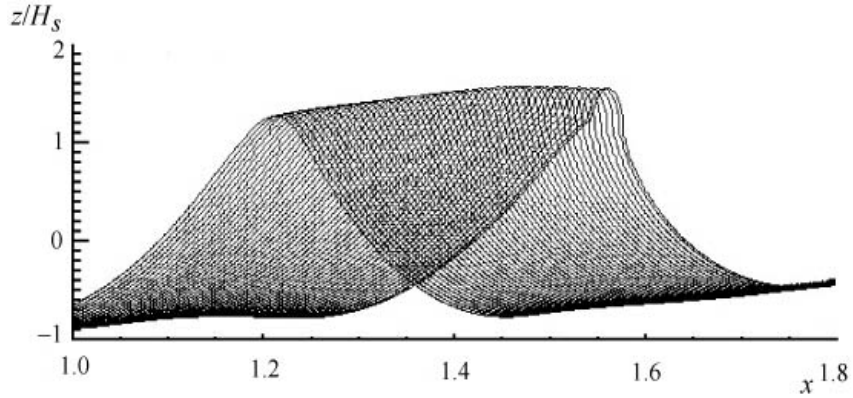


Рис. 1. Эволюция экстремальной волны перед обрушением.

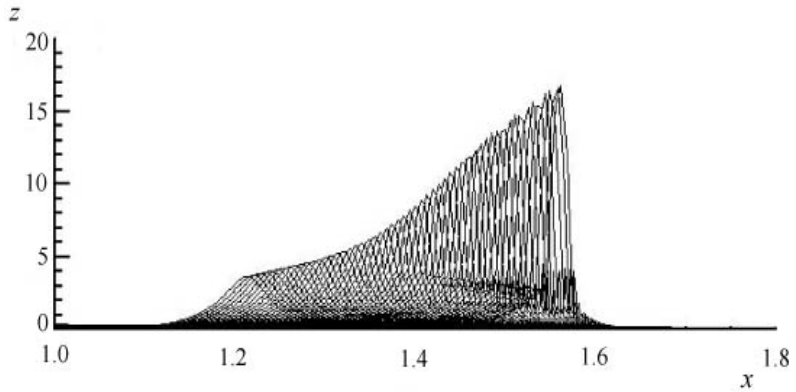


Рис. 2. Эволюция колумнарной энергии экстремальной волны перед обрушением.

Наиболее отчетливо эти закономерности проявлены на рис. 3 (кривые *1–3*), где показана эволюция характеристик экстремальной волны перед обрушением. Все величины

нормированы на их исходные значения в начале эволюции. Как видно, высота волны и ее средняя энергия растут очень незначительно, тогда как максимальная колумнарная энергия в пике волны вырастает в 4.5 раза.

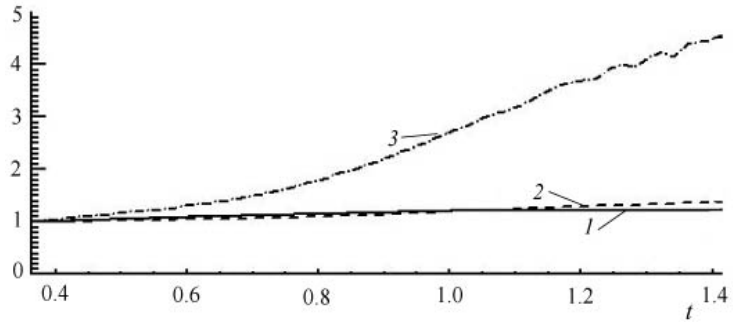


Рис. 3. Эволюция характеристик экстремальной волны перед обрушением.
1 – высота волны; *2* – средняя колумнарная энергия волны; *3* – максимальная колумнарная энергия волны.

На рис. 4 показана эволюция экстремальных значений поверхностного поля скорости в экстремальной волне перед началом обрушения. Как видно, минимальные значения горизонтальной и вертикальной компонент скорости (кривые *2* и *4*) практически не отражают приближения к обрушению. Это неудивительно, поскольку рост и обрушение происходят в верхней части волны и мало затрагивают подошву. Наибольшие изменения заметны в поле горизонтальной компоненты, максимальное значение которой возрастает почти в 2 раза. Эта эволюция объясняется быстрым перекосом волны по ходу движения. Вертикальная компонента скорости растет незначительно.

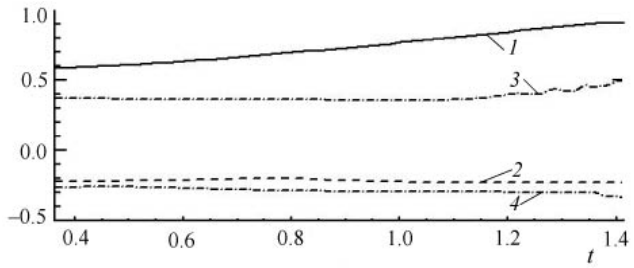
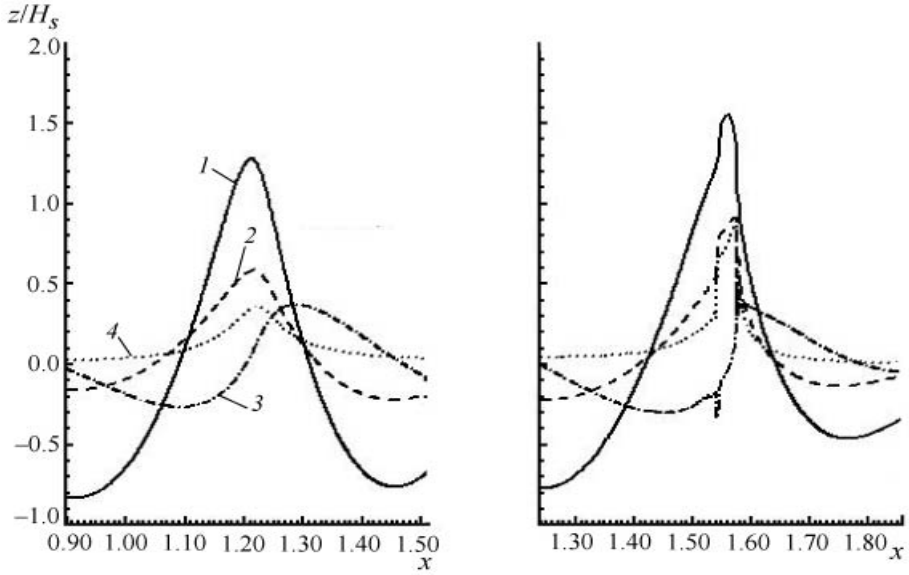


Рис. 4. Эволюция экстремальных значений компонент скорости на поверхности.
1, *2* – максимальное и минимальное значения горизонтальной компоненты;
3, *4* – то же для вертикальной компоненты.

Эти изменения наиболее отчетливо проявлены на рис. 5, где сравниваются поверхностные кинематические характеристики волны до того, как ничто не предвещает обрушения, с теми же характеристиками в момент, когда передний фронт волны оказывается вертикальным и начинается обрушение. Как видно, за один период форма и кинематическая структура волны кардинально перестроились: ее верхушка приобрела горизонтальную скорость, приближающуюся к фазовой скорости волны. В поле поверхностной скорости образовались разрывы.

Наконец, на рис. 6 показано распределение кинетической энергии в волне до начала эволюции и перед обрушением. Здесь использованы размерные переменные, выбранные для случая, когда волновой спектр описывается аппроксимацией Пирсона–Московица при скорости ветра U = 25 м/с. Масштаб длины L в этом случае оказывается равным 350 м, существенная высота волны H_s = 12.3 м, высота от подошвы до гребня волны H_{tc} перед обрушением равна 31 м, фазовая скорость волны – 23 м/с. Волны с

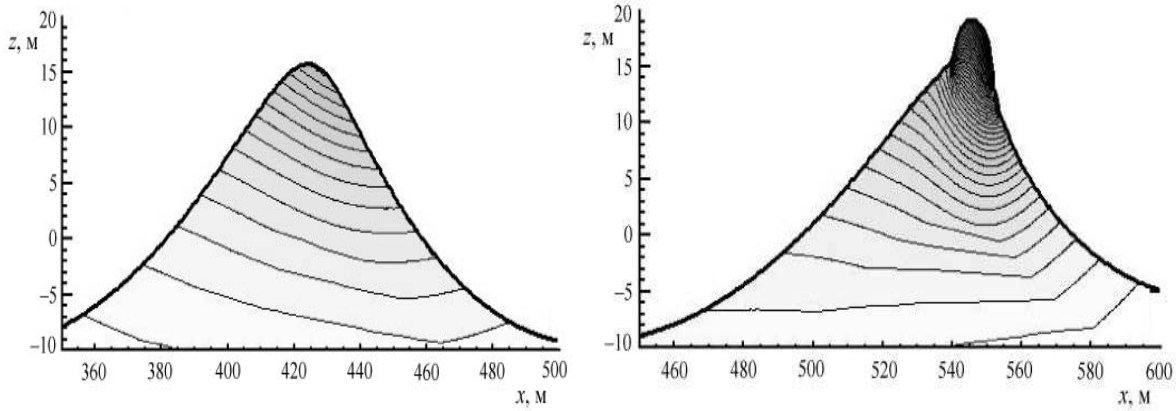
такими характеристиками иногда фиксировались с помощью акселерометров на экспедиционных судах в Южном океане. Горизонтальная компонента скорости в гребне волны приближается к ее фазовой скорости и составляет около 20 м/с. Поскольку плотность воды очень велика, она может создать давление на препятствие, равное около 100 000 Па. Только верхняя часть волны, готовая к отделению, с длиной вдоль гребня 10 м обладает энергией порядка 10^8 Дж, что эквивалентно примерно 3 кг тротила.



а *б*

Рис. 5. Сравнение поверхностных кинематических характеристик волны до (*а*) и после (*б*) обрушения.

1 – профиль волны; *2* – распределение по фазе волны горизонтальной компоненты скорости на поверхности; *3* – то же для вертикальной компоненты скорости; *4* – то же для кинетической энергии. *а* – начало эволюции волны; *б* – волна перед самым обрушением.



а *б*

Рис. 6. Объемное распределение кинетической энергии в волне в начале эволюции (*а*) и перед обрушением (*б*).

Неудивительно, что такая волна может снести рубку на судне или разрушить нефтедобывающую платформу.

***

Экстремальные волны являются проявлением собственных свойств нелинейного волнового поля. Они появляются редко, но неизменно, если время наблюдений или продолжительность численного эксперимента достаточно велики. Для исследования экстремальных волн желательно использовать математические модели, которые допускают

высокую локальную крутизну поверхности. Модели, основанные на уравнениях, выведенных в предположении о малости амплитуды, по-видимому, для этих целей непригодны. Для исследования одномерных волн идеальной оказывается модель потенциальных волн в конформных переменных или ее обобщения [23]. Предположение об одномерности ничуть не уменьшает значения таких исследований. В настоящее время существует мнение, что в противоречие с теорией межволновых взаимодействий Хассельманна [26] именно одномерные волны наиболее нелинейны, поэтому повторяемость экстремальных волн уменьшается с расширением спектра. Это мнение подтверждается экспериментальными данными [27]. Поскольку задачи прогноза и проектирования нуждаются скорее в оценках сверху, одномерное моделирование в силу своей простоты и экономичности является наиболее подходящим инструментом.

Вопрос о физике возникновения экстремальных волн остается открытым. Единственным кандидатом на механизм возникновения является модуляционная неустойчивость – парафраз теории неустойчивости Бенджамина–Фейера. В действительности, это просто эффект нелинейных взаимодействий в однонаправленных волнах, для которых теория Хассельманна вообще не работает. В теории исследуется эволюция дополнительных мод, внесенных выше и ниже основной моды, и показывается, что они растут экспоненциально. Если первичные возмущения внесены плотно, все они начинают расти, но с разной скоростью. В конечном итоге образуется непрерывный спектр. Этот процесс происходит медленно: для развития новых мод требуется довольно много периодов основной моды.

Экспериментальные данные и точное моделирование показывают, что в волновом поле, обладающем реальным спектром, развитие экстремальной волны происходит за время порядка одного периода. Скорость ее роста намного превосходит предсказания теории. При этом энергия выделенной волны почти не меняется, но значительно меняется ее форма, что ведет к концентрации энергии и росту локальной крутизны.

Несмотря на то, что механизм концентрации энергии сам по себе представляет большой интерес, надо признать: практическое значение этих исследований невелико. Информация о волнах включает немногочисленные эмпирические данные о спектрах (в основном частотных), данные волнового прогнозирования и многолетние данные анализа, являющиеся обобщением прогностических результатов, исправленных ассимиляцией наблюдений. Все эти данные крайне неточны и имеют низкое спектральное разрешение. Совершенно неясно, каким образом их интерпретация в терминах экстремальных волн может быть дана на основе открытия механизма их генерации. Единственной практически важной задачей является исследование повторяемости экстремальных волн и связь ее с простыми интегральными характеристиками волнения, например с возрастом. Эта задача может быть выполнена с помощью точных математических моделей. Такие результаты, возможно, очень полезны для проектирования морских сооружений и судов. Трехмерные математические модели (например, модели, основанные на поверхностном интеграле [28], или на первичных трехмерных уравнениях [29]), вряд ли могут использоваться для массовых расчетов из-за их исключительной дороговизны.

Надежные данные о повторяемости экстремальных волн в настоящее время отсутствуют. Известно, что волны возникают в идеальном случае отсутствия течений и на глубокой воде. Исследование такой ситуации является наиболее важной проблемой. Прогноз экстремальных волн определенной высоты в любом случае будет иметь характер предупреждения, снабженного вероятностными характеристиками.

Литература

1. *Куркин А.А., Пелиновский Е.Н.* Волны-убийцы: факты, теория и моделирование. Н.Новгород: ННГУ, 2004. 157 с.

2. *Stokes G.G.* On the theory of oscillatory waves // Trans. cambridge philos. soc. N 8. P.441–445; Math. phys. pap. 1847. N 1. P.197–229.
3. *Crapper G.D.* An exact solution for progressive capillary waves of arbitrary amplitude // J. of fluid mech. 1957. N 96. P.417–445.
4. *Chalikov D.V.* Freak waves: their occurrence and probability // Phys of fluid. 2009. N 21. 076602; doi:10.1063/1.3175713.
5. *Whitney J.C.* The numerical solution of unsteady free-surface flows by conformal mapping // Proc. Second Inter. Conf. on «Numer. fluid dynamics» / Ed. M.Holt. Springer-Verlag. 1971. P.458–462.
6. *Chalikov D.V., Sheinin D.* Numerical modeling of surface waves based on principal equations of potential wave dynamics. Technical Note. NOAA/NCEP/OMB. 1996. 54 p.
7. *Chalikov D.V., Sheinin D.* Direct Modeling of One-dimensional Nonlinear Potential Waves. Nonlinear Ocean Waves / Ed. W.Perrie. Advances in fluid mechanics. 1998. V.17. P.207–258.
8. *Chalikov D.V.* Statistical properties of nonlinear one-dimensional wave fields // Nonlinear processes in geophysics. 2005. N 12. P.1–19.
9. *Чаликов Д.В.* Трансформация гармонических волн на глубокой воде // Фундаментальная и прикладная геофизика. 2010. № 3(9). С.14–21.
10. *Chalikov D.V., Sheinin D.* Numerical simulation of surface waves based on equations of potential wave dynamics // Proc. ONR «Ocean waves workshop». Tucson, Arizona, 1994.
11. *Chalikov D.V., Sheinin D.* 2005. Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface // J. Comp. phys. 2005. N 210. P.247–273.
12. *Sheinin D., Chaliko D.V.* Hydrodynamical modeling of potential surface waves // Problems of hydrometeorology and environment on the eve of XXI century. Proc. of int. theor. conf. SPb.: June 24–25. 2000.
13. *Chalikov D.V.* Simulation of Benjamin-Feir instability and its consequences // Physics of fluid. 2007. V.19. 016602–15.
14. *Чаликов Д.В.* Статистика экстремальных ветровых волн // Фундаментальная и прикладная геофизика. 2009. № 3(5). С.4–24.
15. *Zakharov V.E., Dyachenk, A.I., Vasilyev O.A.* New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2002. N 21. C.283–291.
16. *Zakharov V.E., Dyachenk, A.I., Prokofiev A.O.* Freak waves as nonlinear stage of Stokes wave modulation instability // Eur. J. Mech. B/Fluids. 2006. N 25. P.677–692.
17. *Dyachenko A.I., Zakharov V.E.* Modulation instability of Stokes wave – freak wave // JETP Let. 2005. V.81. P.255–259.
18. *Dyachenko A.I., Zakharov V.E.* On the Formation of Freak Waves on the Surface of Deep Water // JETP Let. 2008. V.88. P.307–311.
19. *Шамин Р.В.* О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью // Докл. АН. 2006. Т.406, № 5. С.112–113.
20. *Chalikov D.V.* Interactive modeling of surface waves and boundary layer. Ocean Wave Measurements and Analysis. ASCE // Proc. oh the third Intern. Symp. WAVES 97. 1998. P.1525–1540.
21. *Chalikov D.V., Rainchik S.* Coupled Numerical Modelling of Wind and Waves and the Theory of the Wave Boundary Layer // Boundary-layer meteorol (2011). 2010. V.138. P.1–41. DOI 10.1007/s10546-010-9543-7.
22. *Babanin A.V., Chalikov D.V.* Numerical investigation of turbulence generation in non-breaking potential waves // J. Phys. Oceanography (submitted).
23. *Ruban V.P.* Conformal variables in the numerical simulations of long-crested rogue waves // Europ. phys. J. spec. Top. 2010. N 185. P.17–33.
24. *Janssen P.* Nonlinear four-wave interaction and freak waves // J. Phys. oceanogr. 2003. N 33. P.2001–2018.
25. *Benjamin T.B., Feir J.E.* The disintegration of wave trains in deep water // J. Fluid. mech. 1967. N 27. P.417–430.
26. *Hasselmann K.* Weak-interaction theory of ocean waves. Hamburg: Univ. of Hamburg, 1967. 112 p.
27. *Onorato M., Waseda T., Toffoli A., Cavaleri L., Gramstad O., Janssen P.A.E.M., Kinoshita T., Monbaliu J., Mori N., Osborne A.R., Serio M., Stansberg C.T., Tamura H., Trulsen K.* Statistical Properties of Directional Ocean Waves: The Role of the Modulational Instability in the Formation of Extreme Events // Phys. Rev. Let. 2009. V.102. P.114502.
28. *Clamond D.V., Grue J.* A fast method for fully nonlinear water wave dynamics // J. Fluid mech. 2001. N 447. P.337–355.
29. *Chalikov D.V., Babanin A.V.* Numerical Modeling of Three-Dimensional Periodic Fully Nonlinear Potential Waves // J. Comp. Phys. 2011. (submitted).

Статья поступила в редакцию 09.09.2011 г.