УДК 532.5

© *Р.В.Шамин*[1,2,3], *А.И.Смирнова*[4], *А.В.Юдин*[3,4], 2012
[1]Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН, Москва
[2]Новосибирский государственный университет
[3]Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН, Южно-Сахалинск
[4]Российский университет дружбы народов, Москва
roman@shamin.ru

ВОПРОСЫ ОБНАРУЖЕНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВОЛН-УБИЙЦ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ

Рассматриваются методы прогнозирования и обнаружения волн-убийц в вычислительных экспериментах. Построены и проанализированы методы оперативного прогноза волн-убийц, методы дистанционного зондирования морской поверхности, а также применение вычислительных экспериментов к верификации натурных измерений.

Ключевые слова: волны-убийны, вычислительные эксперименты, математическое моделирование.

Среди катастрофических явлений в океане волны-убийцы занимают особое место. Это одиночные волны, которые возникают внезапно и могут достигать значительной амплитуды (известны случаи до 30 м). Именно внезапность обусловливает серьезность опасности этих волн для судов и морских сооружений. Проблема предсказания и обнаружения волн-убийц в океане является одной из наиболее актуальных при их исследовании. К сожалению, она еще очень далека от решения. В силу объективных причин изучение аномально больших поверхностных волн с помощью натурных и лабораторных экспериментов сильно затрудненно. Поэтому в последнее время для изучения волн-убийц наибольшую актуальность приобретает вычислительный эксперимент. В этой области были достигнуты значительные успехи [1–9].

Мы рассмотрим такие актуальные проблемы, как обнаружение и предсказание возникновения волн-убийц в обработке вычислительных экспериментов. есть три подхода решения: 1) оперативный прогноз по функционалам, характеризующим волнение с точки зрения возможности образования волн-убийц; 2) дистанционное наблюдение за динамикой распространения волн; 3) сравнение статистики обнаружения волн-убийц по полным записям динамики волн и волнограммам.

В первую очередь мы рассматриваем основные динамические уравнения, описывающие волны на воде и плоское потенциальное течение идеальной жидкости с бесконечно глубоким дном. Затем приводим постановки вычислительных экспериментов, на результатах которых апробируем наши методы прогнозирования волн-убийц, рассматриваем методы оперативного прогноза их возникновения. Эти методы основаны на анализе динамики отношения максимальной амплитуды к значительной высоте волнения в каждый момент времени и максимальной крутизны. На этом построен алгоритм SPRW, который позволяет исследовать возможность непосредственного предсказания волн-убийц. Показано, что их возникновение носит стохастический характер и методы простого предсказания оказываются недостаточно эффективными.

Далее анализируем возможность обнаружения волны-убийцы с помощью дистанционного зондирования поверхностных волн. Рассматривается постановка эксперимента, приближенная к реальной ситуации использования идеального дальномера. Разрабо-

тан алгоритм, который позволяет с помощью этого «прибора» обнаруживать волны-убийцы на расстоянии нескольких километров.

И наконец, проводим сравнительный анализ статистики обнаружения волн-убийц по полной пространственно-временно́й записи и по огрубленной записи – волнограмам, которые используются в большинстве натурных экспериментов. Показано, что использование волнограммы приводит к значительным ошибкам.

Уравнения в конформных переменных, описывающие волны на воде. В настоящей работе моделирование волн-убийц основано на численном решении уравнений, описывающих нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Мы рассмотрим плоское течение с бесконечно глубоким дном, по горизонтальной переменной – 2π-периодические условия. Такие предположения являются естественными для моделирования волн-убийц.

Пусть идеальная несжимаемая жидкость занимает область в плоскости (x, y), ограниченную свободной поверхностью $-\infty < y < \eta(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$.

Считая движение жидкости потенциальным, имеем $v(x,y,t) = \nabla\Phi(x,y,t)$, где $v(x,y,t)$ – двухмерное поле скоростей, $\Phi(x,y,t)$ – потенциал скоростей. Всюду в данной работе мы считаем, что операторы градиента, дивергенции и Лапласа применяются лишь по пространственным переменным. Из условия несжимаемости жидкости следует, что потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\Phi(x,y,t) = 0$.

С этим уравнением связываются следующие граничные и начальные условия:

$$(\eta_t + \Phi_x\eta_x - \Phi_y)\,|_{y=\eta(x,t)} = 0,$$

$$(\Phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 + gy)\,|_{y=\eta(x,t)} = 0,$$

$$\Phi_y\,|_{y=-\infty} = 0,$$

$$\eta\,|_{t=0} = \eta_0(x), \quad \Phi\,|_{t=0} = \Phi_0(x,y).$$

Здесь g – ускорение поля тяжести.

Будем использовать уравнения в конформных переменных. Идея использовать конформные переменные для описания нестационарного течения идеальной жидкости со свободной поверхностью впервые была предложена в работах [10, 11]. Для численного моделирования уравнения в конформных переменных использовались в работах [12–14] и многих других. Мы рассмотрим вариант этих уравнений, предложенный в работе [15]. Пусть идеальная жидкость занимает бесконечную область в переменных (x, y), ограниченную криволинейной границей. Вводим комплексную плоскость $z = x + iy$. Эту область можно (по теореме Римана) конформно отобразить на нижнюю полуплоскость с переменными $w = u + iv$.

Обратное конформное отображение выражается аналитической функцией $z = z(t, w)$. Эта функция является также функцией времени, поскольку мы рассматриваем нестационарную задачу. Зная функцию $z(t,u)$, можно восстановить профиль свободной поверхности. Для описания потенциального течения идеальной жидкости необходимо также знать потенциал скоростей. Поскольку потенциал является гармонической функцией, то все его значения могут быть описаны значением этого потенциала лишь на границе области. Пусть $\psi(t,x)$ – значение потенциала скоростей на свободной поверхности. Соответственно через $\Phi(t,z)$ обозначим аналитическую в нижней полуплоскости функцию такую, что $\mathrm{Re}\,\Phi(t,x) = \psi(t,x)$. Будем рассматривать функцию

$\Pi(t,w)=\Phi\left(t,z\left(t,w\right)\right)$, которая также будет аналитичной в нижней полуплоскости. Теперь введем новые переменные:

$$R(t,w)=\frac{1}{z'(t,w)},\quad V(t,w)=i\frac{\Pi'(t,w)}{z'(t,w)}.$$

Здесь и далее штрихом мы обозначаем производную по переменной w. Эти функции являются аналитичными в нижней полуплоскости и удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$R(t,w)\to 1,\ \mathrm{Im}\,w\to-\infty,$$
$$V(t,w)\to 0,\ \mathrm{Im}\,w\to-\infty.$$

Поскольку мы рассматриваем поверхностные волны 2π-периодические по переменной x, то и функции R и V также будут 2π-периодическими по переменной u. Тогда функции R и V можно представить в виде рядов Фурье:

$$R(w,t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}r_k(t)e^{-ikw},$$
$$V(w,t)=\sum_{k=1}^{\infty}v_k(t)e^{-ikw}.$$

Функции R и V полностью описывают динамику поверхностных волн идеальной жидкости. При этом достаточно знать лишь значения этих функций на вещественной оси (при $v=0$), поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать аргумент u вместо w.

Функции R и V удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\dot{R}(t,u)=i(U(t,u)R'(t,u)-U'(t,u)R(t,u)),\\
&\dot{V}(t,u)=i(U(t,u)V'(t,u)-B'(t,u)R(t,u))+g(R(t,u)-1),\\
&0<u<2\pi,\ 0<t<T,\\
&R(t,0)=R(t,2\pi),\ V(t,0)=V(t,2\pi),\ 0<t<T,\\
&R(0,u)=R_0(u),\ V(0,u)=V_0(u),\ 0<u<2\pi.
\end{aligned}\qquad(1)$$

Здесь функции U и B вычисляются по формулам

$$U=P(V\overline{R}+\overline{V}R),\quad B=P(V\overline{V}),\quad P=\frac{1}{2}\left(I+iH\right).$$

Математическая корректность рассмотренных выше уравнений установлена в цикле работ [16–21], где были выявлены существование и единственность решений уравнений (1), предложены эффективные численные методы и доказана сходимость численных методов.

Вычислительные эксперименты. Мы тестировали наши методы обнаружения волн-убийц на результатах вычислительных экспериментов. Постановка их соответствовала экспериментам из работы [9]. В них рассматривалась динамика поверхностных волн, распространяющихся в одну сторону, что соответствует морской зыби.

В качестве динамической модели мы использовали приведенную выше систему уравнений. Начальные условия определялись как ансамбль бегущих в одну сторону волн со средним значением волнового числа $K_0=25$. Мы предполагали, что начальное возмущение поверхности задается суммой гармоник со случайными фазами:

$$\eta_0(x) = \sum_{-\frac{1}{2}K_{\max}}^{\frac{1}{2}K_{\max}} \varphi(k - K_0)\cos(kx - \xi_k),$$

где $K_{\max}$ – полное число спектральных мод, ξ_k – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $-\frac{1}{2}K_{\max} < k < \frac{1}{2}K_{\max}$. Начальные значения поля скоростей предполагались связанными с формулами линейной теории. Функция $\varphi(k)$ определялась по формуле

$$\varphi(k) = \begin{cases} \delta_k, & |k| > K_w; \\ \kappa\exp(-\alpha k^2) + \delta_k, & |k| \le K_w. \end{cases}$$

Здесь δ_k – независимые случайные параметры, равномерно распределенные на интервале $-\frac{1}{2}K_{\max} < k < \frac{1}{2}K_{\max}$. Число $1 \le K_w \le 10$ – спектральная ширина; κ, α – «внутренние» параметры спектра, определенные так, чтобы «внешние» параметры – квадрат средней крутизны $\mu^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \eta_x^2 dx$ и дисперсия $D = \left(\int_{-K_w}^{K_w} k^2 e^{-\alpha k^2} dk\right) \Big/ \left(\int_{-K_w}^{K_w} e^{-\alpha k^2} dk\right)$ – принимали заданные значения. Вклад в полную энергию случайного шума составлял не более 3 %.

В каждом эксперименте время менялось до 10^4, что соответствовало приблизительно 500 периодам волн. В расчетах полное число гармоник было $K_{\max}$ = 2048 или $K_{\max}$ = 4096 в зависимости от квадрата средней крутизны. Регистрация волн-убийц производилась с помощью амплитудного критерия $\nu(t) = \frac{H_{\max}(t)}{H_s(t)} > 2.1, \mu(t) = \max_{x\in[0,2\pi]} |\eta_x(x,t)| > 0.3,$ где $H_{\max}$ – амплитуда самой высокой волны, а H_s – существенная высота волн, т.е. средняя амплитуда одной трети самых высоких волн.

В работе [9] были получены оценки вероятностей возникновения волн-убийц в зависимости от параметров начального волнения.

Оперативный прогноз волн-убийц. Поскольку в ходе вычислительных экспериментов мы наблюдаем поведение функций $\nu(t)$ и $\mu(t)$, можно построить метод оперативного предсказания возникновения волн-убийц на основе изменения этих функций.

Нами был разработан алгоритм SPRW (Simple Predictor of Rogue Waves), который заключается в следующей схеме. Сигнал о предсказании возникновения волны-убийцы выдается в случае, когда одновременно выполнены следующие условия:

$$\frac{\nu(t+\Delta) - \nu(t)}{\Delta} \ge \alpha,$$

$$\frac{\mu(t+\Delta) - \mu(t)}{\Delta} \ge \beta,$$

где $\Delta > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ суть параметры алгоритма. На основе анализа большого банка данных вычислительных экспериментов наилучший выбор параметров алгоритма SPRW показал точность предсказания, равную 68.94 %, с учетом ошибок первого и второго ро-

да. Под ошибками первого рода понимается несрабатывание критерия при возникшей волне-убийце, а ошибки второго рода, наоборот, есть ложное срабатывание критерия.

На рис.1 приведен рабочий экран программы реализации алгоритма SPRW.

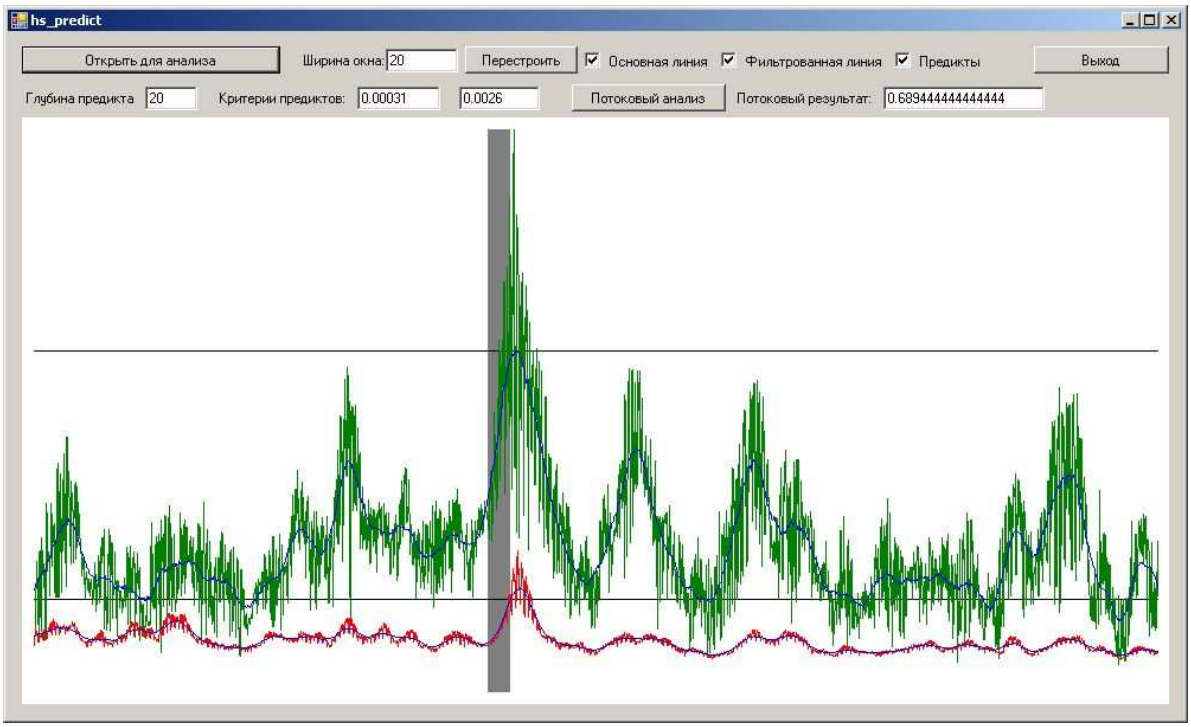

Рис.1. Рабочий экран программы SPRW.

Верхний график – значения функции $\nu(t)$, нижний – значения функции $\mu(t)$. Горизонтальные линии – критические линии: $\nu = 2.1$, $\mu = 0.3$, одновременное пересечение которых означает факт возникновения волны-убийцы в вычислительном эксперименте. Широкая вертикальная линия – это момент времени, в течение которого был выдан сигнал о предсказании волны-убийцы.

Типичная ситуация – когда сигнал выдается в непосредственный момент перед возникновением волны-убийцы, что следует из самого алгоритма SPRW. Из опыта применения этого алгоритма, построенного на анализе поведения функций $\nu(t)$, $\mu(t)$, можно сделать вывод о стохастичности поведения индикаторных функций и соответственно появлении волн-убийц в ходе нелинейной динамики поверхностных волн на воде. Данный вывод во многом совпадает с выводами об отсутствии четких предикторов волн-убийц [1, 22].

Возможности дистанционного обнаружения волн-убийц. В предыдущих разделах мы рассматривали предсказание волн-убийц на основе анализа решений дифференциальных уравнений, описывающих динамику волн на воде. Однако важным является вопрос о возможности дистанционного обнаружения волн-убийц. Мы моделируем ситуацию, когда оперативное наблюдение за волнением ведется с помощью идеального точечного дальномера. Основной вопрос, рассматриваемый здесь, заключется в том, каким образом можно обнаружить появление волн-убийц по показаниям данного «прибора».

Итак, пусть на высоте H установлен неподвижный «прибор», который дает показания о расстоянии от прибора до поверхности волны по лучу, исходящему от прибора под фиксированном углом $(0 < \alpha < \pi/2)$ от оси абсцисс. Описанную схему проиллюстрируем на рис.2.

Пусть в фиксированный момент времени t имеем показание, равное R_t, тогда возвышение поверхности в точке пересечения с лучом над нулевым уровнем y_t выразится по формуле

$$y_t = H - R_t \sin\alpha\,.$$

В дальнейшем удобнее работать с величинами y_t. Будем рассматривать записи вычислительных экспериментов, в которых возникают волны-убийцы. Типичный пример записи показаний прибора приведен на рис.3.

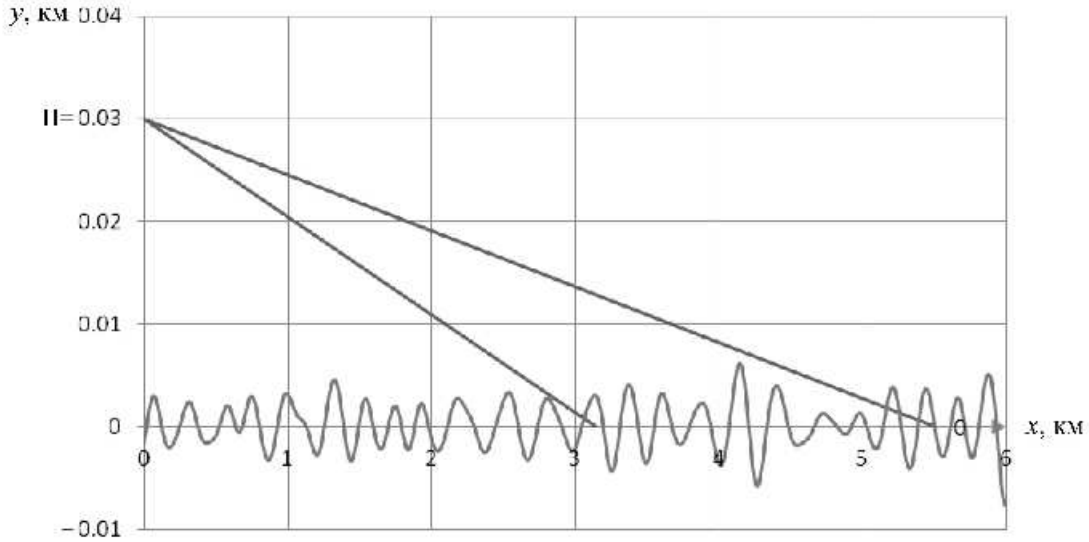

Рис.2. Схема установки прибора.

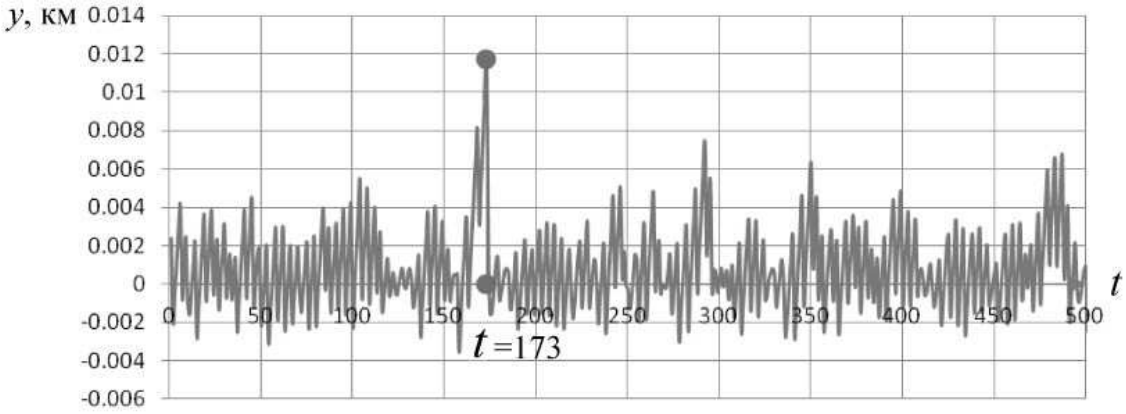

Рис.3. Показания «прибора». При $t = 173$ обнаружена волна-убийца.

На этом рисунке мы можем определить момент возникновения волны-убийцы по резкому возрастанию графика y_t. Для реализации автоматического метода обнаружения волны-убийцы мы будем работать не с функцией y_t, а с функцией квадрата среднего отклонения этой функции от своего среднего значения. Будем считать, что наш прибор дает показания в дискретные моменты времени $t_n = (\Delta t)n,\ n = 0,1,\ldots,N$.

Введем следующие величины:

$$\overline{y}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} y_{t_n}, \quad \sigma_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=0}^{N}(y_{t_n} - \overline{y}_N)^2$$

(N – количество обрабатываемых отсчетов).

Анализируя изменения σ_N^2 при увеличении N, можно обнаружить возникновение волны-убийцы. Приведем график этой величины для вычислительного эксперимента, рассмотренного на рис.3.

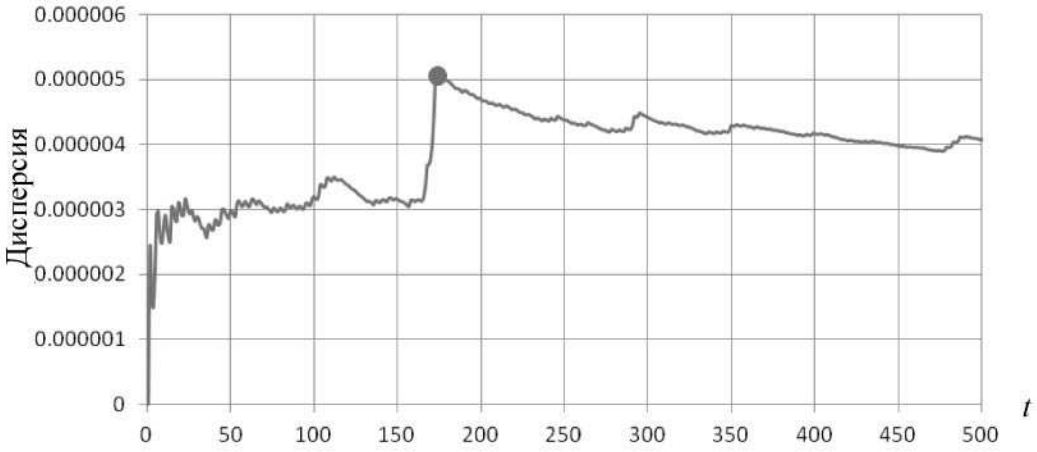

Рис.4. График величины σ_N^2 .

Для обнаружения возникновения волны-убийцы по графику величины σ_N^2 необходимо определять моменты резкого возрастания этой величины. С этой целью проанализируем поведение конечных разностей величины σ_N^2 :

$$d_{N,\tau} = \sigma_N^2 - \sigma_{N-\tau}^2 .$$

График величины $d_{N,\tau}$ приведен на рис.5.

Горизонтальной линией на рис.5 обозначено критическое значение величины $d_{N,\tau}$, при достижении которого регистрируется волна-убийца. При этом следует рассматривать данную индикаторную функцию после первых 50 отсчетов.

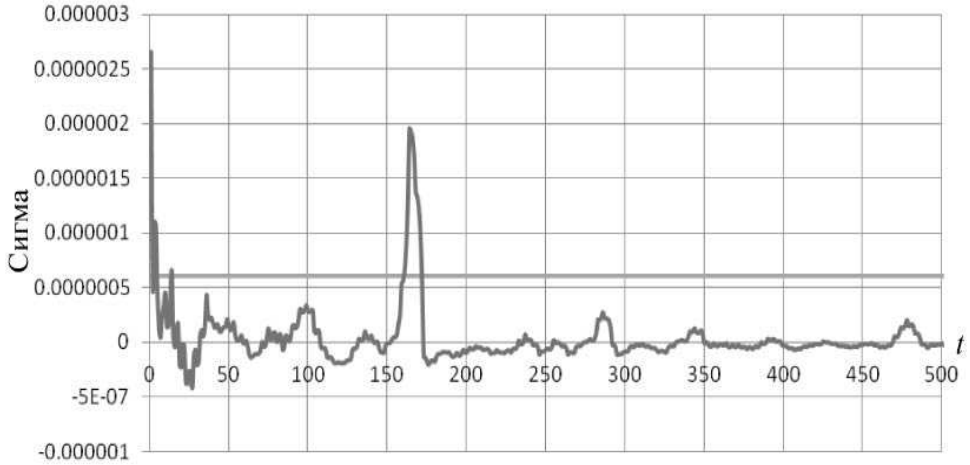

Рис.5. График величины $d_{N,\tau}$, $\tau = 10$.

Уровень критической линии устанавливается эмпирически. Проведенные вычислительные эксперименты по обнаружению волны-убийцы показали свою состоятельность, поскольку позволяют обнаруживать волну-убийцу на расстоянии 4–6 км от регистрирующего прибора.

Вопросы обнаружения волн-убийц с помощью волнограмм. В натурных экспериментах, посвященных обнаружению волн-убийц, часто используется анализ волнограмм – временна́я запись возвышения поверхности свободной поверхности в фиксированной точке. С помощью наших экспериментов покажем, что обнаружение аномально больших поверхностных волн только по волнограмме возможно лишь небольшую часть волн-убийц, возникающих в данном районе.

В вычислительных экспериментах мы наблюдаем динамику свободной поверхности – функцию $y = y(x,t)$. На основании этой функции, используя амплитудный критерий, можно обнаруживать экстремальные волны. И в то же время по этой функции построим функцию – волнограмму, получаемую, например, с помощью донного датчика

$$A_s(t) = y(x_0,t), \quad t \in [0,T].$$

Здесь точка x_0 есть место, в котором установлен датчик возвышения поверхности.

Схема этих экспериментов представлена на рис.6, где через S обозначен донный датчик, по показаниям которого вычисляется возвышение поверхности.

По функции $A_s(t)$ также будем обнаруживать волны-убийцы по амплитудному критерию.

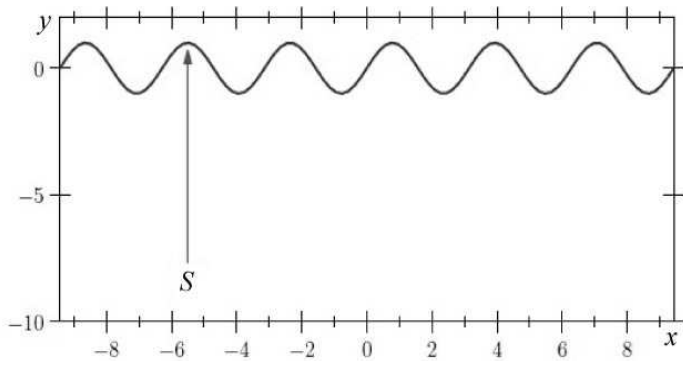

Рис.6. Схема натурных экспериментов.

Методика моделирования натурных экспериментов. Для сравнения возможностей натурных экспериментов с вычислительными используется следующая методика.

1. Проводится большая серия вычислительных экспериментов с различными параметрами начальных волн.

2. В результатах вычислительных экспериментов обнаруживаются волны-убийцы.

3. По полным записям результатов строятся волнограммы – функции $A_s(t)$.

4. По функциям $A_s(t)$ обнаруживаются волны-убийцы согласно правилам обработки данных натурных.

5. Вычисляется процент совпадения обнаружения волны-убийцы в результате обработки вычислительных экспериментов и обработки волнограмм.

Рассмотрим теперь полученные результаты.

Мы провели эксперименты, в результате которых обнаруживаются волны-убийцы. Постановки наших вычислительных оптов соответствовали, описанным выше. Всего было проведено 1056 элементарных экспериментов. Квадрат средней крутизны принимал значения $\mu^2 = 2.06 \cdot 10^{-3}$, $\mu^2 = 3.08 \cdot 10^{-3}$, $\mu^2 = 4.10 \cdot 10^{-3}$, дисперсия $D \in \{0.07, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$. Для каждого фиксированного значения квадрата средней крутизны и дисперсии проводилось по 32 однотипных численных опыта.

Далее по полным записям результатов вычислительных экспериментов были построены волнограммы, которые затем были проанализированы на предмет обнаружения волн-убийц согласно правилам обработки данных натурных.

Для каждого значения квадрата средней крутизны и спектральной ширины процент совпадения обнаружения волны-убийцы в результате обработки вычислительных экспериментов и в результате обработки волнограмм представлен на рис.7. Значения по оси

абсцисс соответствуют 11 значениям спектральной ширины, а значения по оси ординат – проценту совпадений обнаружения волны-убийцы в результате обработки вычислительных экспериментов и в результате обработки волнограмм.

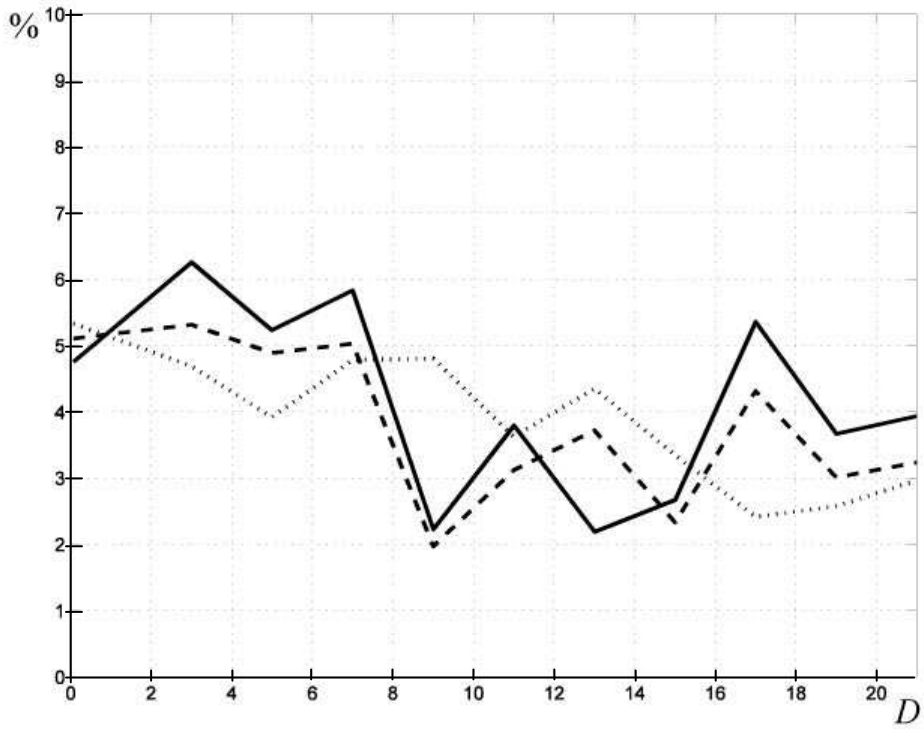

Рис.7. Процент совпадения обнаружения волны-убийцы в результате обработки вычислительных экспериментов и в результате обработки волнограмм.

Мы видим, что вероятность обнаружения волн-убийц по волнограмме оказывается равной 2–6 % в случае наших опытов. При этом использовалась непрерывная запись волнограммы. В реальных экспериментах, как правило, датчики работают с определенной частотой, которая может весьма существенно изменить возможность обнаружения волн-убийц. Сравним теперь результаты обнаружения волн-убийц в вычислительных экспериментах и по прореженным волнограммам (см. таблицу). Будем использовать волнограммы с десятикратным прореживанием (верхняя строчка – дисперсия D).

μ^2	0.07	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
$2.06\cdot10^{-3}$	0.35	1.36	1.00	0.65	0.37	0.67	0	0	1.07	1.41	1.57
$3.08\cdot10^{-3}$	0.10	0.39	0.33	1.23	0.33	0.60	0.30	0.21	0.42	0	0.81
$4.10\cdot10^{-3}$	0.19	1.18	0.45	0.65	0.28	0.75	0.93	0	0.48	0	0

Мы видим, что вероятность обнаружения волн-убийц по прореженным волнограммам редко превышает 1 %.

Таким образом, обнаружение волн-убийц только по волнограммам приводит к существенно искаженным результатам. Отметим, что Специальным конструкторским бюро автоматизации морских явлений ДВО РАН и Институтом морской геологии и геофизики ДВО РАН, начиная с 2009 г., проводятся серии натурных экспериментов на мысах зал. Анива. Измерения осуществляются с помощью автономных донных регистраторов гидростатического давления, изготовленных в КБ г. Углич. Описание прибора и проводимых экспериментов можно найти в работе [23]. При их проведении было обнаружено возникновение волн-убийц. Однако частота их появления оказывалась значительно

меньшей, чем это предсказывается теорией. Одним из объяснений такого расхождения является тот факт, что в данных экспериментах волны-убийцы обнаруживались по волнограммам. Как было показано выше, при этом удается распознать лишь небольшую часть волн-убийц. В настоящее время ведутся разработки по модификации методики проведения натурных экспериментов.

***

В данной статье рассмотрены методы обнаружения и предсказания волн-убийц на основании вычислительных экспериментов. Основной вывод, который можно сделать состоит в том, что возникновение волн-убийц, носит стохастических характер. Это совпадает с выводами других авторов. Следовательно, для построения методов прогноза возникновения волн-убийц необходимо использовать методы, основанные на теории случайных процессов и имитационного моделирования. Результаты исследований волн-убийц на основе анализа волнограмм показывают, что имитационное моделирование натурных экспериментов приводит к значительному искажению статистики волн-убийц.

Авторы благодарят акад. В.Е.Захарова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НШ-7550.2006.2 и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН «Математические методы в нелинейной динамике», а также гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования (договор № 11.G34.31.0035 от 25 ноября 2010 г. между Минобрнауки РФ, НГУ и ведущим ученым).

Литература

1. *Kharif C., Pelinovsky E., Slunyaev A.* Rogue Waves in the Ocean. Springer, 2009. 216 p.
2. *Henderson K.L., Pelegrine D.H., Dold J.W.* Unsteady water wave modulations: fully nonlinear solutions and comparison with the nonlinear Schrodinger equation // Wave Motion. 1999. V.29. P.341–361.
3. *Baterman W.J.D., Swan C., Taylor P.H.* On the efficient numerical simulation of directionally spread surface water waves // J. comput. Physics. 2001. V.174. P.277–305.
4. *Chalikov D.* Freak waves: Their occurrence and probability // Phys. Fluids. 2009. V.21. Issue 7. P.076602-1–076602-18.
5. *Dyachenko A.I., Zakharov V.E.* On the Formation of Freak Waves on the Surface of Deep Water // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т.88, № 5. С.356–359.
6. *Захаров В.Е., Шамин Р.В.* О вероятности возникновения волн-убийц // Письма в ЖЭТФ. 2010. Т.91, вып.2. С.68–71.
7. *Бухановский А.В., Лопатухин Л.И., Рожков В.А.* Физика и статистика необычных морских ветровых волн // Изв. Рус. геогр. об-ва. 2005. Т.137, вып.6. С.19–28.
8. *Lopatoukhin L.J., Boukhanovhky A.V.* Freak wave generation and their probability // Int. Shipbuild. Progr. 2004. V.51, N 2/3. P.157–171.
9. *Дивинский Б.В., Левин Б.В., Лопатухин Л.И., Пелиновский Е.Н., Слюняев А.В.* Аномально высокая волна в Черном море: наблюдения и моделирование // ДАН. 2004. Т.395, № 5. С.690–695.
10. *Whitney J. C.* The numerical solution of unsteady free-surface flows by conformal mapping // Proc. Second Inter. Conf. on Numer. Fluid Dynamics (ed. M.Holt). Springer–Verlag, 1971. P.458–462.
11. *Овсяников Л.В.* К обоснованию теории мелкой воды // Динамика сплошной среды: сб. науч. тр. АН СССР, СО, Ин-т гидродинамики. Новосибирск, 1973. Вып.15. С.104–125.
12. *Дьяченко А.И.* О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью // ДАН. 2001. Т.376, № 1. С.27–29.
13. *Chalikov D., Sheinin D.* Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface // J. Comp. Phys. 2005. V.210. P.247–273.
14. *Ruban V.P.* Water waves over a time-dependent bottom: Exact description for 2D potential flows // Phys. Let. A. 2005. V.340, N 1–4. P.194–200.
15. *Zakharov V.E., Dyachenko A.I., Vasilyev O.A.* New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface // Eur. J.~Mech. B Fluids. 2002. V.21. P.283–291.
16. *Шамин Р.В.* Описание динамики волн на воде на основе дифференциальных включений // ДАН. 2011. Т.438, № 4. С.453–455.

17. *Шамин Р.В.* Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью // Сиб. журн. вычисл. мат. 2006. Т.9, № 4. С.379–389.
18. *Шамин Р.В.* К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши–Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Совр. математика. Фунд. направления. 2007. Т.21. С.133–148.
19. *Шамин Р.В.* Вычислительные эксперименты в моделировании поверхностных волн в океане. М.: Наука, 2008. 133 с.
20. *Шамин Р.В.* Динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных // Совр. математика. Фунд. направления. 2008. Т.28. С.3–144.
21. *Шамин Р.В.* Поверхностные волны на воде минимальной гладкости // Там же. 2010. Т.35. С.126–140.
22. *Чаликов Д.В.* Статистика экстремальных ветровых волн // Фунд. и прикл. гидрофизика. 2009. Т.5, вып.3. С.4–24.
23. *Зайцев А.И., Малашенко А.Е., Пелиновский Е.Н.* Аномально большие волны вблизи Южного побережья о.Сахалин // Там же. 2011. Т.4, № 4. С.35–42.

Статья поступила в редакцию 24.01.2012 г.