

УДК 519.6, 551.46

© *Е.В.Мортиков*, 2012

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт океанологии им. П.П.Ширшова РАН, г.Москва

Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ им. М.В.Ломоносова, г.Москва
evgeny.mortikov@gmail.com

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ СТРАТИФИКАЦИИ НА СИЛУ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЛЕДЯНОГО КИЛЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

В работе рассматривается численное моделирование движения ледяного киля в двухслойной жидкости. Для описания нестационарной геометрии области на прямоугольных сетках используется метод погруженной границы. Приводятся результаты расчета силы сопротивления для различных значений чисел Фруда в сравнении с данными лабораторных экспериментов.

Ключевые слова: морской лед, двухслойная жидкость, коэффициент лобового сопротивления, метод погруженной границы, графические процессоры.

Одним из параметров, необходимых для численного моделирования динамики морского льда, является коэффициент сопротивления для действия ветра и течения жидкости, определяемый геометрическими характеристиками поверхности льда и динамикой пограничного слоя [1]. Важная особенность, которую необходимо учитывать при параметризации силы действия течения на лед, связана с тем, что высота пограничного слоя сравнима с характерной высотой неоднородностей нижней поверхности льда. Таким образом, влияние геометрии поверхности более существенно для океана, чем для атмосферы, где высота пограничного слоя значительно больше [2].

Данные наблюдений [3–5] свидетельствуют о том, что подводная часть ледяного покрова имеет достаточно сложную структуру и является, в том числе, источником генерации внутренних волн. Характерная черта поверхности – наличие ледяных килей, достигающих в высоту до 35 м [1] при поперечном размере порядка 100 м [6], формирующихся в результате процессов сжатия при вертикальном смещении льда.

Силу сопротивления для системы лед–океан можно разделить на три компоненты [7]: лобовое сопротивление боковой поверхности, сопротивление ледового киля и поверхностное трение для подводной поверхности льда. Современные параметризации [7], как правило, не учитывают стратификацию и пренебрегают влиянием внутренних волн. Однако лабораторные эксперименты [6] и численные расчеты [8, 9] показывают, что данные процессы существенно влияют на коэффициент сопротивления глубоких ледовых килей. Структура течения в пограничном слое также зависит от внутренних волн, а действие волн на возмущенное килем течение может изменять динамику формирования льда в зимний период за счет турбулентного перемешивания [10]. Отметим, что при оценке поверхностного трения также требуется учитывать влияние соседних килей на течение [7].

Цель настоящей работы – выделить влияние стратификации на сопротивление потока движению ледяного киля в жидкости. При этом основное внимание уделяется воспроизведению условий по числу Фруда при дрейфе льда. В качестве стратифицирован-

ной жидкости рассматривается двухслойная система. Несмотря на то что такой подход не позволяет воспроизвести все важные волновые процессы, характерные для непрерывно стратифицированных потоков, он представляет удобный способ классификации эффектов течения и влияния потока на коэффициент лобового сопротивления.

Параметры среды, определяющие число Фруда, и скорость передвижения ледяного киля выбирались на основе серии полевых измерений в море Бофорта [11] и лабораторных экспериментов [6]. Число Фруда для данного района Арктики может достигать 0.7 при скоростях льда, достигающих 25 см/с.

Лабораторные эксперименты [6] и численные оценки на основе конечно-разностного метода решения двумерных уравнений Эйлера [8, 9] проводились для двумерных профилей киля с учетом указанных условий. Анализ результатов численных расчетов [8] показывает [9], что неточная аппроксимация криволинейной геометрии киля приводит к генерации фиктивной завихренности у границы и появлению области отрыва потока, что тем не менее улучшает согласованность рассчитанных характеристик течения с данными экспериментов. Отметим, что в расчетах [8, 9] рассматривался заданный поток вокруг неподвижной модели ледяного киля.

Численное моделирование течения вокруг подвижного киля на основе вихреразрешающей модели турбулентности приводится в работе [10]. Система уравнений рассматривается в системе координат, фиксированной относительно киля, а для описания геометрии используется метод ступенчатого представления границы. Грубое представление границы приводит к появлению шума и возможным ошибкам при аппроксимации подсеточных процессов. Отмечается, что построение дискретизации на прямоугольных сетках в вихреразрешающих моделях, для которых требуется явная фильтрация, является более предпочтительным, поскольку криволинейные сетки, основанные на преобразовании координат, согласованных с формой поверхности киля, могут нарушать принятые параметризации турбулентных процессов.

В настоящей работе для аппроксимации криволинейной границы ледяного киля используется метод погруженной границы [12, 13]. Основная идея состоит в модификации системы уравнений или численной схемы для повышения порядка аппроксимации по сравнению с методом ступенчатого представления границы. При этом сохраняется возможность дискретизации уравнений на простых прямоугольных сетках. Важным для точности аппроксимации геометрии области в методе погруженной границы являются способы интерполяции/экстраполяции значений в точках криволинейной границы, чем и объясняется большое разнообразие в существующих модификациях данного подхода [14–19]. Методика не зависит от конкретной геометрии области и не требует разработки сложных алгоритмов покрытия области криволинейными сетками, что делает ее более привлекательной для реализации на параллельных вычислительных системах и численного решения задач в областях с нестационарной геометрией.

Численный метод. Систему уравнений, описывающую течение вязкой двухслойной жидкости в приближении Буссинеска в области Ω , соответствующую параллелепипеду с границей Γ , включающую область Ω_K с погруженной границей Γ_K ($\bar{\Omega}_K \equiv \Omega_K \cup \Gamma_K \in \bar{\Omega} \equiv \Omega \cup \Gamma$), можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p - \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0} g \mathbf{e}_z + \mathbf{f}_u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \tilde{\rho} = \kappa \nabla^2 \tilde{\rho} + f_\rho, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{u} = (u, v, w)$ – вектор скорости, p – давление, $\tilde{\rho}$ – отклонение плотности от средней величины ρ_0 , ν – кинематическая вязкость, g – ускорение свободного падения, $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор по координате z . Вектор $\mathbf{f}_u$ и функция f_p – добавочные функции для аппроксимации краевых условий на криволинейной границе Γ_K методом погруженной границы. Уравнения (1)–(3) дополняются начальными и краевыми условиями на вектор скорости $\hat{\mathbf{u}}$ и отклонение плотности $\tilde{\rho}$. На погруженной границе задается условие Дирихле:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\Gamma_K} = \mathbf{U}_K(t). \quad (4)$$

Подробный вид краевых условий приводится далее при описании вычислительных экспериментов.

Численный метод решения системы (1)–(3) основан на дискретизации системы на прямоугольной сетке Ω_h с разнесенным способом размещения потоковых переменных (компоненты вектора скорости определяются на гранях ячеек, скалярные величины в центре ячеек). Рассматриваются сетки с неравномерным шагом для повышения пространственного разрешения вблизи границы Γ_K . Метод дробных шагов [20–22] используется для интегрирования уравнения движения (1) по времени с учетом уравнения неразрывности (3). На первом шаге определяется промежуточное поле скорости $\hat{\mathbf{u}}$:

$$\frac{\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} = (\nu \nabla^2 \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p^n - \frac{\tilde{\rho}^n}{\rho_0} g \mathbf{e}_z + \mathbf{f}_u^{n+1}, \quad (5)$$

где Δt – шаг по времени. Для аппроксимации нелинейного слагаемого $(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}}$ и оператора диффузии $(\nu \nabla^2 \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}}$ используется явная схема Адамса–Бэшфорта второго порядка: $\chi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\chi^n - \frac{1}{2}\chi^{n-1}$. Проекция вектора $\hat{\mathbf{u}}$ в подпространство соленоидальных векторов ($\forall \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}): \mathbf{v} = \mathbf{u} + \nabla \psi$, при этом $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ и слагаемые ортогональны: $(\mathbf{u}, \nabla \psi) = 0$) приводит к уравнению Пуассона для поправки к давлению ϕ^{n+1} :

$$\Delta \phi^{n+1} = \frac{\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}}{\Delta t}. \quad (6)$$

Тогда значения вектора скорости и давления на новом шаге по времени находятся следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1} &= \hat{\mathbf{u}} - \Delta t \nabla \phi^{n+1}, \\ p^{n+1} &= p^n + \rho_0 \phi^{n+1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Дискретизация адвекции на сетке Ω_h – консервативная кососимметрическая форма второго порядка [23], оператор диффузии аппроксимируется схемой центральных разностей.

Уравнение Пуассона для поправки к давлению, обеспечивающее выполнение условия неразрывности для скорости (6), численно решается предобусловленным стабилизированным методом бисопряженных градиентов [24], где в качестве предобусловливателя используется геометрический многосеточный метод с V-циклом [25, 26].

Для интегрирования уравнения (2) по времени используется схема Рунге–Кутты 2-го порядка:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}' &= \tilde{\rho}^n + \Delta t \Phi(\tilde{\rho}^n), \\ \tilde{\rho}^{n+1} &= \frac{1}{2}(\tilde{\rho}^n + \tilde{\rho}') + \frac{\Delta t}{2} \Phi(\tilde{\rho}'),\end{aligned}$$

где $\Phi(\rho) \equiv -(\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla)\rho + \kappa \nabla^2 \rho + f_\rho^{n+1}$, вектор скорости $\mathbf{u}^{n+1}$ определяется из решений (5)–(7). Схема центральных разностей применяется для дискретизации диффузии, адвекция поля плотности аппроксимируется схемой WENO 5-го порядка, что позволяет воспроизводить смещение границы раздела в двухслойной жидкости с учетом скачка в поле отклонения плотности $\tilde{\rho}$. Основная идея данной схемы состоит в выборе шаблона в зависимости от гладкости решения, а именно построении линейной комбинации аппроксимаций низкого порядка с нелинейными весами [27, 28].

Требование выполнения условий (4) на погруженной границе обеспечивается за счет добавления функции $\mathbf{f}_u(\mathbf{x}, t)$ в уравнение движения. Поверхность Γ_K представляется набором из N_K треугольников и набором точек $\mathbf{X}_i, i=1 \dots N_K$ – геометрических центров построенной триангуляции, в которых определяется условие (4): $\mathbf{u}(\mathbf{X}_i, t)|_{\Gamma_K} = \mathbf{U}_K(t), i=1 \dots N_K$. На заданной прямоугольной сетке Ω_h определяются оператор интерполяции L сеточной функции в точки границы Γ_K и оператор проектирования L^* в узлы сетки по значениям в точках $\mathbf{X}_i, i=1 \dots N_K$:

$$F = Lf : F_i = \sum_{j \in \Omega_h} f_j D(\mathbf{x}_j - \mathbf{X}_i) \Delta V_j, 1 \leq i \leq N_K, \quad (8)$$

$$f = L^*F : f_j = \sum_{i=1}^{N_K} F_i D(\mathbf{x}_j - \mathbf{X}_i) \Delta s_i, j \in \Omega_h, \quad (9)$$

где F_i – значения в точке $\mathbf{X}_i$ погруженной границы Γ_K , Δs_i – площадь связанного с точкой $\mathbf{X}_i$ элемента триангуляции, f_j – значения в ячейке сетки Ω_h объема ΔV_j и центром в точке $\mathbf{x}_j$. Функция $D(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$, определяется как сеточная аппроксимация дельта-функции на Ω_h .

Для определения добавочной функции $\mathbf{f}_u(\mathbf{x}, t)$ вычисление промежуточного поля скорости $\tilde{\mathbf{u}}$ (5) разделяется на несколько шагов:

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} &= (\nu \nabla^2 \mathbf{u})^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p^n - \frac{\tilde{\rho}^n}{\rho_0} g \mathbf{e}_z, \\ \frac{\hat{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} &= \mathbf{f}_u^{n+1}(\mathbf{x}, t^{n+1}) \equiv L^* \mathbf{F}_u^{n+1}(\mathbf{X}_i, t^{n+1}).\end{aligned} \quad (10)$$

Применение оператора интерполяции (8) к соотношению (10) приводит к системе уравнений для значений в точках на погруженных границах:

$$\frac{L\hat{\mathbf{u}} - L\tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} = L\mathbf{f}_u^{n+1} \equiv LL^* \mathbf{F}_u^{n+1}(\mathbf{X}_i, t^{n+1}) \equiv A_K \mathbf{F}_u^{n+1}(\mathbf{X}_i, t^{n+1}),$$

где A_K – квадратная матрица с числом строк (столбцов) N_K , структура, которой зависит от распределения набора точек $\mathbf{X}_i$ погруженной границы на фиксированной сетке Ω_h и выбора аппроксимации дельта-функции в определении операторов (8), (9). Значения по-

для $L\hat{\mathbf{u}}$ скорости в точках $\mathbf{X}_i \in \Gamma_K$ заменяются известными граничными условиями (4) $\mathbf{U}_K(t^{n+1})$ для скорости на $(n+1)$ -м шаге по времени. Таким образом, вычисление неизвестной функции $\mathbf{f}_u^{n+1}(\mathbf{x}, t^{n+1})$ сводится к решению системы линейных уравнений с матрицей A_K относительно $\mathbf{F}_u^{n+1}(\mathbf{X}_i, t^{n+1})$ с известной правой частью и нахождения добавочной функции к промежуточному полю скорости применением оператора L^* к полученному решению:

$$\frac{\mathbf{U}_K(t^{n+1}) - L\tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} = A_b \mathbf{F}_u^{n+1}(\mathbf{X}_i, t^{n+1}), \quad (11)$$

$$\frac{\hat{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} = L^* \mathbf{F}_u^{n+1}(\mathbf{X}_i, t^{n+1}).$$

Существование обратной матрицы A_K следует из отсутствия совпадающих точек в определении погруженных границ. Для решения системы (11) используется метод сопряженных градиентов с предобуславливателем Якоби. Отметим, что при близком расположении точек $\mathbf{X}_i \in \Gamma_K$ относительно шага сетки наблюдаются проблемы с устойчивостью численного метода решения системы (11).

Способ определения добавочной функции приводит к тому, что краевые условия выполняются точно для промежуточного поля скорости $\hat{\mathbf{u}}$ и лишь приближенно для скорости на $(n+1)$ -м шаге по времени, полученной проекцией $\hat{\mathbf{u}}$ (7) на основе ограничения для скорости, выраженного уравнением неразрывности (3). Указанный недостаток наблюдается при совмещении различных вариантов метода погруженной границы [17, 29–31] с проекционными методами [21] интегрирования системы (1), (3). Точность аппроксимации можно повысить проведением нескольких итераций на каждом шаге по времени [17].

Метод погруженной границы легко обобщается для задач со многими погруженными границами (при условии отсутствия пересечений), при этом матрица системы (11) будет иметь блочно-диагональную структуру. При движении Γ_K на фиксированной сетке требуется пересчет операторов интерполяции L (8) и проектирования L^* (9), а также матрицы системы $A_b \equiv LL^*$.

Определение дельта-функции в операторах (8), (9) основано на следующей аппроксимации [19] на сетке с шагом h :

$$D(\mathbf{x} - \mathbf{X}) = \frac{1}{h^3} d\left(\frac{x-X}{h}\right) d\left(\frac{y-Y}{h}\right) d\left(\frac{z-Z}{h}\right), \mathbf{x} \equiv (x, y, z), \mathbf{X} \equiv (X, Y, Z),$$

$$\text{где } d(r) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left(3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2} \right), & 0 \leq |r| \leq 1 \\ \frac{1}{8} \left(5 - 2|r| - \sqrt{-7 + 12|r| - 4r^2} \right), & 1 \leq r \leq 2 \\ 0, & 2 \leq |r| \end{cases} \quad (12)$$

Приведенная формулировка (12) является обоснованной в том случае, если определение операторов (8), (9) приводит к ненулевым коэффициентам только для внутренних узлов сетки. Однако для рассматриваемой задачи допускается возможность пересечения границы Γ_K и границы Γ области Ω , что требует дополнительной модификации (12) с

помощью смещения интерполяции во внутренние узлы сетки при близком (относительно шага сетки) расположении точек погруженной границы и границы области [32].

Модификация основана на определении аппроксимаций как функций вида $D(\mathbf{x}, \mathbf{X})$, т.е. функций двух переменных, сохранении моментов функции (12):

$$\sum_{\substack{s=2m \\ m \in \{0\} \cup \mathbb{Z}^+}} d(r-s) = \sum_{\substack{s=2m+1 \\ m \in \{0\} \cup \mathbb{Z}^+}} d(r-s) = \frac{1}{2}, \quad (13)$$

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}} (r-s) d(r-s) = 0, \quad (14)$$

и выполнения следующего условия для точек вдали от границы области:

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}} (d(r-s))^2 = C \equiv \frac{3}{8}. \quad (15)$$

Тогда аппроксимацию на единичном кубе $[0,1]^3$ можно представить в виде

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = d(x, X) d(y, Y) d(z, Z), \mathbf{x} \equiv (x, y, z), \mathbf{X} \equiv (X, Y, Z),$$

$$\text{где } d(x, X) = \begin{cases} \frac{1}{h} \tilde{d}\left(\frac{x}{h}, \frac{X}{h}\right), & X < \frac{3}{2}h \\ \frac{1}{h} d\left(\frac{x-X}{h}\right), & \frac{3}{2}h \leq X \leq 1 - \frac{3}{2}h \\ \frac{1}{h} \tilde{d}\left(\frac{1-x}{h}, \frac{1-X}{h}\right), & 1 - \frac{3}{2}h < X \end{cases}$$

Коэффициенты разложений (8), (9) для точек вблизи границы можно получить как решение квадратного уравнения, определяемого соотношениями (13)–(15) при условии фиксированного числа узлов сетки, выбранного для интерполяции [32].

Несмотря на приемлемые результаты, полученные для задач воспроизведения течений со стационарными границами, применение метода погруженной границы в задачах с неоднородными условиями (4) ($U_K(t) \neq 0$) приводит к появлению фиктивных осцилляций в интегральных характеристиках течения. Важно отметить, что данные осцилляции значительно уменьшаются при увеличении сеточного разрешения при постоянном числе Куранта [33]. В работе [34] предлагается преобразование $d(r)$ (12), что позволяет повысить порядок гладкости и обеспечить выполнение сохранения моментов высших порядков вида (13), (14) данных функций, что приводит к существенному уменьшению амплитуды осцилляций на заданной сетке.

Программная реализация. Для расчетов использовались программные реализации численного метода на архитектуре центрального процессора с помощью функций библиотеки MPI и реализация для графических процессоров, где для организации вычислений применялась технология программирования CUDA. Расчеты проводились на суперкомпьютере СКИФ МГУ «Чебышёв» (Intel Xeon 5472) и суперкомпьютере «ГрафИТ!/GraphIT!» на основе графических процессоров (Intel Xeon X5650, Nvidia «Fermi» Tesla M2050). Особенности реализации численного метода для графических процессоров рассмотрены в статье [14].

Численные эксперименты. Параметры среды, конфигурация вычислительной области и геометрия модели ледяного кия выбирались на основе лабораторных экспериментов [6]. Число Фруда можно определить следующим образом:

$$F_0 = \frac{U_0}{c_0}, \quad (16)$$

где U_0 – скорость потока вверх по течению, $c_0^2 = g' h_0$ – фазовая скорость. Характеристическая глубина h_0 и приведенное ускорение свободного падения g' задаются с помощью глубины невозмущенного верхнего и нижнего слоев d_1 и d_2 с плотностями ρ_1 и ρ_2 соответственно:

$$h_0 = \frac{d_1 d_2}{(d_1 + d_2)},$$

$$g' = g(\rho_2 - \rho_1) / \rho_0,$$

где ρ_0 – характеристическая плотность. Рассматривались значения числа Фруда из интервала $0.1 \leq F_0 \leq 1.7$, что соответствует скоростям U_0 от единицы до 24 см/с.

Поле плотности для случая двухслойной стратификации предполагалось заданным в виде

$$\bar{\rho}(z) = \begin{cases} \rho_2, & 0 \leq z \leq d_2 - \delta, \\ \rho_2 - \Delta\rho \frac{(z - d_2 + \delta)}{2\delta}, & d_2 - \delta < z < d_2 + \delta, \\ \rho_1, & d_2 + \delta \leq z \leq d_1 + d_2. \end{cases}$$

Толщина промежуточного слоя 2δ выбиралась равной 1 см [6, 9].

Профиль ледяного кия по оси x определяется как функция вида

$$Z_K(x) = \frac{HB^2}{B^2 + x^2} - C, \quad (17)$$

где $H = 6.6$ см, $B = 8.5$ см, $C = 1.1$ см. В поперечном направлении, по оси y , профиль модели не изменяется.

Численные расчеты проводились для двух задач: обтекание неподвижной поверхности (17) заданным потоком и воспроизведение возмущения среды при движении ледяного кия. Первая часть расчетов допускает возможность увеличения разрешения вблизи модели кия и использовалась для оценки влияния разрешения и размера области на силу сопротивления и форму внутренних волн; определения времени интегрирования, достаточного для установления квазистационарного режима и интервала осреднения для вычисления силы сопротивления. На западной части границы Γ , $x \equiv \text{const}$, задавался профиль скорости, на противоположной – условия излучения вида [35]

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + C_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,$$

где ϕ – потоковая переменная системы уравнений (1)–(3). По оси y рассматривались периодические краевые условия, на поверхности ледяного кия требовалось выполнение условия прилипания.

Вторая часть расчетов состояла в численном воспроизведении среды при движении ледяного кия в периодической по осям x и y области, определяемого условием

$$U_K(t) = - \begin{cases} U_0 t / T_a, & 0 \leq t \leq T_a \\ U_0, & t > T_a \end{cases}.$$

Разрешение области выбиралось на основе проведенных расчетов для неподвижного кия и условий на шаг и анизотропность сетки, приведенных в работе [36]. Максимальное число узлов сетки в расчетах составило около 250 млн.

Схема вычислительной области при масштабировании по глубине верхнего слоя d_1 и направление координатных осей представлены на рис.1.

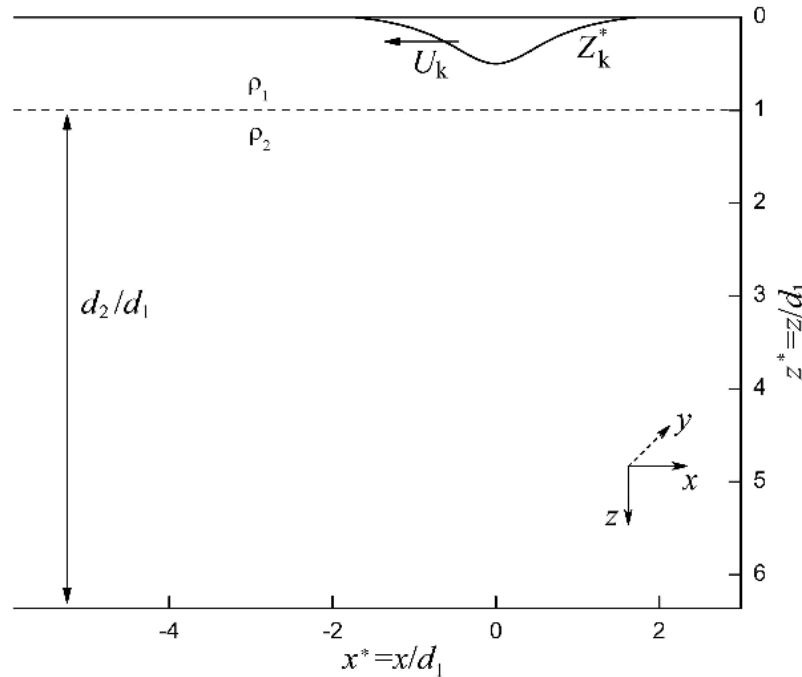


Рис.1. Конфигурация вычислительной области.

На рис.2 приведены результаты расчета (светлые кружки) силы сопротивления при движении ледяного кия в однородной жидкости и сравнение с данными лабораторных экспериментов (темные кружки) [6]. Движение кия приводит к появлению области отрыва потока; при этом сила сопротивления квадратично зависит от скорости, что соответствует коэффициенту лобового сопротивления $C_D \sim 0.62$ [6]. При отсутствии стратификации структура потока, связанная с отрывом течения, нечувствительна к числу Рейнольдса.

На рис.3 представлены значения силы сопротивления при различных скоростях движения кия U_0 для случая стратифицированной жидкости. Дополнительно, приведена ось, содержащая значения чисел Фруда F_0 согласно соотношению (25). Временной ряд для смещения границы раздела при числах Фруда $F_0 = 0.58, 0.72$ и 1.08 приведен на рис.4. Ордината описывает отклонение интерфейса от положения равновесия $z \equiv d_1$ в точке $x_C = x_K^0 - L_C$, где x_K^0 – начальное положение кия (определяемое как значение x , при котором $Z_K \equiv \max$), L_C – расстояние, равное 340 см. Расчетное время, отложенное по оси абсцисс $t' = (x_K - x_C) / U_K$, определяется через координату $x_K \equiv x_K(t)$ текущего положения модели при движении со скоростью U_K .

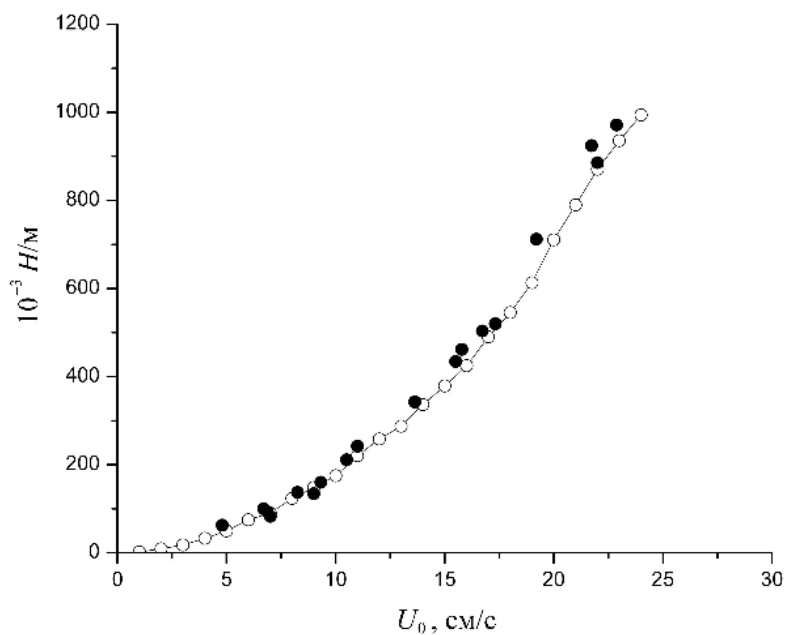


Рис.2. Значение силы сопротивления на единицу длины при движении модели ледяного киля для однородной жидкости. Условные обозначения те же, что на рис.1 (объяснения в тексте).

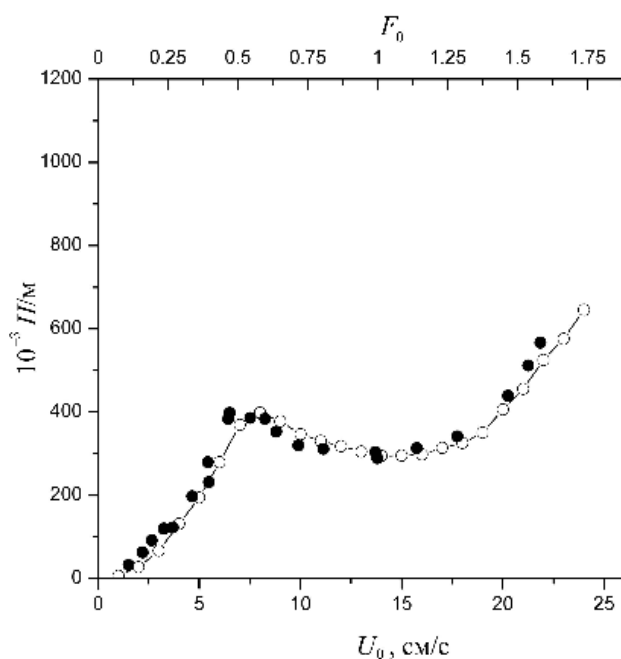


Рис.3. Значение силы сопротивления на единицу длины при движении модели ледяного киля, для стратифицированной жидкости. Условные обозначения те же, что на рис.1 (объяснения в тексте).

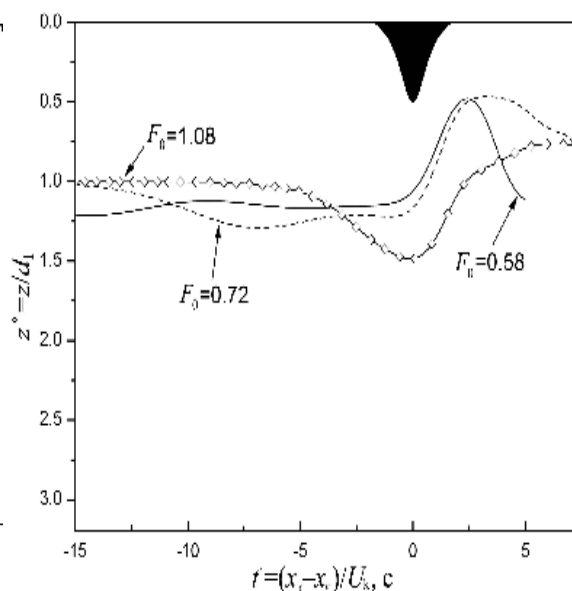


Рис.4. Временной ряд смещения границы раздела в зависимости от числа Фруда F_0 в точке x_c , расположенной на расстоянии 340 см по направлению движения от начального положения киля.

Структура течения, полученная при численном моделировании, в целом согласуется с данными лабораторных экспериментов [6]. Сила сопротивления в двухслойной жидкости соответствует следующей зависимости от скорости движения ледяного киля: резкое увеличение при скорости, соответствующей числу Фруда $F_0 \approx 0.1$, локальный максимум при $F_0 \approx 0.5-0.6$, следующим за ним минимумом, и дальнейшее монотонное увеличение при сверхкритических условиях. Начальный рост силы сопротивления соответствует распространению волнового возмущения впереди препятствия и образованию перехода границы в виде прыжка на задней стороне киля. Дальнейшее увеличение скорости приводит к увеличению сопротивления и нарастанию амплитуды волнового возмущения, дополни-

тельно увеличивая асимметричность границы раздела. Вблизи локального максимума волновое возмущение на подветренной стороне сдвигается вниз по течению, при этом полностью подавляется отрыв потока. Данный эффект также выражается в увеличении среднеквадратичного отклонения для временного ряда силы сопротивления, при первоначальном увеличении скорости и резком уменьшении для точки максимума.

Общая структура течения сохраняется до чисел Фруда $F_0 \approx 0.8$, что соответствует появлению частично захваченной волны и образованию области отрыва потока на задней стороне. Для значений числа Фруда $F_0 \approx 1.0$, близких к резонансу, граница раздела принимает форму уединенной волны, частично или полностью захваченной препятствием. Здесь течение может быть нестационарным, с большим временем установления. При сверхкритических условиях наблюдается монотонное увеличение силы сопротивления при увеличении скорости движения. Тем не менее наличие границы раздела частично подавляет отрыв потока, что выражается в уменьшении силы сопротивления по сравнению со случаем однородной жидкости (см.рис.2).

Результаты численных расчетов показывают возможность достоверной оценки силы сопротивления при движении модели ледяного кия в двухслойной стратифицированной жидкости. Для рассмотренных условий стратификация оказывает существенное воздействие как на силу сопротивления, так и на характер течения вблизи препятствия. При этом аналитические модели, как правило, недостаточно достоверно описывают структуру потока вблизи кия для точного расчета силы сопротивления [6].

Структура верхней части Арктического океана, форма подледной поверхности предполагают наличие широкого спектра внутренних волн. Стратификация жидкости приводит к тому, что сила лобового сопротивления для глубоких ледовых килей может составлять наиболее значительную часть коэффициента сопротивления ледового покрова при моделировании динамики морского льда. Необходимость оценки потока стратифицированной жидкости для данной задачи также связана с влиянием на процессы перемешивания тепла и солей на значительных глубинах.

Несмотря на существенный поперечный размер ледяных килей, данные наблюдений свидетельствуют о возможно значимой изменчивости по высоте [11], приводящей к изменению влияния волновых эффектов вдоль поверхности. Интересной задачей представляется применение рассмотренных численных подходов при оценке силы сопротивления для моделей ледяных килей различной геометрии.

Литература

1. *Lepparanta M.* The drift of sea ice. Berlin: Springer, 2005.
2. *Steiner N.* Introduction of variable drag coefficients into sea-ice models // *Ann. Glaciol.* 2001. V.33, N 1. P.181–186.
3. *Williams E., Swithinbank C., Robin G. De Q.* A submarine sonar study of Arctic pack ice // *J. Glaciol.* 1975. V.15, N 73. P.349–362.
4. *Wadhams P.* Sea ice thickness distribution in Fram Strait // *Nature.* 1983. V.305, N 5930. P.108–111.
5. *Morison J.H., McPhee M.G., Maykut G.A.* Boundary layer, upper ocean and ice observations in the Greenland Sea Marginal Ice Zone // *J. Geophys. Res.* 1987. V.92, N C7. P.6987–7011.
6. *Pite H.D., Topham D.R., van Hardenberg B.J.* Laboratory measurements of the drag force on a family of two-dimensional ice keel models in a two-layer flow // *J. Phys. Oceanogr.* 1995. V.25, N 12. P.3008–3031.
7. *Lu P., Li Z., Cheng B., Lepparanta M.* A parameterization of the ice-ocean drag coefficient // *J. Geophys. Res.* 2011. V.116, N C7. P.19–33.
8. *Jameel M.I., Rowe R.D., Topham D.R.* Stratified flow under an ice keel – a numerical approach // *Int. J. Numer. Meth. Fluids.* 1993. V.16, N 5. P.353–364.

9. Cummins P.F., Topham D.R., Pite H.D. Simulated and experimental two-layer flows past isolated two-dimensional obstacles // *Fluid Dyn. Res.* 1994. V.14, N 3. P.105–119.
10. Skillingstad E.D., Paulson C.A., Pegau W.S., McPhee M.G., Stanton T. Effects of keels on ice bottom turbulence exchange // *J. Geophys. Res.* 2003. V.108, N C12. P.3372–3387.
11. Topham D.R., Pite H.D., Johnston P.J., Richards D.L. Stratified flows generated by an arctic ice keel // *Preprints of Third Int. Symp. On Stratified Flows, ASCE.* 1987. P.975–984.
12. Su S.W., Lai M.C., Lin C.A. An immersed boundary technique for simulating complex flows with rigid boundary // *Computers and Fluids.* 2007. V.36, N 2. P.313–324.
13. Мортиков Е.В. Применение графических процессоров для численного моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости в областях сложной конфигурации методом погруженной границы // *Вычислительные методы и программирование.* 2012. Т.13, № 1. С.177–191.
14. Mittal R., Iaccarino G. Immersed boundary methods // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2005. V.37. P.239–261
15. Tseng Y.-H., Ferziger J.H. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry // *J. of Comp. Phys.* 2003. V.192, N 2. P.593–623.
16. Mohd Yusof J. Combined immersed boundary/B-spline methods for simulation of flow in complex geometries // *CTR Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research. Stanford: Stanford University Press,* 1997. P.317–328.
17. Fadlun E.A., Verzicco R., Orlandi P., Mohd-Yusof J. Combined immersed-boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations // *J. of Comp. Phys.* 2000. V.161, N 1. P.35–60.
18. Balaras E. Modeling complex boundaries using an external force field on fixed Cartesian grids in large-eddy simulations // *Computers and Fluids.* 2004. V.33, N 3. P.375–404.
19. Peskin C.S. The immersed boundary method // *Acta Numerica.* V.11. P.479–517.
20. Chorin A.J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations // *Mathematics of Computation.* 1968. V.22, N 104. P.745–762.
21. Brown D.L., Cortez R., Minion M.L. Accurate projection method for the incompressible Navier-Stokes equations // *J. of Comp. Phys.* 2001. V.168, N 2. P.464–499.
22. Kim J., Moin P. Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations // *J. of Comp. Phys.* 1985. V.59, N 2. P.308–323.
23. Morinishi Y., Lund T.S., Vasilyev O.V., Moin P. Fully conservative higher order finite-difference schemes for incompressible flow // *J. of Comp. Phys.* 1998. V.143, N 1. P.90–124.
24. Van der Vorst H.A. Iterative Krylov methods for large linear systems. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
25. Wesseling P. An introduction to multigrid methods. New York: Wiley, 1992.
26. Ольшанский М.А. Лекции и упражнения по многосеточным методам. М.: Изд-во МГУ, 2003.
27. Liu X.-D., Osher S.J., Sethian J.A. Computing interface motion in compressible gasdynamics // *J. of Comp. Phys.* 1992. V.100, N 2. P.209–228.
28. Jiang G.-S. Peng D. Weighted ENO schemes for Hamiltonian-Jacobi equations // *SIAM J. Sci. Comput.* 1997. V.21. P.2126–2143.
29. Pourquie M., Breugem W.P., Boersma B.J. Some issues related to the use of immersed boundary methods to represent square obstacles // *Int. J. for Multiscale Computational Engineering.* 2009. V.7, N 6. P.509–522.
30. Domenichini F. On the consistency of the direct forcing method in the fractional step solution of the Navier-Stokes equations // *J. of Comp. Phys.* 2008. V.227, N 12. P.6372–6384.
31. Guy R.D., Hartenstine D.A. On the accuracy of direct forcing immersed boundary methods with projection methods // *J. of Comp. Phys.* 2010. V.229, N 7. P.2479–2496.
32. Griffith B.E., Luo X., McQueen D.M., Peskin C.S. Simulating the fluid dynamics of natural and prosthetic heart valves using the immersed boundary method // *Int. J. of Applied Mechanics.* 2009. V.1, N 1. P.137–177.
33. Seo J.H., Mittal R. A sharp-interface immersed boundary method with improved mass conservation and reduced spurious pressure oscillations // *J. of Comp. Phys.* 2011. V.230, N 11. P.7347–7363.
34. Yang X., Zhang X., Li Z., He G.W. A smoothing technique for discrete delta functions with application to immersed boundary method in moving boundary simulations // *J. of Comp. Phys.* 2009. V.228, N 20. P.7821–7836.
35. Miller M.J., Thorpe A.J. Radiation conditions for the lateral boundaries of limited-area numerical methods // *Quart. J.R. Met. Soc.* 1981. V.107, N 453. P.615–628.
36. Breuer M., Peller N., Rapp Ch., Manhart M. Flow over periodic hills – Numerical and experimental study in a wide range of Reynolds numbers // *Computers and Fluids.* 2009. V.38, N 2. P.433–457.

Статья поступила в редакцию 23.07.2012 г.

