

УДК 551.468

© Н.Е.Вольцингер¹, А.А.Андросов^{1,2}, 2013

¹Санкт-Петербургский филиал Института океанологии им.П.П.Ширшова РАН

²Институт полярных и морских исследований им.Альфреда Вегнера, Бремерхафен, Германия
voltzin@gk3103.spb.edu

НЕГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ БАРОТРОПНО-БАРОКЛИННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ПРОЛИВЕ С ГОРНЫМ РЕЛЬЕФОМ

Рассматривается негидростатическая краевая задача в трехмерной области, представляющей пролив с выраженным горным рельефом. Задача интегрируется в криволинейных гранично-согласованных координатах на неравномерной сетке. В численном методе используется расщепление по координатным направлениям при обращении трехмерного оператора Лапласа–Бельтрами на каждом шаге по времени с последующим определением бездивергентного поля скорости. Метод применяется для моделирования негидростатического баротропно-бароклинного взаимодействия в Баб-эль-Мандебском проливе Красного моря в зимний период его гидрологического цикла.

Ключевые слова: негидростатика, краевая задача, криволинейные координаты, пролив.

Теория длинноволновых движений основывается на том, что можно пренебречь влиянием вертикальной компоненты ускорения частиц жидкости на давление, т.е. давление в жидкости – гидростатическое. Допустимость закона гидростатики связана с величиной параметра $\varepsilon = H/L$, где H – характерная глубина, L – характерная длина; при малости ε закон гидростатики оказывается нулевым приближением при разложении трехмерных уравнений Эйлера по степеням ε^2 , а первое приближение дает двухмерные гидростатические уравнения – уравнения мелкой воды.

Эти хорошо известные положения справедливы в той мере, в какой характерные масштабы имеют бесспорный смысл. При выраженном изменении рельефа дна возникает ситуация, когда характерные масштабы утрачивают глобальный характер: глубина быстро изменяется, а длина набегающей длинной волны уменьшается. В такой ситуации гидростатическое приближение утрачивает свою высокую точность, и анализ динамики может потребовать использования более полных негидростатических уравнений.

Из рассмотрения уравнения движения по вертикали с масштабом горизонтальной скорости U и частотой плавучести $N = (-g\rho_z/\rho_0)^{1/2}$, где g – гравитационное ускорение, ρ – плотность, ρ_0 – ее отсчетное значение, следует, что вертикальным ускорением частиц жидкости можно пренебречь и давление будет гидростатическим, если

$$\frac{U^2}{L^2 N^2} \ll 1 \quad \text{или} \quad \Gamma = \varepsilon^2 / \text{Ri} \ll 1, \quad (1)$$

где $\text{Ri} = N^2 H^2 / U^2$ – число Ричардсона [1]. При $H = O(10^2 \text{ м})$, $N \approx 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $U \approx 0.5 \text{ м/с}$ критерий гидростатичности давления становится сомнительным уже на длинах волн около 1 км, что вполне отвечает ситуации на горном рельефе. Обоснованность отказа от гидростатики следует непосредственно из оценки вертикальной скорости в кинематическом краевом условии у подножия горы: $w \sim u h_x = u t g \alpha$; уже при умеренном уклоне вер-

тикальная скорость лишь на порядок уступает горизонтальной. В условиях баротропно-бароклинного взаимодействия критерий (1) должен локально нарушаться над подводной горой, когда стратификация размывается, и частота плавучести уменьшается.

Моделирование процессов и явлений на негидростатическом масштабе выполняется на основе численного решения краевых задач для уравнений вязкой несжимаемой жидкости – уравнений Навье–Стокса, имеющих обширную сферу приложений. В океанологии такие задачи характеризуются рядом особенностей, к которым следует отнести сложность геометрии реальной трехмерной области, выраженную стратификацию, наличие свободной поверхности и учет силы Кориолиса.

Негидростатическое моделирование круга явлений геофизической гидродинамики с горизонтальным масштабом от десятков метров до нескольких километров включает конвективные движения, короткие поверхностные волны, внутренние волны, бароклинную неустойчивость и др. [1–6]; сюда относится и рассмотрение гравитационных течений над наклонным дном [7–9]. Эти работы используют аналитические и численные 2-D-решения на декартовой горизонтальной сетке с σ – вертикальным разрешением для выявления особенностей процессов стекания относительно более тяжелой жидкости и перемешивания на идеализированном шельфовом склоне. Выполненная работа относится к этому направлению с акцентом на вычислительный аспект моделирования негидростатической динамики, трансформирующей граничный длинноволновый поток в области подводной горы. С этой целью ставится и численно интегрируется краевая задача для уравнений Навье–Стокса.

В следующем разделе рассматривается постановка негидростатической краевой задачи в произвольной трехмерной области. Уравнения движения и конститuentов плотности приводятся в декартовых координатах, а затем краевая задача формулируется в криволинейных гранично-согласованных координатах, отображающих заданную область на параллелепипед. Далее рассматривается численный метод интегрирования преобразованной задачи, использующий разбиение градиента давления на гидростатическую и динамическую компоненты; метод имеет своим базисным элементом решение гидростатической задачи, подробно представленное в [10]. Структуру метода составляет нахождение на каждом временном шаге градиента динамического давления из решения уравнения Пуассона для оператора Лапласа–Бельтрами, после чего по градиентам динамического давления определяется негидростатический контравариантный вектор бездивергентного поля скорости. Моделируются негидростатическая динамика и гидрология Баб-эль-Мандебского пролива, морфометрическая структура которого содержит выраженные элементы горного рельефа. Решение реализуется на неравномерной криволинейной сетке при взаимодействии гидростатической задачи во всей области и негидростатической – в телескопируемой подобласти Перимской узкости с подводной горой. Переход к интегрированию негидростатической задачи совершается сквозным счетом, не требующим процедуры срачивания. Результаты содержат оценки негидростатических эффектов в норме максимальной разности решений двух задач для полей скорости и плотности и выявляют роль негидростатики в формировании гидрологической структуры, определяемой граничным режимом пролива. Резюмируются положения и результаты работы.

Постановка задачи

Уравнения в декартовых координатах. Пусть невозмущенная поверхность воды совпадает с горизонтальной плоскостью XOY правой декартовой системы координат, ось OZ направлена вертикально вверх. В области $Q_T = Q \times [0, T^*]$, где Q – трехмерная область, ограниченная свободной поверхностью воды $\zeta(x, y; t)$, дном $h(x, y)$ и боковой

поверхностью ∂Q , $Q = \{x, y, z; x, y \in \Omega, -h \leq z \leq \zeta\}$, $0 \leq t \leq T^*$, рассмотрим уравнения движения, неразрывности, конститuentов плотности и состояния морской воды:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + R\nabla p + 2\tilde{\Omega} \times \mathbf{u} = \mathbf{g} + \nabla_2(K\nabla_2\mathbf{u}) + (\mathbf{v}\mathbf{u}_z)_z, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d\Theta_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} v_{\Theta_i} \frac{\partial \Theta_i}{\partial z} + \nabla(K_{\Theta_i} \nabla \Theta_i), \quad (4)$$

$$\rho(x, y, z; t) = \rho(\Theta_i), \quad (5)$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$; $\mathbf{u} = (u, v, w)$ – вектор скорости; $\nabla = (\nabla_2, \partial/\partial z)$; $\nabla_2 = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ – горизонтальный оператор градиента; R – диагональная матрица с элементами $\left(\frac{1}{\rho_0}, \frac{1}{\rho_0}, \frac{1}{\rho}\right)$; ρ – плотность; ρ_0 – ее отсчетное значение; p – давление; $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ – вектор гравитационного ускорения. Для составляющих силы Кориолиса примем: $2\tilde{\Omega} \times \mathbf{u} = (f_\Gamma w - fv, fu, -f_\Gamma u)$, $f_\Gamma = 2\tilde{\Omega} \cos \varphi$ – ее горизонтальная компонента, $f = 2\Omega \sin \varphi$ – вертикальная компонента, $\tilde{\Omega}$ – вектор угловой скорости вращения Земли, φ – широта места; K, v – коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной вязкости, $K_{\Theta_i}, v_{\Theta_i}$ – коэффициенты турбулентной диффузии, $i = 1, 2$; Θ_1 – температура, Θ_2 – соленость.

К системе уравнений (2)–(5) относительно неизвестных $\mathbf{u}, p, \rho, \Theta_i$ следует присоединить турбулентное замыкание для нахождения коэффициентов $v, v_{\Theta_i}, K, K_{\Theta_i}$ и уравнения для определения уровня ζ . Эта компонента решения определяется из вертикально-осредненных уравнений горизонтального движения и уравнения неразрывности.

Редукция уравнения движения по вертикали в (2) к виду

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \quad (6)$$

определяет гидростатическое давление p_Γ . Полагая $\rho = \rho_0 + \rho'$, $\rho' \ll \rho_0$ и интегрируя (6) по вертикали, имеем:

$$p|_{z=\zeta} - p_\Gamma = -g\rho_0(\zeta - z) - g \int_z^\zeta \rho' dz. \quad (7)$$

Примем давление на уровне моря $p|_\zeta = \text{const}$. Из (7) следует, что градиент гидростатического давления является суммой своих баротропного и бароклинного градиентов:

$$\nabla_2 p_\Gamma = g\rho_0 \nabla_2 \zeta + g \nabla_2 \int_z^\zeta \rho' dz. \quad (8)$$

В уравнении движения по вертикали системы (2) преобразуем комбинацию $\gamma = \frac{1}{\rho} p_z + g$. С точностью $O(\rho'^2)$ имеем:

$$\frac{1}{\rho} p_z = \frac{1}{\rho_0} (1 - \rho'/\rho_0) p_z = \frac{1}{\rho_0} p_z + g \rho'/\rho_0; \quad \gamma = \frac{1}{\rho_0} p_z + g \rho/\rho_0.$$

Примем: $p = p_\Gamma + p_D$, p_D – динамическое давление. С учетом (6) получим:

$$\gamma = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} (p_\Gamma + p_D) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} p_\Gamma = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_D}{\partial z}.$$

Запишем уравнение движения (2) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + R \nabla \Pi = \underline{\varphi}, \quad (9)$$

где $\Pi = (p, p, p_D)$, $\underline{\varphi} = -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - 2\tilde{\Omega} \times \mathbf{u} + \nabla_2 (K \nabla_2 \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \mathbf{u}_z)_z$.

Краевая задача в криволинейных координатах. Преобразуем уравнения к криволинейным координатам

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad \sigma = H^{-1}(z - \zeta), \quad t' = t, \quad (10)$$

где $H = h + \zeta$ с якобианом преобразования $J^{-1} = \partial(\xi, \eta, \sigma)/\partial(x, y, z)$, $0 \neq J^{-1} < \infty$, $J = J_* H$, $J_* = \partial(x, y)/\partial(\xi, \eta)$ – плоский якобиан. При соответствующем выборе четырех попарно противоположных участков боковой поверхности область Q отобразится на параллелепипед Q^* . Пусть физическая область Q представляет пролив с береговыми непроницаемыми границами ∂Q_1 , отображаемыми на непроницаемые грани параллелепипеда ∂Q_1^* и с открытыми границами ∂Q , отображаемыми на его открытые грани ∂Q_2^* ; нижней и верхней горизонтальными гранями параллелепипеда Q^* будут прямоугольники Ω^* в плоскостях $\sigma = -1$ и $\sigma = 0$ соответственно.

Метод решения негидростатической задачи, представленный ниже, существенно опирается на решение гидростатической задачи, когда градиент давления имеет вид (8); в криволинейных координатах:

$$\nabla_2 p_\Gamma = g \rho_0 \nabla_2 \zeta + g \nabla_2 I, \quad I = H \int_{\sigma}^0 \rho' d\sigma. \quad (11)$$

Ниже приводится форма уравнений и дополнительных условий в координатах (10); подробный вывод преобразования задачи содержится в [10].

Уравнение (9) в гранично-согласованных координатах (10) примет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + R \nabla \Pi = \underline{\varphi} \\ \underline{\varphi} = (\varphi_u, \varphi_v, \varphi_w) = -U^i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} - W \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} - 2\tilde{\Omega} \times \mathbf{u} + H^{-2} (\mathbf{v} \mathbf{u}_\sigma)_\sigma + J_*^{-1} (K J_* g^{ik} \mathbf{u}_{\xi^k})_{\xi^i}. \quad (12)$$

Здесь $U^i = \mathbf{v} \nabla \xi^i$ – контравариантные горизонтальные скорости, $\nabla \xi^i = \mathbf{e}^i = (\xi_x^i, \xi_y^i)$ – контравариантный базисный вектор; $i, k = 1, 2$ при суммировании по повторяющемуся индексу; $U^1 = U$, $U^2 = V$, $\xi^1 = \xi$, $\xi^2 = \eta$; $W = \sigma_t + \mathbf{v} \nabla_2 \sigma + w \sigma_z$ – контравариантная вертикальная скорость; $\nabla_2 = \mathbf{e}^i \partial / \partial \xi^i$, $g^{ik} = \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k$ – компоненты метрического тензора.

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi^i} J U^i + \frac{\partial}{\partial \sigma} J W = 0 \quad (13)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} J U^i + \frac{\partial}{\partial \sigma} J \hat{W} = 0, \quad (13')$$

где $\hat{W} = W - \sigma_t$. Гидростатические уравнения горизонтального движения:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla_2 p_\Gamma = \underline{\Phi}_v. \quad (14)$$

Здесь $\underline{\Phi}_v = (\Phi_u, \Phi_v)$. Уравнение для конститuentов плотности Θ :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + U^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \Theta + W \frac{\partial}{\partial \sigma} \Theta = \hat{D}(\Theta). \quad (15)$$

Для оператора диффузии примем упрощенное представление:

$$\hat{D} = K_\Theta J_*^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(J_* g^{11} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(J_* g^{22} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(v_\Theta g^{33} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right). \quad (15')$$

К динамической задаче (12), (13) присоединяются вертикально-осредненные уравнения для определения уровня. Замыкание для нахождения v, v_Θ использует уравнение кинетической энергии турбулентности, соотношения подобия и выражение для масштаба турбулентности, [10].

Граничные и начальные условия. Пусть непроницаемые боковые грани ∂Q_1^* параллелепипеда Q^* лежат в плоскостях $\xi = \text{const}$, а его открытые грани ∂Q_2^* – в плоскостях $\eta = \text{const}$. Тогда

$$U|_{\partial Q_1^*} = 0. \quad (16)$$

На открытых границах ∂Q_2^* на вытоке используется линейная экстраполяция характеристической переменной – контравариантной компоненты скорости V – либо ее производной по нормали к плоскости $\eta = \text{const}$:

$$\frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{\partial Q_2^*} = \frac{1}{\sqrt{g^{22}}} g^{2j} V_{\xi^j}, \quad (17)$$

$j = 1, 2, 3$. На входе должна задаваться необходимая информация о входящих в область компонентах решения

$$U|_{\partial Q_2^*} = \psi_1(\xi, \sigma; t), \quad V|_{\partial Q_2^*} = \psi_2(\xi, \sigma; t) \quad (18)$$

и при удержании горизонтальной вязкости ее производная по нормали $K \partial V / \partial n$. Граничными условиями по вертикали являются: условие прилипания у дна на высоте параметра шероховатости ε^* и динамическое условие на касательное напряжение τ / ρ_0 :

$$U^i \Big|_{\sigma=-1+\varepsilon^*} = 0, \quad v U_\sigma^i \Big|_{\sigma=0} = H \nabla \xi^i \tau / \rho_0. \quad (19)$$

Вертикальная компонента W удовлетворяет условиям $W|_{-1} = W|_0 = 0$.

Для уравнений температуры и солёности $\Theta = (T, S)$ (15) на твердой границе принимается

$$g^{1j}\Theta_{\xi^j}|_{\partial Q_1^*} = 0. \quad (20)$$

Условие на открытой границе на вытоке задается линейной экстраполяцией из области

$$g^{2j}\Theta_{\xi^j}|_{\partial Q_2^*} = 0, \quad (21)$$

а на входе – характеристикой входящей водной массы

$$\Theta|_{\partial Q_2^*} = \Psi_3(\xi, \sigma; t). \quad (22)$$

Граничным условием на дне, согласованным с оператором Лапласа–Бельтрами, будет условие по конормали

$$\partial\Theta/\partial n|_{\sigma=-1} = K_\Theta g^{3i}\Theta_{\xi^i} + v_\Theta g^{33}\Theta_\sigma. \quad (23)$$

На поверхности для $\Theta_1 = T$ задаются радиационные потоки тепла, а для $\Theta_2 = S$ – соотношение между осадками и испарением.

Начальными условиями являются бездивергентный вектор скорости $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^0$ и значения конститuentов $\Theta_i|_{t=0} = \Theta_i^0$.

Уравнения энергии. Умножим уравнение (9) на $\rho_0 J\mathbf{u}$, уравнение неразрывности в форме (13) на $\rho_0(g\zeta + |\mathbf{u}|^2/2)$ и в форме (13') – на $gI + p_D$; при сложении результата имеем

$$e_t + [(A+B)JU]_\xi + [(A+B)JV]_\eta + [J(AW + B\hat{W})]_\sigma + \chi = D, \quad (24)$$

где $e = \frac{1}{2}\rho_0 J_*(H|\mathbf{u}|^2 + g\zeta^2)$ – полная энергия; $A = \rho_0\left(\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + g\zeta\right)$ – адвекция кинетической и потенциальной энергии через границу области; $B = gI + p_D$ – адвекция сил плавучести и работа динамического давления на границе области; $\chi = Jgwp'$ – работа сил плавучести внутри области и $D = \rho_0 H\mathbf{u}\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i} KJ_* g^{ik} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^k} + J_* H^{-2} \frac{\partial}{\partial \sigma} v \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma}\right)$.

Интегрирование уравнения (24) по области Q^* при использовании формулы Гаусса и граничных условий $U|_{\partial Q_1^*} = 0$, $W|_{\sigma=-1} = W|_{\sigma=0} = 0$, $\hat{W}|_{\sigma=-1} = 0$, $I|_{\sigma=0} = 0$, $p_D|_{\sigma=0} = 0$ дает

$$E_t + \int_{\partial Q_2^*} (A+B)JV d\xi d\eta + \int_{Q^*} gwp' J dQ^* = D_1 + D_2 + D_3. \quad (25)$$

Здесь $E = \int_{Q^*} e dQ^*$ – интегральная энергия, второй член – сумма интегральных потоков

кинетической энергии, потенциальной энергии, сил плавучести и динамического давления через открытую границу, третий член – интегральная работа сил плавучести;

$D_1 = -\rho_0 \int_{Q^*} K g^{ik} \frac{\partial H \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^k} + H^{-1} \mathbf{v} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma} \right)^2 J_* dQ^*$ – интегральная диссипация энергии;
 $D_2 = \int_{S^\zeta} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}^\zeta J_* d\xi d\eta - \int_{S^h} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau}_h J_* d\xi d\eta$ – разность интегральной работы касательных напряжений $\boldsymbol{\tau} = \rho_0 H^{-1} \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \sigma}$ на свободной поверхности S^ζ и на дне S^h ;
 $D_3 = \frac{1}{2} \rho_0 \int_{\partial Q_2^*} HK \left(g^{12} \frac{\partial}{\partial \xi} |\mathbf{u}|^2 + g^{22} \frac{\partial}{\partial \eta} |\mathbf{u}|^2 \right) J_* d\xi d\eta$ – вязкий интегральный поток энергии через открытую границу.

Метод решения негидростатической задачи. Присоединим к гидростатическим уравнениям (14) уравнение

$$\tilde{w}_t = \Phi_w. \quad (27)$$

Пусть на временном шаге $(k+1)\tau$, $k=0,1,\dots$, $\bar{k} = [\tilde{T}/\tau]$ известно решение задачи (14), (27) для $\mathbf{u}_\Gamma = (u, v, \tilde{w})$, которое будем рассматривать как предиктор разностного уравнения (12):

$$\mathbf{u}_\Gamma^{k+1} = \mathbf{u}^*, \quad (28)$$

определяемый из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^k)}{\tau} + \frac{1}{\rho_0} \nabla_2 p_\Gamma^* &= \underline{\Phi}_v^*, \\ \frac{(w^* - w^k)}{\tau} &= \Phi_w^*. \end{aligned} \quad (29)$$

Для реализации гидростатической краевой задачи – первого из уравнений (29), уравнения неразрывности (13) и уравнений (4), (5) с граничными условиями (16)–(23) – используется расщепление операторов по координатным направлениям со вторым порядком точности и величиной шага по времени, навязываемым только адвективной модой, с присоединенной процедурой, контролирующей поведение решения в области его резких градиентов и многосеточной процедурой ускорения сходимости [10]. Алгоритм решения негидростатической задачи, рассматриваемый ниже, опирается на гидростатический модуль и является одной из модификаций широко используемого проекционного метода решения уравнений Навье–Стокса.

Вычитая уравнения (29) из аппроксимации уравнения (12):

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^k)}{\tau} + \frac{1}{\rho_0} \nabla_2 (p_\Gamma^* + p_D^{k+1}) &= \underline{\Phi}_v^*, \\ \frac{(w^{k+1} - w^k)}{\tau} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \sigma} p_D^{k+1} &= \Phi_w^*, \end{aligned}$$

имеем

$$\frac{(\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^*)}{\tau} + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_D^{k+1} = 0, \quad (30)$$

или в проекциях при временном обозначении $p_D/\rho_0 = p$

$$\begin{aligned}\frac{(u^{k+1} - u^*)}{\tau} + p_{\xi^i}^{k+1} \xi_x^i + p_{\sigma}^{k+1} \sigma_x &= 0, \\ \frac{(v^{k+1} - v^*)}{\tau} + p_{\xi^i}^{k+1} \xi_y^i + p_{\sigma}^{k+1} \sigma_y &= 0, \\ \frac{(w^{k+1} - w^*)}{\tau} + p_{\sigma}^{k+1} \sigma_z &= 0.\end{aligned}$$

Умножим первое из этих уравнений на ξ_x , второе – на ξ_y и сложим их; затем сложим первое уравнение, умноженное на η_x со вторым, умноженным на η_y ; наконец, сложим первое уравнение, умноженное на σ_x , второе, умноженное на σ_y , и третье – на σ_z . Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{(U^{k+1} - U^*)}{\tau} + g^{1j} p_{\xi^j}^{k+1} + g^{13} p_{\sigma}^{k+1} &= 0, \\ \frac{(V^{k+1} - V^*)}{\tau} + g^{2j} p_{\xi^j}^{k+1} + g^{23} p_{\sigma}^{k+1} &= 0, \\ \frac{(\hat{W}^{k+1} - \hat{W}^*)}{\tau} + g^{3j} p_{\xi^j}^{k+1} + g^{33} p_{\sigma}^{k+1} &= 0.\end{aligned}\tag{31}$$

Умножая каждое из этих уравнений на J и дифференцируя первое по ξ , второе – по η , третье – по σ , складывая их, получим

$$(Jg^{ij} p_{\xi^i}^{k+1})_{\xi^j} = [(JU^*)_{\xi} + (JV^*)_{\eta} + (J\hat{W}^*)_{\sigma}] / \tau,\tag{32}$$

где учтено, что в криволинейных координатах, согласно (13'), $\text{div} \mathbf{u}^{k+1} = 0$.

Уравнение Пуассона для оператора Лапласа–Бельтрами (32) решается итерационно, в сочетании на каждом цикле итераций прогонку по вертикали с верхней релаксацией в плоскости (ξ, η) , при граничных условиях по вертикали:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\sigma=-1} = 0, \quad p|_{\sigma=0} = 0;\tag{33}$$

на боковых непроницаемых гранях параллелепипеда Q^*

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\partial Q_1^*} = 0;\tag{34}$$

на открытых его гранях

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{\partial Q_2^*} = \psi(\xi, \sigma, t),\tag{35}$$

где, согласно (31), $\psi^{k+1} = -(V^{k+1} - V^*) / \tau \sqrt{g^{22}}$ назначается в итерационном процессе на каждом цикле с предыдущей итерации s :

$$\psi^{k+1,s} = -(V^{k+1,s} - V^*) / \tau \sqrt{g^{22}}, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

Решением задачи (32)–(35) определяется динамическое давление, по градиенту которого из (31) находится негидростатический вектор скорости $\mathbf{U}^{k+1} = (U, V, \hat{W})^{k+1}$, а затем

и декартова скорость $\mathbf{u}^{k+1}$ из соотношений $u = J_*(U\eta_y - V\xi_y)$, $v = J_*(V\xi_x - U\eta_x)$, $w = H(\hat{W} - u\sigma_x - v\sigma_y)$; уровень ζ находится решением гидростатической краевой задачи для вертикально-осредненных уравнений (13), (14).

Негидростатическая динамика Баб-эль-Мандебского пролива. Баб-эль-Мандебский пролив, расположенный в южной части Красного моря, осуществляет водообмен между Красным морем и Аденским заливом Аравийского моря (рис.1). Длина пролива около 150 км, глубина в средней части около 300 м, площадь поперечного сечения в самой узкой части у о.Перим около 3 км². К северу пролив расширяется до 40 км; здесь у о.Хениш находится порог, препятствующий свободному водообмену через пролив. Наименьшая глубина пороговой зоны 137 м, ширина в сечении порога около 110 км. Наличие глубокого желоба шириной около 6 км в узком проливе определяет его крутую шельфовую структуру с глубинами менее 50 м.

Сложная картина физических процессов в проливе определяется взаимодействием баротропного прилива с плотностными течениями. Амплитуда колебаний уровня уменьшается от ~2 м на границе с заливом до ~1 м у Хенишского порога. Бароклинные течения обязаны разности плотностей вод граничных бассейнов, соленость которых отличается на 2 ‰, и совместно с муссонными течениями определяют гидрологическую структуру пролива: зимой режим течений имеет двухслойную структуру, летом – трехслойную.

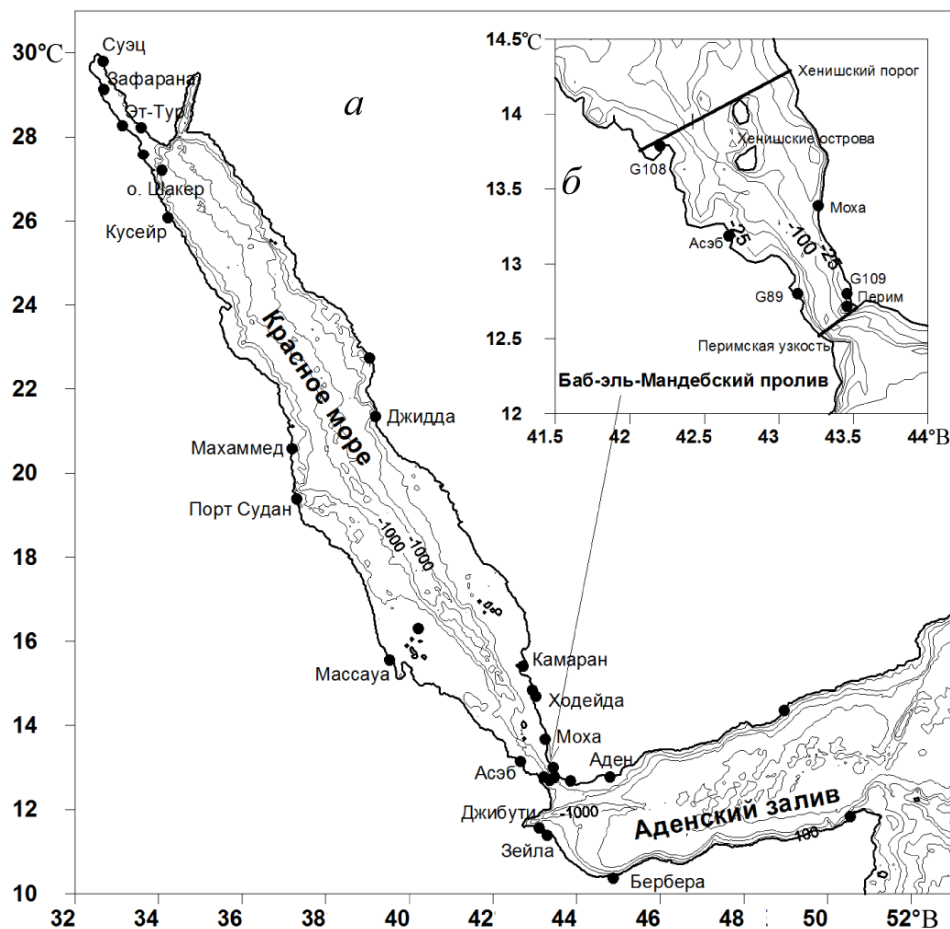


Рис.1. Карта Красного моря, расположение станций наблюдения (а) и карта Баб-эль-Мандебского пролива (б).

Результаты моделирования внутреннего прилива и энергетических характеристик баротропно-бароклинного взаимодействия в Баб-эль-Мандебском проливе представлены в [11, 12], содержащих и библиографию по предмету.

Вычислительные параметры и оценка точности решения негидростатической задачи. Для проверки сходимости численных решений краевая задача интегрировалась на сетке с горизонтальным разрешением 33×53 и 40 узлами по вертикали, а также на вдвое измельченной в продольном направлении сетке $33 \times 103 \times 40$ с шагами $\Delta_{\min} = 110$ м, $\Delta_{\max} = 3500$ м (рис.2); шаг по времени $\tau = 90$ с. Краевые условия на открытых границах для вектора суммарной – баротропной и бароклинной – скорости ставились исходя из решения в расширенной области, включающей Красное море и прилегающую часть Аденского залива. На свободной поверхности задавались потоки тепла и касательные напряжения ветра. Расчеты выполнялись на период зимнего сезона.

Результаты обнаруживают заметное отличие двух сеточных решений и преимущество использования детализированной сетки. Характер сходимости решения 3-D эллиптического уравнения, требующего наибольших вычислительных затрат, показан на рис.3.

Результаты. Сравнение численных решений с данными наблюдений свидетельствует о допустимости в целом гидростатического описания динамики пролива [11–13]. Вместе с тем, как видно из рис.4, 5, в отдельные интервалы времени и локально критерий гидростатики (1) резко нарушается.

Сравнение решений двух задач удобно представить в максимальной норме C : $\|\delta(\chi)\|_C = \max_S |\delta\chi|$, где $\delta\chi = \chi_{\text{нг}} - \chi_{\text{г}}$ – разность значений характеристики χ в негидростатической и гидростатической постановках, S – число узлов сеточной области.

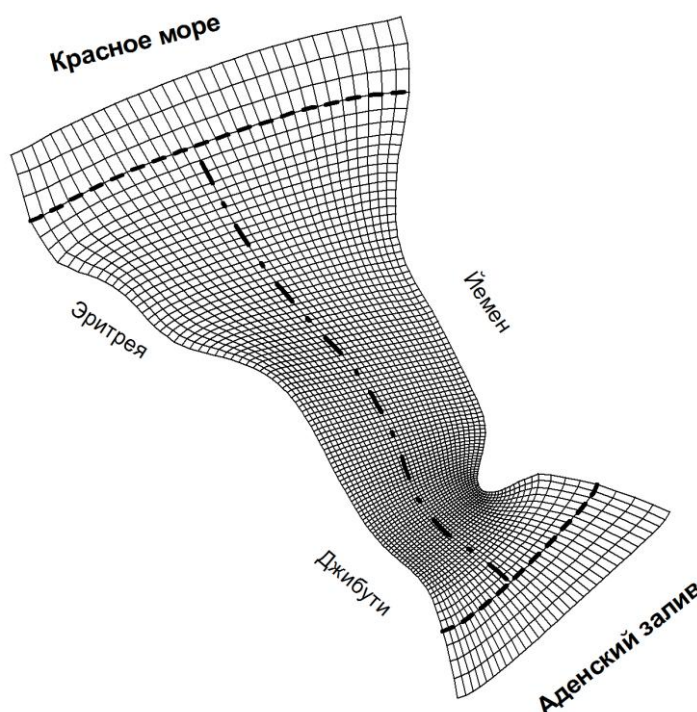


Рис.2. Горизонтальное сечение сеточной области (33×103) Баб-эль-Мандебского пролива.

Штриховая линия – область расчета негидростатической задачи, штрихпунктирная – осевой разрез.

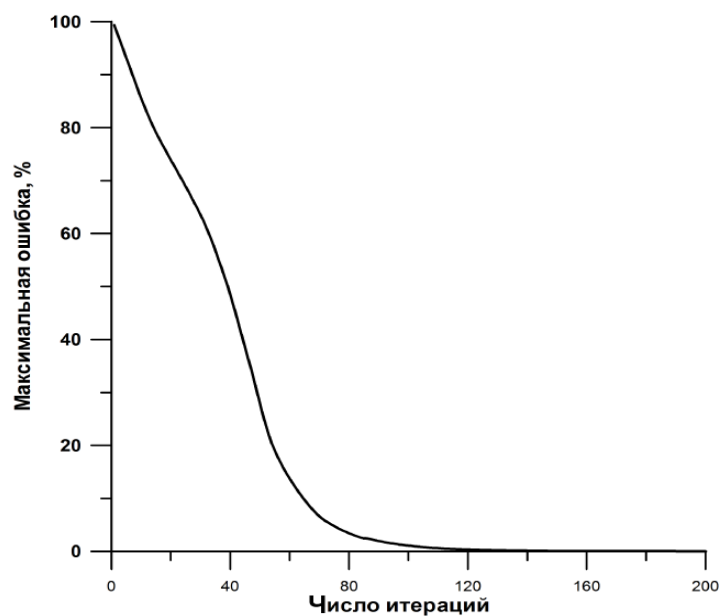


Рис.3. Сходимость решения эллиптической задачи.

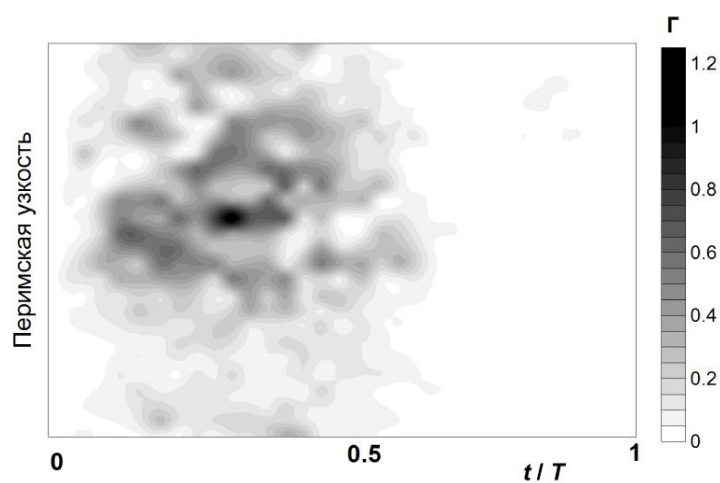


Рис.4. Значения критерия гидростатики в Перимской узкости за приливной период волны M_2 .

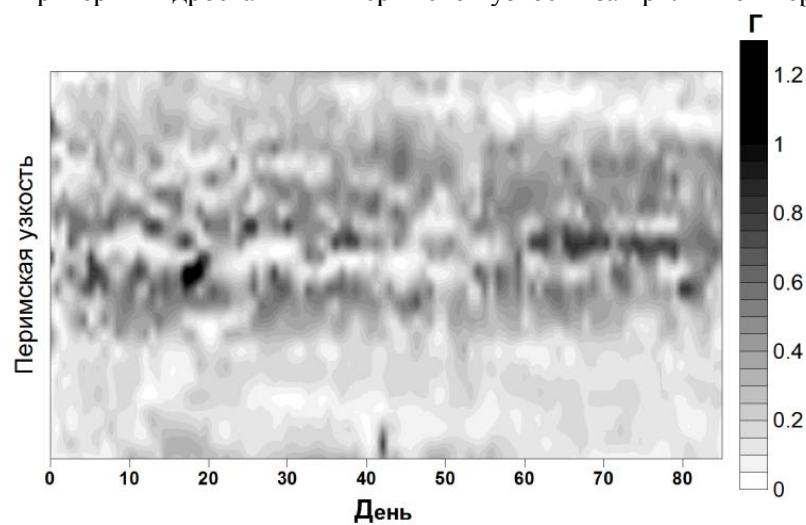


Рис.5. Значения критерия гидростатики в Перимской узкости в моменты максимальной энергии за зимний сезон.

На рис.6 представлен ход нормы максимальных отклонений для $\chi = (\mathbf{u}, \rho')$ в приливном цикле волны M_2 , отнесенном к середине зимнего сезона. Роль негидростатики оказывается весьма значительной, достигая 20 % фактических значений характеристики χ в моменты, близкие к $T/2$; T – период волны M_2 , причем норма отклонений горизонтальных скоростей и плотности ρ' имеет два максимума, а вертикальной скорости – один, приходящийся на момент смены баротропных течений. Максимальные значения нормы сдвинуты относительно моментов энергетических максимумов волны M_2 , выражая роль внутреннего прилива в баротропном цикле.

Влияние бароклинности в различии решений двух задач в области Перимской узкости отчетливо проявляется при рассмотрении эволюции поверхности раздела Промежуточных вод Аденского залива и более тяжелых глубинных вод Красного моря (рис.7). В негидростатическом случае поверхность раздела в приливном цикле имеет значительно больший экскурс; так, на момент максимума энергии $T/4$ амплитуда гидростатической внутренней волны составляет около 10 м, а при учете динамической поправки к давлению ее амплитуда возрастает вдвое. Эволюция поверхности раздела в приливном цикле выражает взаимодействие вод граничных бассейнов: заглубление поверхности свидетельствует об интенсификации поверхностных течений и ослаблении проникновения глубинных вод Красного моря, поднятие поверхности определяет относительное усиление втока красноморских вод. Локальные отличия негидростатического описания эволюции поверхности раздела выявляют преимущества такого описания, представляя более сложную и динамичную картину баротропно-бароклинного взаимодействия.

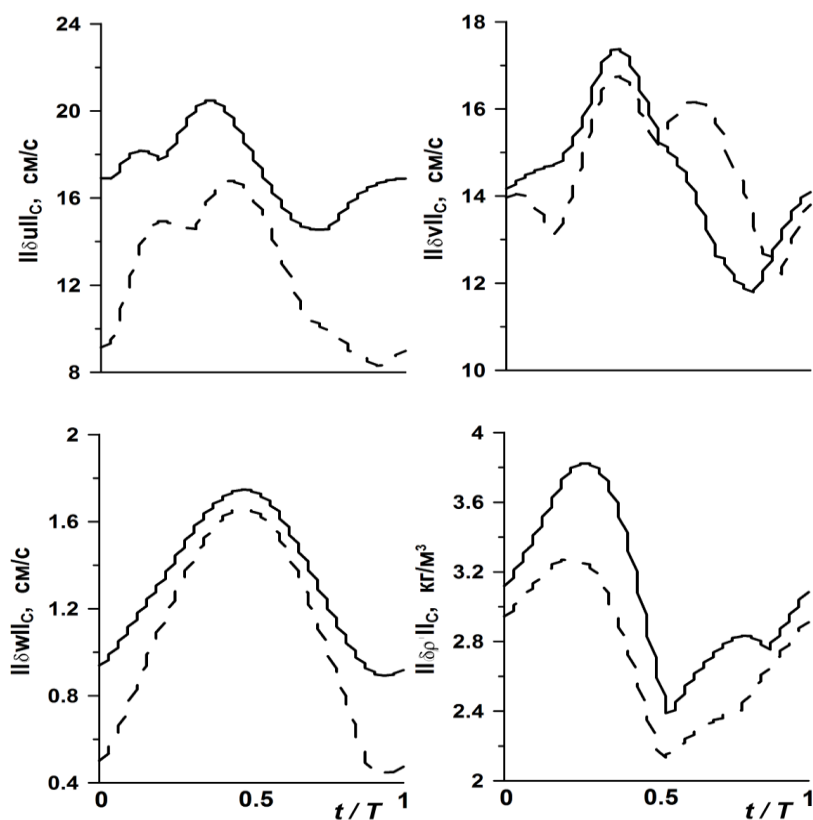


Рис.6. Ход нормы максимальных отклонений $\|\mu(\chi)\|_C$, $\mu = \{\mathbf{u}, \rho'\}$ в приливном цикле.

Сплошная кривая – сетка 33×103 , штриховая – сетка 33×53 .

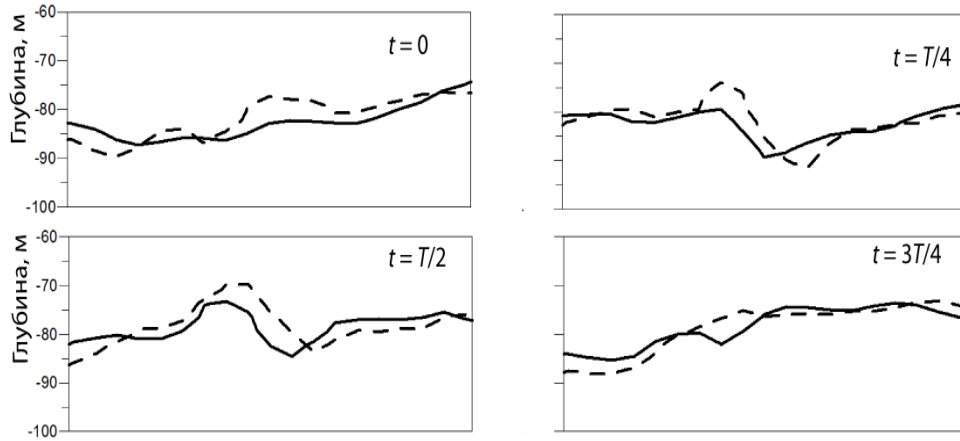


Рис.7. Положение поверхности раздела вод Красного моря и Аденского залива на четыре момента приливного цикла волны M_2 вдоль оси пролива.

Сплошная кривая – гидростатика, штриховая – негидростатика.

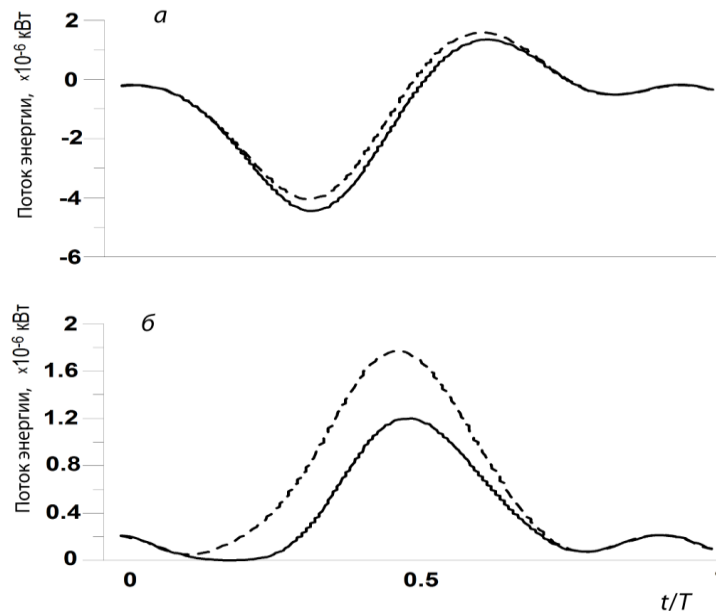


Рис.8. Потоки энергии на открытых границах пролива.

a – южная, b – северная границы; сплошная кривая – гидростатика; штриховая – негидростатика.

Отличие решений двух задач, связанное с граничными потоками энергии, представлено на рис.8. На южной границе потоки энергии близки и составляют около $4 \cdot 10^6$ кВт в момент максимального втока, сдвинутого на 2 ч от времени максимума баротропного втока; доминирующее влияние бароклинности сказывается и в появлении второго энергетического максимума в приливном цикле волны M_2 . На северной границе негидростатический поток энергии вчетверо сильнее и значительно отличается от гидростатического потока. Такая ситуация объясняется тем, что на северной границе негидростатика формирует подъем уровня, способствующий усилению вытока через северную границу; при этом тяжелые воды Красного моря несколько запираются на входе, вынос поверхностных вод интенсифицируется, замедляя ход баротропного прилива и формируя один максимум в середине приливного цикла.

Допустимость гидростатического приближения для давления в жидкости основывается на малости отношения вертикального масштаба движения к горизонтальному масштабу: $\varepsilon = H/L \ll 1$. Допущение оправдывается с высокой точностью для движений, в основе которых лежат длинноволновые возмущения, при том что характерные масштабы имеют присущий им смысл. На горном рельефе дна смысл масштабов утрачивается, и поэтому отношение H/L выражает всего лишь тангенс уклона подводной горы. Признак допустимости гидростатического приближения, вытекающий из анализа уравнения движения по вертикали, дается критерием (1): $\Gamma = \varepsilon^2 U^2 / N^2 H^2 \ll 1$. Если предположить, что роль негидростатических эффектов существенна, то значения Γ должны быть гораздо больше. Такая ситуация и возникает в регионе подводной горы, когда ε выражает уже не соотношение характерных масштабов, а уклон $\varepsilon = H/L = \operatorname{tg} \alpha$; при этом значения ε возрастают на несколько порядков. Другим фактором роста Γ является то, что само глобальное понятие характерной глубины на горном рельефе теряет смысл и должно быть заменено на локальную склоновую глубину $h_*(x, y)$. Пусть h_0 – глубина над вершиной горы, h – глубина у ее подошвы; тогда $h_0 \leq h_* \leq h$. Таким образом на горных склонах функциональное выражение критерия (1) трансформируется к виду

$$\gamma = \frac{U^2}{N^2 h_*^2} \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

Возросшие значения γ уже не могут служить оправданием пренебрежения вертикальным ускорением, лежащим в основе вывода (1).

В работе критерий гидростатики проверяется в условиях Баб-эль-Мандебского пролива, рельеф которого содержит пороговую зону на границе с Красным морем и подводную гору на границе с Аденским заливом. Показано, что действительно на рельефе пролива критерий гидростатики (1) резко нарушается. Определение отклонений от гидростатики при взаимодействии приливной волны M_2 с бароклинной динамикой пролива потребовало решения краевых задач в гидростатической и негидростатической постановках со всесторонней оценкой разности решений. Такие оценки в максимальной норме получены для основных гидрофизических характеристик: компонентов вектора скорости и отклонений плотности. Значения норм отклонений оказываются весьма значительными, достигая в отдельные моменты приливного цикла 15–20 % их наблюдаемых значений. Выполненные расчеты эволюции поверхности раздела вод граничных бассейнов в двух постановках, определяемые различием граничных потоков энергии, также достаточно существенны, чтобы обосновать необходимость учета негидростатики для детализации процесса бароклинно-баротропного взаимодействия локально и в отдельные моменты.

Литература

1. Marshall J., Hill C., Perelman L., Adcroft A. Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and nonhydrostatic ocean modeling // J. Geophys. Res. 1997. V.102. C3. P.5733–5752.
2. Marshall J., Jones H., Hill C. Efficient ocean modeling using non-hydrostatic algorithms // J. of Marine Systems. 1998. V.18. P.115–134.
3. Androsov A., Rubino A., Romeiser R., and Sein D.V. Open-ocean convection in the Greenland Sea: preconditioning through a mesoscale chimney and detectability in SAR imagery studied with a hierarchy of nested numerical models // Meteorologische Zeitschrift. 2005. V.14, № 14. P.693–702.
4. Mahadevan A., Olinger J., Street R. A nonhydrostatic mesoscale ocean model. Part 1, 2 // J. Phys. Oceanogr. 1996. V.26. P.1868–1900.

5. Zhang Z., Fringer O.B., Ramp S.R. Three-dimensional, nonhydrostatic numerical simulation of nonlinear internal wave generation and propagation in the South China Sea // J. Geophys. Res. 2011. V.116. C05022. P.1–26.
6. Davis A.M., Xing J., Berntsen J. Non-hydrostatic and non-linear contributions to the internal wave energy flux in sill regions // Ocean Dynamics. 2009. V.59(6). P.881–897.
7. Britter R.E., Simpson J.E. Experiments on the dynamics of gravity current head // J. Fluid Mech. 1978. V.88(2). P.223–240.
8. Britter R.E., Linden P.F. The motion of the front of a gravity current travelling down an incline // J. Fluid Mech. 1980. V.99(3). P.531–543.
9. Zhu D.Z., Lawrence G.A. Non-hydrostatic effects in layered shallow water flows // J. Fluid Mech. 1998. V.355(25). P.1–16.
10. Shapiro G.I., Hill A.E. Dynamics of dense water cascades at the shelf edge // J. Phys. Oceanogr. 1997. V.27(1). P.2381–2394.
11. Андросов А.А., Вольцингер Н.Е. Пролиты Мирового океана – общий подход к моделированию. СПб.: Наука, 2005. 188 с.
12. Андросов А.А., Вольцингер Н.Е. Моделирование внутреннего прилива в Баб-эль-Мандебском проливе Красного моря // Изв. РАН. ФАО. 2008. Т.44, № 1. С.127–144.
13. Андросов А.А., Вольцингер Н.Е.. Расчет энергии баротропно-бароклинного взаимодействия в Баб-эль-Мандебском проливе // Изв. РАН. ФАО. 2010. Т.46, № 2. С.235–245.

Статья поступила в редакцию 07.12.2012 г.

