

УДК 551.465

© Т.Г.Талипова^{1,2}, Е.Н.Пелиновский¹⁻³, О.Е.Куркина^{1,3}, Е.А.Рувинская^{1,3}, А.Р.Гиниятуллин¹, А.А.Наумов¹, 2013

¹Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева

²Институт прикладной физики РАН, Н.Новгород

³Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Н.Новгород
tgatalipova@mail.ru

БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ И ГЛУБИНЫ

Найден класс точных решений для линейных длинных внутренних волн в двухслойном потоке переменной глубины и сечения. Эти решения описывают так называемое безотражательное распространение, когда волновое поле может быть представлено суммой двух независимых волн с переменными амплитудой и фазой, распространяющихся в противоположных направлениях. Существование таких безотражательных волн возможно лишь при определенных конфигурациях водного потока. В работе обсуждаются приложения безотражательных волн для описания трансформации внутренних волн на реальных шельфах в заливах и бухтах.

Ключевые слова: внутренние волны, двухслойная жидкость, безотражательное распространение.

Внутренние волны являются неотъемлемой частью волнового климата внутри океана, и они наблюдаются практически повсеместно [1–3]. Их динамика сейчас активно моделируется в рамках различных уравнений гидродинамики, в том числе исходных уравнений Эйлера и Навье–Стокса [3–5]. Многие получаемые результаты имеют универсальный характер и находят свое объяснение в теории внутренних волн. Число аналитических моделей, описывающих внутренние волны в океане с неоднородным распределением частоты плавучести и переменной глубины, достаточно мало. Отметим, в частности, применение аналитических методов для описания модовой структуры внутренних волн в океане со специфическим распределением частоты Вьяйсяля–Брента [6–8]. Недавно были найдены безотражательные внутренние волны приливного периода при некоторых ограничениях на характер изменения частоты плавучести и сдвигового потока с глубиной, демонстрирующие сильное проникновение энергии внутренних волн на большие глубины [8, 9]. В случае же плавно меняющейся плотностной стратификации и глубины волновое поле можно описать асимптотически [10, 11]. Отметим также полученные приближенные решения для трансформации внутренней волны в двухслойном потоке с уступом на дне [12], подтвержденные численными решениями уравнений Навье–Стокса для волн даже относительно большой амплитуды [13]. Наконец, выделим точно решаемую аналитическую модель трансформации внутренней волны над неровным дном в двухслойном океане в рамках линейной теории мелкой воды [14], которая продемонстрировала возможность безотражательного распространения внутренней волны над подводным склоном, даже если он достаточно крутой. При этом рассматривалась двумерная задача с одной горизонтальной и одной вертикальной координатой. Между тем в бухтах и заливах приходится принимать во внимание ширину водного потока, влияющего на интенсивность волнового поля, т.е. решать трехмерную задачу. В случае же достаточной узости бухты возможно усреднение по поперечному сечению и переход опять к двумерной задаче. Такие усредненные модели активно используются для нахождения безотражательного распространения поверхностных волн в каналах произволь-

ного сечения [15, 16], что позволило объяснить сильный заплеск волн во время цунами 2009 г. на Самоа [17]. Ниже покажем, что аналогичные безотражательные волны существуют и в теории длинных внутренних волн в двухслойном потоке переменного сечения и глубины при наложении специфических условий на конфигурацию бассейна.

Бегущие волны в двухслойном потоке переменного сечения. Рассмотрим распространение волн в двухслойном потоке переменной глубины и сечения (рис.1). Мы предполагаем толщину верхнего слоя постоянной, так что меняется только толщина нижнего слоя. Используя приближение твердой крышки на свободной поверхности и приближение Буссинеска (малость изменения плотности), запишем линеаризованные уравнения мелкой воды [14, 18], в которые добавим слагаемое, ответственное за поперечную ширину канала:

$$h_1 u_1 + h_2(x) u_2 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial t} + g' \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$B(x) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [B(x) h_2(x) u_2] = 0; \quad (3)$$

здесь η – смещение границы раздела жидкостей разной плотности; u_1, u_2 – усредненные по поперечному сечению скорости потоков в верхнем и нижнем слоях; $h_1, h_2(x)$ – глубины верхнего и нижнего слоев; $B(x)$ – ширина бухты; $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ – редуцированное значение ускорения свободного падения. Эти уравнения отличаются от известных уравнений мелкой воды в двухслойном потоке [14, 18] наличием слагаемого с $B(x)$ в уравнении сохранения массы воды в нижнем слое.

Как и в работе [14], исключим скорость потока в верхнем слое из (1). Тогда уравнение (2) переписывается в виде

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + g' \frac{h_1}{h_1 + h_2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

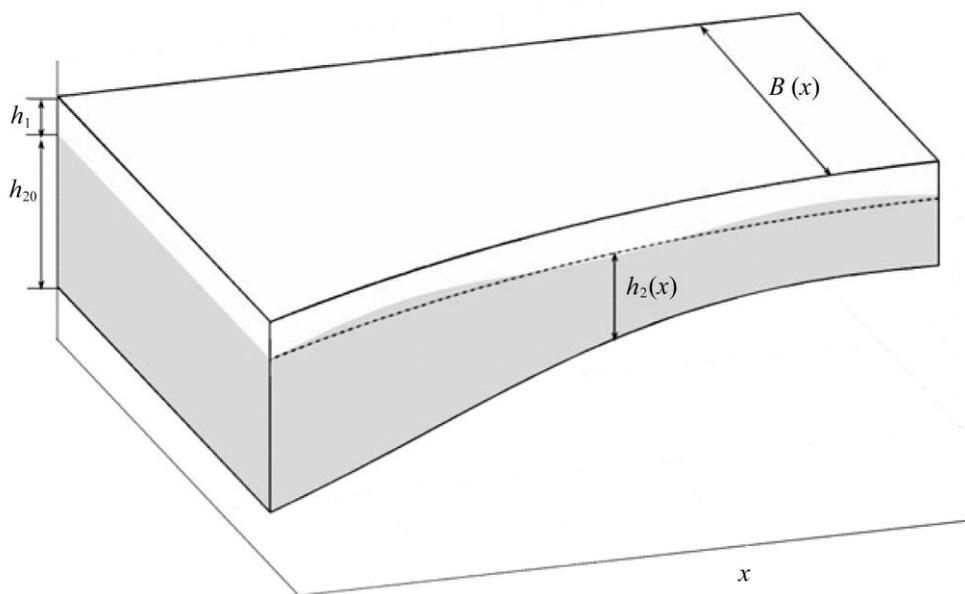


Рис.1. Геометрия задачи.

и система уравнений (3) и (4) становится замкнутой. Эти уравнения легко свести к волновому уравнению для смещения границы раздела:

$$B(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[B(x) c^2(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = 0, \quad (5)$$

$$\text{где } c^2 = g' \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} \quad (6)$$

определяет скорость распространения длинных волн в двухслойном океане.

Уравнение (5) описывает распространение внутренних волн в двухслойном потоке переменного сечения. В теории гиперболических уравнений уже давно отмечалось, что при некоторых условиях волновое уравнение с переменными коэффициентами сводится к волновому уравнению с постоянными коэффициентами (см., напр., [19]), что существенно упрощает его решение. Такое сведение позволяет представлять волновое поле как суперпозицию независимых волн, бегущих в противоположных направлениях. Это позволяет говорить о существовании безотражательного распространения волн в неоднородном океане, при котором энергия волнового поля может переноситься на большие расстояния. Такие решения рассмотрены ранее в [14] для внутренних волн в двухслойном потоке, без учета возможного изменения ширины канала. В то же время для поверхностных волн в каналах переменного сечения, где уравнения схожи с изучаемым здесь уравнением (5), также найдены безотражательные волны [15, 16, 20]. Все это позволяет надеяться, что бегущие волны существуют точно и в рамках волнового уравнения (5).

Следуя цитированным выше работам, получим безотражательные решения в явном виде. Для этого представим решение уравнения (5) в виде

$$\eta(t, x) = A(x) \Phi(t, \tau), \quad (7)$$

где (см. далее) новые переменные имеют смысл амплитуды $A(x)$ и фазы – времени распространения $\tau(x)$. Тогда уравнение (5) сводится к уравнению типа Клейна-Гордона с переменными коэффициентами для новой неизвестной функции $\Phi(t, \tau)$:

$$AB \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{d\tau}{dx} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \right] - \left[Bc^2 \frac{dA}{dx} \frac{d\tau}{dx} + \frac{d}{dx} \left(c^2 AB \frac{d\tau}{dx} \right) \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \frac{d}{dx} \left(c^2 \frac{dA}{dx} B \right) \Phi = 0. \quad (8)$$

Уравнение (8) содержит переменные коэффициенты, как и исходное волновое уравнение (5). Попробуем найти условия, когда коэффициенты уравнения (8) станут постоянными. Первое из них вытекает из структуры волнового оператора в первых квадратных скобках и приводит к определению фазы

$$\tau(x) = \int \frac{dx}{c(x)}, \quad (9)$$

где для определенности взят знак плюс. Такого рода выражение для фазы известно для волн в плавно неоднородной среде, здесь же оно получается в весьма общем виде. Вторая скобка в (8) обязана быть равной нулю, чтобы решения не нарастали в пространстве

$$A(x) = \frac{\text{const}}{\sqrt{c(x)B(x)}}. \quad (10)$$

Наконец, коэффициент перед последним членом в (8) должен быть равным нулю, чтобы уравнение (8) оставалось волновым. Это приводит к уравнению

$$\sqrt{\frac{c(x)}{B(x)}} \frac{d}{dx} [B(x)c(x)] = \text{const}. \quad (11)$$

В результате уравнение Клейна-Гордона (8) становится волновым уравнением с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = 0. \quad (12)$$

Волновое уравнение (12) очень хорошо изучено в математической физике, для него легко поставить и решить задачу Коши. В частности, решения уравнения (12) представимы в виде суммы двух волн, распространяющихся в противоположные стороны,

$$\Phi(t, \tau) = \Phi_1(t - \tau) + \Phi_2(t + \tau),$$

где Φ_1 и Φ_2 – две функции, находимые из начальных условий. Таким образом, решение (7) исходного волнового уравнения с переменными коэффициентами представляет собой бегущие волны, которые существуют, несмотря на изменчивость параметров потока в пространстве. Именно в этом смысле мы называем такие волны «безотражательными», подразумевая, что они не отражаются внутри канала переменного сечения. На самом деле ситуация несколько более сложная, потому что уравнение (12) задано на полуоси ($0 \leq \tau < \infty$), а не на полной оси. Поэтому в точке, соответствующей нулевому значению τ , необходимо задание определенных граничных условий. Это важная проблема обсуждается в [14].

Конфигурации бассейна, допускающие безотражательное распространение внутренних волн. Исследуем конфигурацию стратифицированного канала, в котором могут распространяться бегущие внутренние волны. Для этого необходимо решить уравнение (11). Прежде всего рассмотрим несколько частных случаев.

Канал постоянной ширины. В этом случае можно положить $B = 1$, и тогда уравнение (11) решается в общем виде

$$c(x) = c_0(1 \pm x/L)^{2/3},$$

где c_0 и L характеризуют закон изменения скорости распространения внутренних волн. Используя (6), можно найти донный профиль, обеспечивающий безотражательное распространение внутренних волн:

$$h_2(x) = h_1 \frac{(x/L)^{4/3}}{1 - (x/L)^{4/3}},$$

(h_1 – толщина верхнего слоя). Этот профиль обсуждался в работе [14], где функция $h_2(x)$ определена *только* на конечном участке $0 < x < L$. В точке $x = 0$ жидкость становится однородной, и если считать, что в области $x < 0$ глубина бассейна совпадает с глубиной верхнего слоя h_1 или меньше нее, то в области $x < 0$ внутренние волны распространяться не могут. По существу, точка $x = 0$ играет роль уреза для поверхностных волн: внутренние волны с приближением к ней могут отражаться или разрушаться. На правой границе ($x = L$) глубина бассейна резко возрастает, хотя скорость распространения внутренних волн остается конечной и стремится к c_0 в рамках теории мелкой воды. Очевидно, что в этой области необходима сшивка донного профиля с более реалистичным профилем глубины (или отказ от приближения мелкой воды), что обсуждалось в работе [14].

Канал постоянной глубины. Если толщина нижнего слоя остается постоянной, то и скорость распространения $c(x)$ также постоянна. В этом случае уравнение (11) легко интегрируется:

$$B(x) = B_0(1 \pm x/L)^2$$

($B_0(x)$ и L характеризуют параметры канала). В этом случае, по существу, нет никакой специфики внутренних волн, и получаемый профиль безотражательного канала совпадает с известным для поверхностных волн [20]. Здесь нет ограничений на размер переходной зоны, которая может быть неограниченной.

«Согласованный» канал переменного сечения и глубины. Наконец, выделим третий случай, когда ширина канала связана определенным образом с глубиной бассейна

$$B(x)c(x) = \text{const},$$

при этом изменение одного из параметров с расстоянием может быть любым. Учитывая определение скорости распространения внутренних волн (6), получаем следующую связь между шириной канала и толщиной нижнего слоя

$$B(x) = B_\infty \sqrt{1 + \frac{h_1}{h_2(x)}}, \quad (13)$$

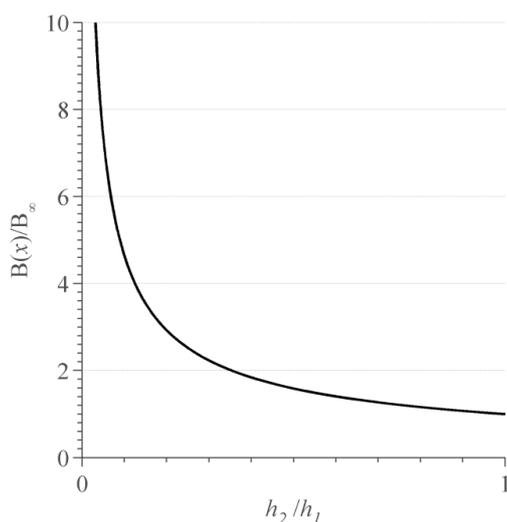


Рис.2. Связь ширины канала с глубиной (13).

где B_∞ соответствует ширине канала на глубокой воде. С приближением к «урезу», где толщина нижнего слоя обращается в нуль, ширина канала должна неограниченно возрастать, чтобы обеспечить безотражательный характер распространения внутренней волны. На глубокой воде канал переменного сечения легко «сшить» с каналом постоянного сечения. Зависимость (13) показана на рис.2.

«Произвольный» канал переменной ширины и глубины. Рассмотрим более общий случай, когда необходимо решить уравнение (11), содержащее две неизвестные функции: $B(x)$ и $c(x)$. Считая, например, изменение глубины нижнего слоя с расстоянием заданным (следовательно, заданной является функция $c(x)$), уравнение (11) можно проинтегрировать:

$$B(x) = B_0 \sqrt{\frac{1 + h_1/h_2(x)}{1 + h_1/h_{20}}} \left[1 + \frac{1}{L} \int_0^x \sqrt{1 + \frac{h_1}{h_2(x')}} dx' \right]^2; \quad (14)$$

здесь B_0 и h_{20} соответствуют параметрам канала в точке $x = 0$, а L характеризует масштаб изменения толщины нижнего слоя с расстоянием. Таким образом, задаваясь каким-либо профилем глубины, можно найти соответствующую ширину канала, обеспечивающую безотражательное распространение внутренней волны в нем.

В качестве примера рассмотрим монотонный профиль изменения толщины нижнего слоя

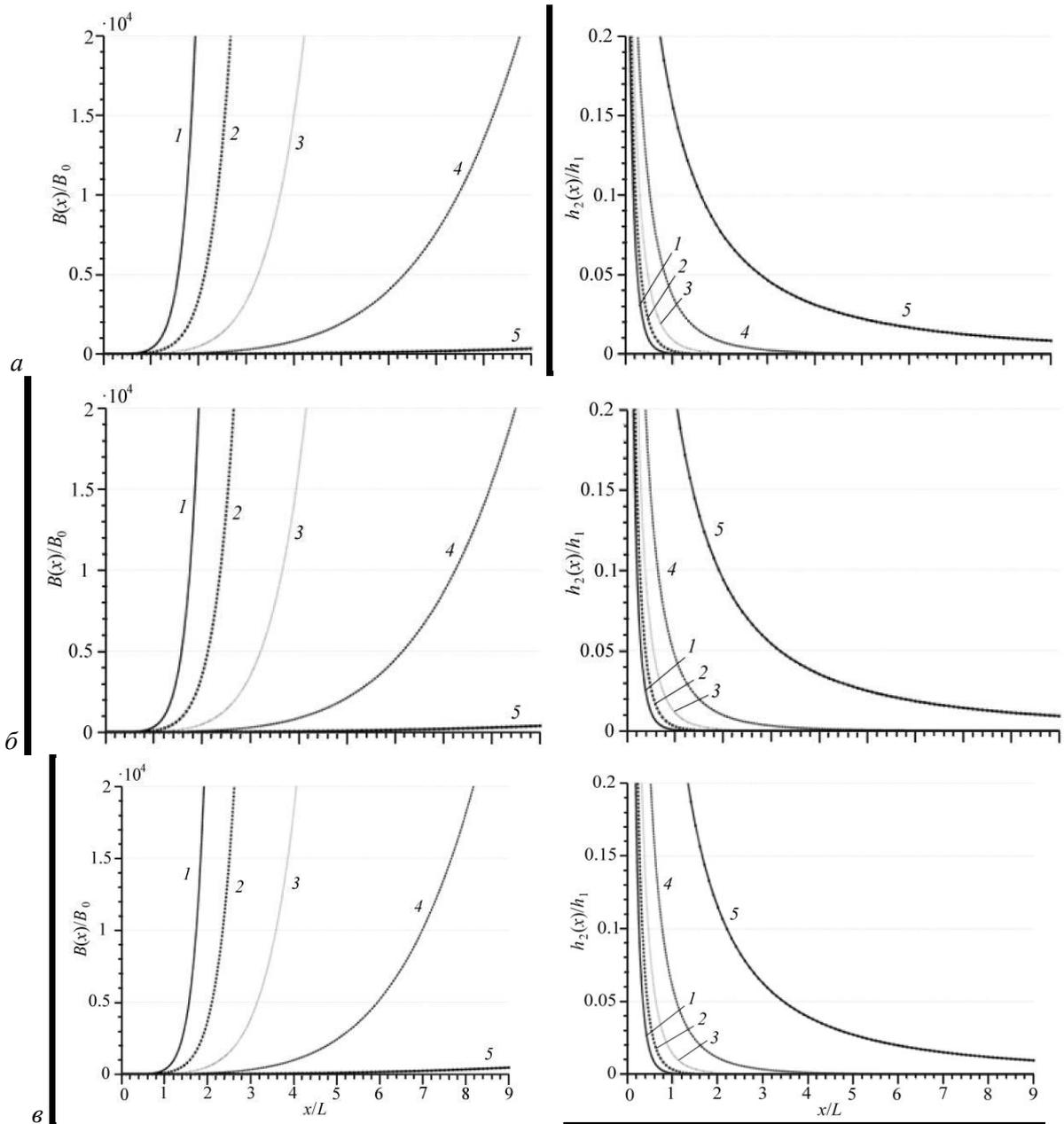
$$h_2(x) = \frac{h_1}{\left(1 + \frac{x_0 + x}{L}\right)^{2q} - 1}, \quad (15)$$

где $q > 0$ – произвольное число, а x_0 легко находится из условия $h_2(0) = h_{20}$:

$$\frac{x_0}{L} = \left(1 + \frac{h_1}{h_{20}}\right)^{1/2q} - 1.$$

В соответствии с (15) толщина нижнего слоя неограниченно убывает с расстоянием, стремясь к нулю на бесконечности. Подставляя (15) в (14), находится искомое выражение для сечения безотражательного канала:

$$B(x) = \frac{B_0}{(q+1)\sqrt{1+h_1/h_{20}}} \left(1 + \frac{x_0+x}{L}\right)^q \left[\left(1 + \frac{x_0+x}{L}\right)^{q+1} - \left(1 + \frac{x_0}{L}\right)^{q+1} \right]. \quad (16)$$



1 - $q = 5$; 2 - $q = 4$; 3 - $q = 3$; 4 - $q = 2$; 5 - $q = 1$

Рис.3. Изменение ширины канала (16) (слева) и глубины (15) (справа) для различных значений параметра h_1/h_{20} и q .

$a - h_1/h_{20} = 2$; $b - h_1/h_{20} = 1$; $v - h_1/h_{20} = 1/4$.

Ширина безотражательного канала неограниченно возрастает с расстоянием, чтобы «компенсировать» убывание глубины жидкости. В частности, на бесконечности справедлива следующая асимптотика для толщины нижнего слоя и ширины канала: $h_2 \sim x^{-2q}$, $B \sim x^{2q+1}$. Ниже приведены графики изменения ширины канала (16) и глубины (15) для различных значений параметра h_1/h_{20} и q (рис.3).

Структура бегущей внутренней волны в безотражательном канале. Используя (7), (9) и (10), запишем общее выражение для бегущей волны:

$$\eta(x,t) = A_0 \sqrt{\frac{c_0 B_0}{c(x)B(x)}} \Phi[t - \tau(x)], \quad c(x) = \sqrt{g' \frac{h_1 h_2(x)}{h_1 + h_2(x)}}, \quad \tau(x) = \int \frac{dx}{c(x)},$$

при этом связь между $B(x)$ и $h_2(x)$ задается формулой (14). Функция $\Phi(t)$ описывает форму волны в какой-то фиксированной точке ($x = 0$). Как видим, форма внутренней волны в безотражательном канале остается неизменной в любой точке пространства – меняется только амплитуда волны и время прихода (задержка сигнала). В пространстве, конечно же, форма волны меняется со временем. С учетом того, что большинство датчиков внутренних волн является точечным, свойство неизменности формы волны на датчиках должно указывать на безотражательный характер распространения внутренних волн.

Внутренние волны характеризуются не только смещением пикноклина, но и волновыми течениями в верхнем и нижнем слоях. Течение в нижнем слое, вызываемое бегущей волной, находится из формулы (4):

$$u_2(x,t) = A_0 \frac{c(x)}{h_2(x)} \sqrt{\frac{c_0 B_0}{c(x)B(x)}} \Phi[t - \tau(x)] - A_0 \frac{c^2(x)}{h_2(x)} \frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{c_0 B_0}{c(x)B(x)}} \right] \Psi[t - \tau(x)], \quad (17)$$

где $\Psi(t) = \int \Phi(t) dt$.

Аналогично течение в верхнем слое находится из (1):

$$u_1(x,t) = -A_0 \frac{c(x)}{h_1} \sqrt{\frac{c_0 B_0}{c(x)B(x)}} \Phi[t - \tau(x)] + A_0 \frac{c^2(x)}{h_1} \frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{c_0 B_0}{c(x)B(x)}} \right] \Psi[t - \tau(x)]. \quad (18)$$

Разумеется, и здесь ширина канала не может быть задана произвольно и определяется выражением (14). Отметим, что формулы для скоростей течения (17) и (18) содержат два слагаемых, первое из которых пропорционально волне смещения, а второе определяется интегралом от нее. Поскольку коэффициенты в обоих слагаемых разные, это приводит к изменению формы волновых возмущений скорости течения в различных точках пространства в отличие от волны смещения.

Важно подчеркнуть, что функция $\Phi(t)$ должна быть знакопеременной во времени с нулевым средним, чтобы обеспечить убывание функции $\Psi(t)$ на больших временах. Однако это ограничение применимо только к чисто бегущей волне, в то время как при решении начальной задачи (задача Коши), когда решение исходного волнового уравнения представимо в виде суммы бегущих волн, это ограничение не является обязательным [21].

Итак, показано, что в узких стратифицированных бухтах могут распространяться бегущие внутренние волны при специальном законе изменения глубины и ширины канала. Число конфигураций безотражательных каналов достаточно велико, и для каждого донного профиля может быть найдена соответствующая зависимость ширины канала от расстояния. Форма безотражательных волн не меняется во времени, однако в простран-

стве они деформируются. Полученные аналитические решения демонстрируют возможность сильного усиления внутренних волн в узких бухтах, чего не отмечалось ранее. Они также полезны для тестирования гидростатических моделей внутренних волн в шельфовой зоне.

Представленные результаты получены в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (№ 14.В37.21.0642), грантов РФФИ (12-05-00472, 13-02-00656, 13-05-90424), а также проекта Научного фонда НИУ ВШЭ № 12-01-0103.

Литература

1. *Мирополюский Ю.З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 302 с.
2. *Морозов Е.Г.* Океанские внутренние волны. М.: Наука, 1985. 151 с.
3. *Vlasenko V., Stashchuk N., Hutter K.* Baroclinic Tides. N.Y.: Cambridge University Press, 2005. 372 p.
4. *Helfrich K.R., Melville W.K.* Long nonlinear internal waves // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2006. V.38. P.395–425.
5. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T.* Modeling internal solitary waves in the coastal ocean // *Survey in Geophys.* 2007. V.28, N 4. P.273–298.
6. *Краусс В.* Внутренние волны. Л.: Гидрометеиздат, 1968. 272 с.
7. *Власенко В.И.* Генерация внутренних волн в стратифицированном океане переменной глубины // *Изв. РАН ФАО.* 1987. Т.23, № 3. С.225–230.
8. *Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н., Петрухин Н.С.* О проникновении длинной внутренней волны в толщу океана // *Океанология.* 2009. Т.49, № 5. С.673–680.
9. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T.* Non-reflecting internal wave beam propagation in the deep ocean // *J. Phys. Oceanography.* 2010. V.40, N 4. P.802–913.
10. *Zhou X., Grimshaw R.* The effect of variable currents on internal solitary waves // *Dynamics Atmosph. Oceans.* 1989. V.14. P.17–39.
11. *Булатов В.В., Владимиров Ю.В.* Динамика негармонических волновых пакетов в стратифицированных средах. М.: Наука, 2010. 470 с.
12. *Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T.* Fission of a weakly nonlinear interfacial solitary wave at a step // *Geophys. and Astrophys. Fluid Dynamics.* 2008. V.102, N 2. P.179–194.
13. *Talipova T. et al.* Internal solitary wave transformation over the bottom step: loss of energy. *Phys. Fluids.* 2013. V.25. P.032110.
14. *Талипова Т.Г., Пелиновский Е.Н.* Трансформация внутренних волн над неровным дном: аналитические результаты // *Океанология.* 2011. Т.51, № 4. С.621–626.
15. *Didenkulova I., Pelinovsky E.* Runup of tsunami waves in U-shaped bays // *Pageoph.* 2011. V.168, N 6–7. P.1239–1249.
16. *Didenkulova I., Pelinovsky E.* Nonlinear wave evolution and runup in an inclined channel of a parabolic cross-section // *Phys Fluids.* 2011. V.23. Issue 8. P.086602.
17. *Didenkulova I.* Tsunami runup in narrow bays: the case of Samoa 2009 tsunami // *Natural Hazards.* 2013. V.65. P.1629–1636.
18. *Ляпидевский В.Ю., Теушков В.М.* Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 420 с.
19. *Varley E., Seymour B.* A method for obtaining exact solutions to partial differential equations with variable coefficients // *Stud. Appl. Math.* 1988. V.78. P.183–225.
20. *Диденкулова И.И.* и др. Бегущие длинные волны в водных прямоугольных каналах переменного сечения // *Вест. МГОУ. Сер. «Естеств. науки».* 2012. № 5. С.89–93.
21. *Didenkulova I., Pelinovsky E., Soomere T.* Long surface wave dynamics along a convex bottom // *J. Geophys. Res. Oceans.* 2009. V.114. C.C07006.

Статья поступила в редакцию 14.05.2013 г.

