УДК 532.592

© *Н.И.Макаренко*[1,2], *Е.Г.Перевалова*[1], 2013
[1]Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
[2]Новосибирский государственный университет
makarenko@hydro.nsc.ru

ПЛОТНОСТНАЯ СТРАТИФИКАЦИЯ И АМПЛИТУДНАЯ ДИСПЕРСИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Рассматривается теоретическая модель уединенных внутренних волн большой амплитуды в слабостратифицированной жидкости. Предполагается, что фоновый профиль плотности жидкости зависит линейно или экспоненциально от глубины. Показано, что обратная задача восстановления коэффициента тонкой структуры плотности по известной кривой амплитудной дисперсии сводится к решению линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода с ядром специального вида. В случае полиномиальной стратификации установлено взаимно однозначное соответствие между коэффициентом плотности и дисперсионной функцией.

Ключевые слова: стратификация, уединенные внутренние волны, прямая и обратная задачи.

В работе исследуется взаимосвязь между свойствами плотностной стратификации неоднородной жидкости и кинематическими характеристиками нелинейных внутренних волн. Акцент делается на изучение возможности восстановления профиля плотности по известным кривым амплитудной дисперсии для уединенных внутренних волн. Интерес к этой проблематике стимулируется современными возможностями сочетания методов дистанционного зондирования внутренних волн с прямыми термохалинными измерениями. Задача нахождения плотности вертикально стратифицированной среды по дисперсионным зависимостям фазовых скоростей линейных волн от волнового числа уже рассматривалась [1–3]. В этих работах использовалась техника решения обратных спектральных задач, основанная на методе интегральных уравнений и других подходах. В данной статье в качестве первичного носителя информации для решения обратной задачи предлагается рассматривать сильно нелинейные волны солитонного типа, характерные для шельфовых зон океана [4]. Цуги разбегающихся солитонов внутренних волн, по многочисленным данным наблюдений, регулярно образуются при взаимодействии приливных течений с шельфовыми порогами, причем пространственные амплитуды таких возмущений бывают сравнимы с полной глубиной воды на шельфе [5, 6]. Подходящей для их моделирования является асимптотическая процедура вывода уравнений нелинейных длинных волн с дисперсией, предложенная в работе [7]. Указанный метод базируется на разложении по малому параметру Буссинеска, характеризующему средний градиент плотности, и поэтому свободен от ограничений малости на амплитуду волны. В результате анализа возникающих дисперсионных зависимостей для уединенных волн установлено, что в случае однородной фоновой стратификации (т.е. когда плотность жидкости в главном порядке зависит от глубины линейно или экспоненциально) обратная задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода для коэффициента, описывающего тонкую структуру стратификации.

Исходные уравнения. Рассматриваются двухмерные движения идеальной несжимаемой неоднородной жидкости в горизонтальном слое, ограниченном ровным дном ($y = 0$) и жесткой крышкой ($y = h$). В системе отсчета, связанной с бегущей уединенной волной, течение является установившимся. Поэтому в качестве базовой математической модели здесь используются стационарные уравнения Эйлера для поля скоростей $\mathbf{u}=(u,v)$, плотности ρ и давления p:

$$u_x + v_y = 0,\ u\rho_x + v\rho_y = 0,\ uu_x + vu_y + \rho^{-1}p_x = 0,\ uv_x + vv_y + \rho^{-1}p_y = -g, \tag{1}$$

где g – ускорение силы тяжести. Условие непротекания на дне и крышке требует выполнения равенства $v=0$ при $y=0$ и $y=h$. Кроме того, вектор скорости $\mathbf{u}(x,y)$ должен стремиться при $|x|\to\infty$ к постоянному вектору $\mathbf{u}_0=(u_0,0)$, где u_0 – скорость волны относительно покоящейся жидкости. Плотность $\rho(x,y)$ при этом должна приближаться к ее невозмущенному распределению $\rho_\infty(y)$. Хорошо известно [8], что с введением функций тока ψ для поля скоростей $u=\psi_y$, $v=-\psi_x$ система (1) после исключения давления p сводится к одному уравнению в частных производных второго порядка – уравнению Дюбрей-Жакотэн – Лонга:

$$\rho(\psi)(\psi_{xx}+\psi_{yy})+\rho'(\psi)\left\{gy-\frac{y\psi}{u_0}+\frac{1}{2}(\psi_x^2+\psi_y^2-u_0^2)\right\}=0. \tag{2}$$

В этом нелинейном уравнении зависимость коэффициента $\rho(\psi)$ от функции тока предписывается распределением плотности по линиям тока невозмущенного течения: $\rho(\psi)=\rho_\infty(\psi/u_0)$. Граничные условия на твердых стенках и условие затухания волны на бесконечности записываются для уравнения (2) в следующем виде:

$$\psi(x,0)=0,\ \psi(x,h)=u_0h;\ \psi(x,y)\to u_0y\ (x\to\infty). \tag{3}$$

Прямая задача теории волн заключается в отыскании решения ψ уравнений (2), (3), отличного от равномерного потока $\psi_\infty(y)=u_0y$. При этом зависимость плотности $\rho_\infty(y)$ от глубины далеко вверх по потоку считается известной. В таком контексте данная постановка является нелинейной задачей на собственные значения, в которой спектральным параметром служит скорость уединенной волны u_0. Для дальнейшего полезно отметить, что уравнение (2) допускает вариационную формулировку с лагранжианом

$$L=-\frac{1}{2}\rho(\psi)(\psi_x^2+\psi_y^2-u_0^2)+g\int_{u_0y}^{\psi}\left(\rho(\chi)-\rho(\psi)\right)d\chi. \tag{4}$$

При переходе к безразмерным переменным нужно иметь в виду, что невозмущенное стратифицированное течение характеризуется двумя безразмерными константами – параметром Буссинеска σ и параметром λ, представляющим собой квадрат обратного денсиметрического (плотностного) числа Фруда:

$$\sigma=\frac{N_0^2h}{\pi g},\ \lambda=\frac{\sigma gh}{\pi u_0^2},$$

где N_0 – характерная частота плавучести N в основном течении, $N^2(y)=-g\rho'_\infty(y)/\rho_\infty(y)$. В случае слабой стратификации параметр σ является естественным малым параметром. Согласно известным представлениям о свойствах термохалинной стратификации морской воды [9], распределение плотности жидкости в положении равновесия можно моделировать уравнением

$$\rho_\infty(y)=\rho_\infty(0)\left\{1-\sigma\rho_*(\pi y/h)-\sigma^2\rho_1(\pi y/h,\sigma)\right\},$$

где функции ρ_* и ρ_1 задают соответственно фоновый профиль и тонкую структуру поля плотности. Число π введено здесь в масштабные множители для удобства нормировки, поскольку моды внутренних волн, рассматриваемые в данной работе, связаны с тригонометрическими собственными функциями.

В натурных условиях наблюдается сравнительно небольшое количество типов функциональных зависимостей, характерных для среднего профиля плотности ρ_*. К ним относятся, в частности, линейная и экспоненциальная зависимости плотности от глубины, ступенчатая стратификация с одним или несколькими пикноклинами, а также комбинации указанных профилей. В отличие от фонового профиля, обычно имеющего стабильный сезонный характер, тонкая структура стратификации существенно более многообразна и изменчива. Однако характерное время ее эволюции заметно превосходит временные периоды внутренних волн, поэтому здесь ее также можно моделировать стационарной зависимостью от y. Будем рассматривать класс профилей плотности, имеющих безразмерную форму записи

$$\rho(y,\sigma) = 1 - \sigma y - \sigma^2 \rho_0(y) + O(\sigma^3) \tag{5}$$

с безразмерной переменной $0 \le y \le \pi$ и функцией $\rho_0(y) = \rho_1(y,0)$, характеризующей тонкую структуру стратификации в главном порядке по σ. Класс профилей (5) содержит в качестве частных случаев линейное распределение плотности $\rho = 1 - \sigma y$ и экспоненциальную стратификацию $\rho = \exp(-\sigma y)$.

Длинноволновое приближение. Следуя работе [7], будем рассматривать приближение, в котором отношение вертикального и горизонтального масштабов движения имеет порядок малости $\sqrt{\sigma}$. Можно показать, что именно этот асимптотический порядок вытекает в длинноволновом пределе из дисперсионного соотношения для нормальных мод с профилем плотности (5). Переходя в уравнениях (2), (3) к безразмерным переменным с растянутой («медленной») горизонтальной переменной $x \to \sqrt{\sigma}x$, выделим явно только слагаемые до порядка $O(\sigma)$ включительно:

$$\sigma\psi_{xx} + \psi_{yy} + \lambda(\psi - y) = \sigma\left(\psi\psi_{yy} + (y-\psi)\rho_0'(\psi) + \tfrac{1}{2}\left(\psi_y^2 - 1\right)\right) + O(\sigma^2), \tag{6}$$

$$\psi(x,0) = 0,\ \ \psi(x,\pi) = \pi;\ \ \psi(x,y) \to y\ \ (x \to \infty).$$

Решение ищется в следующем виде:

$$\psi(x,y) = y + v_0(x,y) + \sigma v_1(x,y) + \ldots,$$

при этом параметр $\lambda = \lambda_0 + \sigma\lambda_1 + \ldots$ также ищется в виде ряда по степеням малого параметра σ. Сравнение слагаемых с одинаковыми степенями дает рекуррентную серию уравнений для коэффициентов v_i $(i = 1,2,\ldots)$ вида

$$v_{iyy} + \lambda_0 v_i = f_i \quad (0 < y < \pi),$$

$$v_i(x,0) = v_i(x,\pi) = 0,$$

где правые части при $i = 0$ и $i = 1$ имеют форму

$$f_0 = 0,\ \ f_1 = -v_{0xx} + (y + v_0)v_{0yy} - \lambda_0\rho_0'(y + v_0)v_0 + v_{0y} + \frac{1}{2}v_{0y}^2 - \lambda_1 v_0.$$

Из уравнений с номером $i = 0$ следует $\lambda_0 = m^2$ (m – натуральное число), так что для главной моды $m = 1$ решение в приближении наименьшего порядка имеет вид

$v_0(x,y)=a(x)\sin y$. Функция $a(x)$, пока не определенная, находится из условия совместности для системы уравнений последующего приближения. Таким условием совместности является условие ортогональности правой части f_1 и собственной функции первой моды:

$$\int_0^{\pi} f_1(x,y)\sin y dy = 0.$$

В итоге это дает нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение теории длинных волн:

$$\frac{d^2a}{dx^2}+F'_a(a)=0, \tag{7}$$

где структура нелинейности $F(a)=s(a)+\frac{1}{2}\lambda_1 a^2$ определяется сложной функцией

$$s(a)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\int_y^{y+a\sin y}\left(\rho_0(y+a\sin y)-\rho_0(\psi)\right)d\psi dy+\frac{\pi}{4}a^2+\frac{2}{3\pi}a^3. \tag{8}$$

Отметим, что конкретный вид этой функции обусловлен похожей структурой лагранжиана (4) для исходного уравнения Дюбрей-Жакотэн – Лонга. Поскольку указанная выше функция $s(a)$ имеет нуль второго порядка в точке $a=0$, функция $F(a)$ также имеет там двухкратный корень. Поэтому решение типа уединенной волны получается в том случае, когда величина λ_1 лежит в области значений функции

$$\lambda_1(b)=-\frac{2s(b)}{b^2}, \tag{9}$$

причем соответствующее значение $b\neq 0$ оказывается простым корнем функции F. Искомая функция $a(x)$ дается при этом квадратурой

$$x=\pm\int_a^b\frac{d\alpha}{\alpha\sqrt{\lambda_1(\alpha)-\lambda_1(b)}}.$$

Параметр $b=a(0)$ характеризует амплитуду поля скоростей в срединной части уединенной волны (при $x=0$), а величина $\lambda_1=\lambda_1(b)$ определяет скорость ее распространения по формуле $u_0^2=\dfrac{\sigma g h_0}{\pi(1+\sigma\lambda_1(b))}$ с точностью $O(\sigma^3)$. Согласно указанной формуле, именно функция $\lambda_1(b)$ ответственна за свойства амплитудной дисперсии уединенных волн для заданного закона стратификации.

В оригинальной работе [7], где была предложена описанная выше асимптотическая процедура, рассматривался случай линейной стратификации. В этом случае уравнение (7) имеет в качестве нелинейности кубический полином $F(a)$, как для классической модели слабонелинейных волн Кортевега – де Фриза. Аналогичная ситуация имеет место и в случае экспоненциальной стратификации. В работе [10] было обращено внимание на то, что добавление к профилю плотности членов более высокого асимптотического порядка по σ может существенно поменять структуру уравнения (7) и свойства его решений. В частности, возмущение тонкой структуры стратификации приводит к появлению решений типа плавного бора («кинк») и уединенных внутренних волн типа плато («кинк-антикинк»). На этом пути в работе [11] была предложена приближенная модель уединенной волны с присоединенной вихревой зоной. Другие экстремальные режимы волн конечной амплитуды типа бора и плато детально изучались в работах [12–15], в которых бифуркации предельных форм внутренних волн были связаны с немонотонным поведением дисперсионной функции $\lambda_1(b)$. В частности, бифуркации уединенных волн в волны типа плато происходят вблизи значений амплитуды b, являющихся локальными минимумами функции $\lambda_1(b)$ (локальные максимумы скорости распространения волны u_0).

Интегральное уравнение для коэффициента плотности. Переходя к обратной задаче, обратим внимание на то, что соотношения (8) и (9) напрямую устанавливают аналитическую зависимость между коэффициентом $\rho_0(y)$, задающим тонкую структуру стратификации, и дисперсионной функцией $\lambda_1(b)$. Наличие этих линейных соотношений позволяет конструктивным образом сформулировать задачу восстановления поля плотности по дисперсионным характеристикам нелинейных внутренних волн. С этой целью рассмотрим интегральное слагаемое

$$I(b) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\int_y^{y+b\sin y}\left(\rho_0(y+b\sin y)-\rho_0(\psi)\right)d\psi dy\,, \tag{10}$$

присутствующее в выражении (8) для функции s. Интегрированием по частям по переменной y величина $I(b)$ приводится к следующему виду, содержащему только однократные интегралы:

$$I(b) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(b\sin y + y(1+b\cos y)\right)\rho_0(y+b\sin y)dy - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y\rho_0(y)dy\,.$$

Далее сделаем в первом из этих интегралов замену переменой, переходя от y к новой переменной интегрирования

$$\psi = y + b\sin y\,. \tag{11}$$

Это по существу есть преобразование Мизеса, при котором вертикальная независимая переменная y и функция тока ψ меняются ролями. Указанная замена задает $y = y(\psi, b)$ как неявную функцию от ψ и b. Она однозначна при условии $\psi_y = 1 + b\cos y > 0$, которое имеет прозрачный физический смысл: в срединном сечении уединенной волны нет возвратных течений. Данное требование накладывает естественное ограничение $|b| > 1$ на амплитудный параметр b. Преобразование (11) помогает избавиться от сложного аргумента функции ρ_0 в интеграле (10). Как результат, формула (8), с учетом определения (9) функции $\lambda_1(b)$ и проделанных выше преобразований, дает следующее равенство:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\{2y(\psi,b)\}}{1+b\cos y(\psi,b)}\rho_0(\psi)d\psi = \lambda_1(b) + \frac{\pi}{2} + \frac{4b}{3\pi}\,. \tag{12}$$

Полученное соотношение представляет собой линейное интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно функции ρ_0, если известна дисперсионная функция $\lambda_1(b)$. Ядро интегрального оператора в (12), заданное неявным образом с помощью формулы (11), не имеет особенностей, ввиду аналитичности функции $y(\psi, b)$, по своим переменным в области $0 \le \psi \le \pi$, $|b| < 1$. Уравнения такого рода типичны для обратных задач математической физики, являющихся в общем случае некорректными, однако для их решения существуют эффективные регуляризующие алгоритмы [16].

Ключевым при анализе уравнений Фредгольма первого рода является вопрос о выделении достаточно широких классов единственности решения. Используя исходное явное представление функции $s(b)$ с двухкратным интегралом (10), нетрудно проверить, что если функция $\rho_0(y)$ имеет вид полинома степени n относительно y, $\rho_0(y)=\sum_{i=1}^{n} r_i y^i$, то дисперсионная функция $\lambda_1(b)$ является полиномом степени $n-1$ по амплитудному параметру b: $\lambda_1(b)=\sum_{i=0}^{n-1} l_i b^i$. При этом коэффициенты $\mathbf{r}=(r_1,...,r_n)^T$ и $\mathbf{l}=(l_0,...,l_{n-1})^T$ указанных полиномов связаны между собой линейным образом: $\mathbf{l}=A\mathbf{r}+\mathbf{d}$ с вектором $\mathbf{d}=(-\pi/2,-4/3\pi,0,...,0)^T$ и квадратной матрицей $A=\left\|A_{ij}\right\|$ порядка $n\times n$. Более детальный анализ позволяет утверждать, что, во-первых, матрица A является верхнетреугольной, во-вторых, ее элементы, вычисленные для размерности n, не меняются на соответствующих местах при переходе к размерности $n+1$. Кроме того, диагональные элементы имеют вид

$$A_{nn}=-\frac{4n}{n+1}\frac{n!!}{(n+1)}\cdot\begin{cases}1 & (n-\text{нечетное}),\\ 2/\pi & (n-\text{четное}),\end{cases}$$

т.е. все они отличны от нуля. Таким образом, между коэффициентами l_i и r_k имеется зависимость вида

$$\begin{pmatrix} -1 & -\pi & -\pi^2+3/2 & -\pi^3+3\pi & \cdots \\ 0 & -32/9\pi & -16/3 & -32\pi/3+1280/27\pi & \cdots \\ 0 & 0 & -9/8 & 9\pi/4 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -256/75\pi & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\\ r_4\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l_0\\ l_1\\ l_2\\ l_3\\ \vdots\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \pi/2\\ 4/3\pi\\ 0\\ 0\\ \vdots\end{pmatrix},$$

которая соответствует конечномерной проекции интегрального уравнения (12) на класс полиномиальных функций λ_1 и ρ_0. Ввиду обратимости матрицы A при любом конечном n указанное уравнение всегда имеет в этом классе единственное решение, т.е. при сделанных предположениях тонкая структура стратификации однозначно восстанавливается по амплитудной дисперсионной кривой уединенных волн.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00671) и программы Президиума РАН (проект № 23.2).

Литература

1. *Потетюнко Э.Н., Черкесов Л.В.* Определение параметров стратифицированного океана по спектральным характеристикам внутренних волн // ДАН Украины. 1996. № 3. С.113–117.
2. *Потетюнко Э.Н., Черкесов Л.В., Шубин Д.С.* Восстановление распределения плотности океана по его волновому спектру // Прикл. гидромеханика. 2000. Т.2(74), № 4. С.73–81.
3. *Потетюнко Э.Н., Черкесов Л.В., Шубин Д.С., Щербак Е.Н.* Свободные колебания и обратные спектральные задачи. М.: Вуз.кн., 2007. 288 с.
4. *Сабинин К.Д., Серебряный А.Н.* «Горячие точки» в поле внутренних волн в океане // Акуст. журн. 2007. Т.53, № 3. С.410–436.
5. *DudaT.F., LynchJ.F., IrishJ.D., BeardsleyJ.D., RampS.R.* et al. Internal tide and nonlinear wave behavior in the continental slope in the northern South China Sea // IEEE J. Ocean Eng. 2004. V.29. P.1105–1131.
6. *Helfrich K.R., Melville W.K.* Long nonlinear internal waves // Ann. Rev. Fluid Mech. 2006. V.38. P.395–425.
7. *Benney D.J., Ko D.R.S.* The propagation of long large amplitude internal waves // Stud. Appl. Math. 1978. V.59. P.187–199.
8. *Yih C.S.* Stratified flows / C.S. Yih. – N.Y., 1980.
9. *Федоров К.Н.* Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1976.

10. *Борисов А.А., Держо О.Г.* Структура стационарных уединенных волн конечной амплитуды // Изв. СО-АНСССР. Сер.тех. наук. 1990. № 2. С.60–70.
11. *Derzho O.G., Grimshaw R.* Solitary waves with a vortex core in a shallow layer of stratified fluid // Phys. Fluids. 1997. V.9. P.3378–3385.
12. *Макаренко Н.И.* Сопряженные течения и плавные боры в слабостратифицированной жидкости // ПМТФ. 1999. Т.40, № 2. С.69–78.
13. *Макаренко Н.И., Мальцева Ж.Л.* Влияние тонкой структуры стратификации на параметры нелинейных внутренних волн // Выч. технологии. 2001. Т.6. С.421–427.
14. *Maltseva J.L.* Limiting forms of internal solitary waves // JOMAE Transactions ASME. 2003. V.125, N l. P.76–79.
15. *Makarenko N.I., Maltseva J.L., Kazakov A.Yu.* Conjugate flows and amplitude bounds for internal solitary waves // Nonlin. Proc. Geophys. 2009. V.16. P.169–178.
16. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.

Статья поступила в редакцию 24.10.2012 г.