

УДК 532.59

© Н.В.Гаврилов<sup>1</sup>, В.Ю.Ляпидевский<sup>1</sup>, З.А.Ляпидевская<sup>2</sup>, 2013<sup>1</sup>Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН, Новосибирск<sup>2</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск  
gavrilov@hydro.nsc.ru

## ВЛИЯНИЕ ДИСПЕРСИИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВНУТРЕННИХ ВОЛН В ШЕЛЬФОВОЙ ЗОНЕ

Рассматриваются волновые движения стратифицированной по плотности жидкости над неровным дном. Представлены результаты лабораторных экспериментов по трансформации нелинейных внутренних волн первой и второй мод над склоном. На основе математической модели трехслойной мелкой воды с учетом негидростатичности распределения давления проведены численные расчеты эволюции волн большой амплитуды и дано их сравнение с экспериментальными данными. Построено точное решение, представляющее несимметричную уединенную волну второй моды, и дано экспериментальное подтверждение существования несимметричных солитообразных волн, распространяющихся по границе раздела между однородными слоями различной плотности.

**Ключевые слова:** стратифицированные течения, внутренние волны, несимметричные солитоны, трехслойная мелкая вода, разрушение волн, шельфовая зона.

Динамика внутренних волн в шельфовой зоне моря во многом аналогична распространению поверхностных волн в прибойной зоне. Использование физических аспектов разрушения волн и построение адекватных математических моделей процесса диссипации энергии в прибрежных водах еще далеки от завершения. Одной из проблем описания эволюции волн при выходе их на берег является учет нелинейных и дисперсионных эффектов в течениях с внутренними и внешними свободными границами. При этом при построении математической модели динамики внутренних волн следует иметь в виду, что их амплитуда в отличие от поверхностных волн может существенно превосходить начальную толщину невозмущенного слоя жидкости (страты) перед волной. Очень часто волновой фронт принимает форму цуга уединенных волн с большим отношением амплитуды волны к глубине верхнего слоя [1]. Такие волны способны переносить массу и импульс на большие расстояния и являются важным объектом исследования в современной океанологии. Математические и численные модели данного класса течений, получивших название волн с «захваченным ядром», представлены в работах [2, 3]. При движении к берегу волны понижения меняют полярность и в районе контакта основного термоклина (пикноклина) с дном распространяются в виде пакетов придонных уединенных волн повышения [4–7].

Лабораторное моделирование приповерхностных или придонных внутренних волн большой амплитуды ограничено влиянием трения (см. [8]), так как из-за развития погранслоя уединенная волна большой амплитуды трансформируется в гравитационное течение с интенсивным перемешиванием за фронтом волны. Эффекты трения о дно и свободную поверхность (влияние поверхностного натяжения) можно исключить при рассмотрении интрузий на границе раздела смешивающихся жидкостей. Для слабостратифицированных жидкостей и симметричной начальной стратификации в лабораторных условиях легко воспроизводятся симметричные уединенные волны, представляющие

собой короткие интрузии, распространяющиеся горизонтально с сохранением формы. Такие солитонобразные течения исследованы в работах [9–15].

В работе представлена трехслойная модель, соответствующая второму приближению теории мелкой воды. С ее помощью построены точные решения и проведены нестационарные численные расчеты трансформации внутренних волн первой и второй мод над склоном. Результаты сравниваются с лабораторными экспериментами, выполненными в ИГиЛ СО РАН. Показано, что рассматриваемая модель пригодна для описания эволюции внутренних волн первой моды как в задаче о набегании волн на откос, так и при моделировании плотностных течений вниз по склону (оползни, термики).

**Лабораторные эксперименты.** Целью экспериментов была проверка адекватности математической модели, сформулированной в следующем параграфе. Исследовалась эволюция внутренних волн первой и второй мод над неровным дном. Специальные условия были созданы для формирования несимметричных уединенных волн второй моды и исследования их устойчивости. Эксперименты проводились в лабораторном лотке длиной 330 см, шириной 20 см и глубиной 35 см. Стенки лотка и дно изготовлены из плексигласа. Лоток разделялся на две части вертикальной герметичной перегородкой, которая могла подниматься и опускаться для формирования уединенной волны. Геометрическая конфигурация экспериментов схематически представлена на рис. 1, а, б.

В эксперименте I (рис. 1, а) перед началом опыта перегородка поднималась, и установка заливалась слоями смешивающихся жидкостей, имеющих разную плотность ( $\rho^+ < \rho^-$ ) и заданную глубину. В качестве рабочих жидкостей использовались пресная вода и слабый раствор сахара в воде. Во всех экспериментах относительная разность плотностей слоев  $\varepsilon = (\rho^- - \rho^+)/\rho^-$  не превышала 0.5 %, что существенно не увеличивало вязкость жидкостей, а также позволяло при интерпретации результатов рассматривать свободную поверхность как твердую крышку. В качестве добавки для создания стратификации использовался сахар, так как его коэффициент диффузии существенно меньше, чем, например, поваренной соли. Это позволяло уменьшить толщину размытой зоны.

После заливки лотка герметичная перегородка опускалась. Жидкость в левой секции тщательно перемешивалась и слегка подкрашивалась, и в этом отсеке устанавливалась средняя плотность  $\bar{\rho}$ . При удалении перегородки жидкость из секции устремлялась вдоль границы раздела слоев в основную часть лотка, а жидкость из основной его части вдоль дна и свободной поверхности перетекала в левую секцию. Затем перегородка опускалась, и на некотором расстоянии от нее на границе раздела слоев формировалась уединенная волна второй моды. При изменении времени, в течение которого перегородка была открыта, реализовывались волны различной интенсивности. Распространение уединенных волн фиксировалось с помощью цифровой видеокамеры (частота съемки 25 кадр/с), расположенной на расстоянии 2.5 м от лотка.

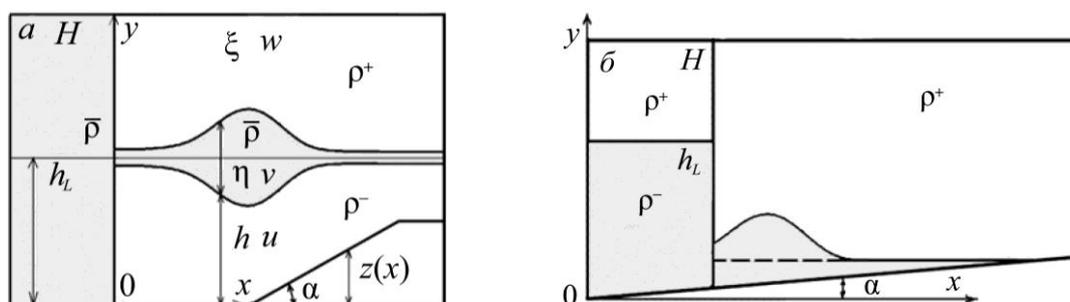


Рис. 1. Схема лабораторного эксперимента.

а – эксперимент I: генерация и распространение коротких интрузий;  
б – эксперимент II: уединенные волны над склоном.

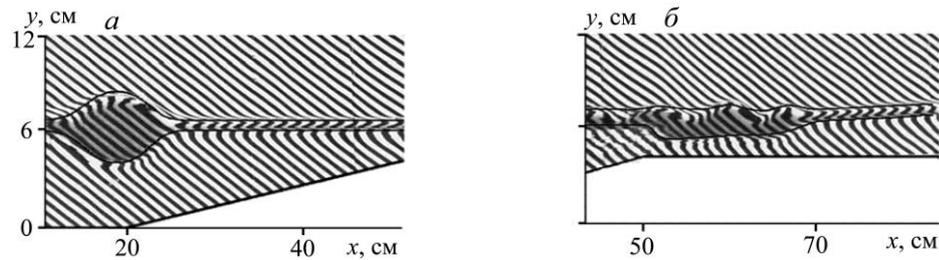


Рис.2. Трансформация симметричной уединенной волны над шельфом.

Подкрашенная жидкость из левого отсека (эксперимент I) визуализирует «захваченное ядро». Сплошная линия – нестационарный расчет по модели (1): *a* – уединенная волна над горизонтальным участком дна; *б* – потеря симметрии течения и генерация внутренних волн первой моды в шельфовой зоне.

Как и в экспериментах работы [8], визуализация картины течения осуществлялась следующим образом: сквозь толщу жидкости фотографировался равномерно освещенный экран с нанесенными на него наклонными линиями. В зонах с высоким градиентом плотности наблюдалось характерное искажение этих линий, а в зонах перемешивания нарушалась оптическая прозрачность жидкости. Следует отметить, что в зонах увеличения градиента плотности линии как бы сгущаются, а в зонах уменьшения – расходятся. Выше и ниже пикноклина и внутри уединенной волны линии не искажены, следовательно, в этих областях находится однородная по плотности жидкость. Кроме того, жидкость промежуточной плотности, распространяющаяся в виде интрузии вдоль границы раздела, слегка подкрашена раствором чернил для визуализации процессов массообмена (рис.2, 3).

В первой серии экспериментов I (рис.1, *a*) изучен процесс трансформации симметричной уединенной волны над шельфом. Для этого в левом отсеке создавалась жидкость промежуточной плотности  $\bar{\rho} = 0.5(\rho^+ + \rho^-)$ , а граница раздела между однородными покоящимися слоями плотности  $\rho^-$  и  $\rho^+$  справа от перегородки находилась в центре канала ( $h_L = 0.5H$ ,  $H = 12$  см). Время подъема перегородки выбиралось так, чтобы сформировалась одна уединенная волна над горизонтальным участком дна ( $0 < x < 20$  см), как это показано на рис.2, *a*. Для имитации течения над шельфом выбраны следующие геометрические размеры:  $\alpha = 7.5^\circ$ , высота шельфовой полочки – 4 см. При малых перепадах плотности в однородных слоях и одинаковой начальной толщине слоев возмущение, возникающее при удалении перегородки, распространяется вправо в виде симметричной уединенной волны второй моды (рис.2, *a*). Подкрашенная жидкость, находящаяся первоначально в левом отсеке, визуализирует на фотографиях «захваченное ядро». По фотографии можно восстановить внешние границы распространяющегося возмущения, которые достаточно точно определяются по искажению прямых наклонных полос, нанесенных на задней стенке лотка. Потеря симметрии течения и генерация внутренних волн первой моды в шельфовой зоне также могут быть отчетливо визуализированы в ходе эксперимента (рис.2, *б*).

Эксперимент I был также проведен для случая несимметричной стратификации в канале с ровным дном ( $z(x) \equiv 0$ ). В общем случае короткие интрузии жидкости с промежуточной плотностью быстро теряют энергию за счет генерации внутренних волн первой моды и перемешивания. Однако при определенном соотношении глубин однородных слоев и плотности в прослойке реализуются несимметричные уединенные волны второй моды, которые могут распространяться на значительные расстояния с сохранением формы (рис.3, 4). Как и в случае симметричного солитона (рис.2, *a*), «захваченное ядро» визуализируется путем подкрашивания жидкости в левом отсеке, а внешние границы волны определяются деформацией наклонных линий (рис.3). Кроме того, внешние границы течения могут быть визуализированы путем введения краски в промежуточный слой справа от перегородки (рис.4).

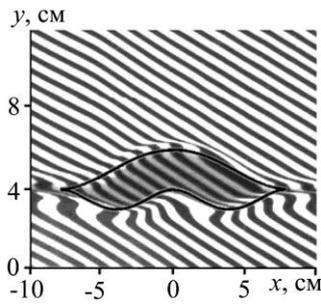


Рис.3. Эксперимент I: несимметричная уединенная волна второй моды над ровным дном на расстоянии  $l$  от перегородки.

Сплошная линия – точное решение (1) при нулевой начальной толщине прослойки. Подкрашена жидкость из левого отсека ( $H = 12$  см,  $h_L = 4$  см,  $\bar{b} = 1/3b$ ,  $b = 5$  см/с<sup>2</sup>); экспериментально измеренная толщина прослойки  $\delta = 0.8$  см,  $l = 75$  см,  $z(x) \equiv 0$ .

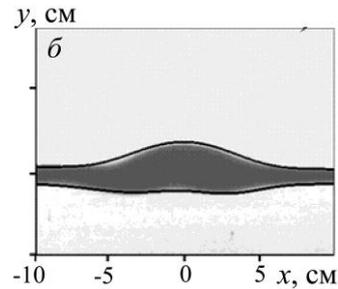
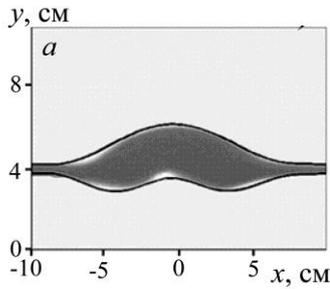


Рис.4. Влияние начальной толщины прослойки на структуру несимметричной уединенной волны второй моды ( $H = 12$  см,  $\bar{b} = 1/3b$ ).

$a - l = 80$  см,  $\delta = 0.6$  см, сплошная линия – стационарное решение (1);

$b - l = 90$  см,  $\delta = 0.8$  см, сплошная линия – решение нестационарной задачи для (1).

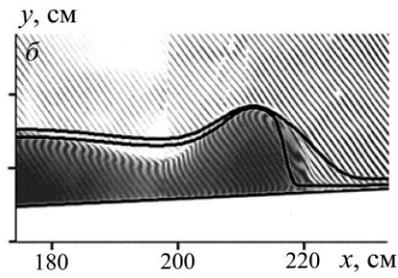
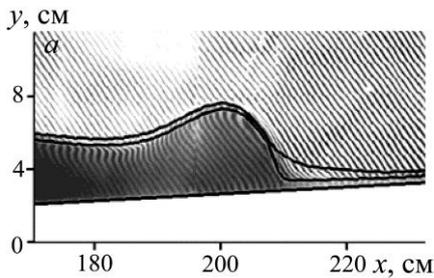


Рис.5. Эксперимент II: распространение фронта более плотной жидкости вверх по склону ( $\alpha = 1.1^\circ$ ,  $l = 230$  см).

Сплошная линия – профиль волны, полученный в численном расчете задачи о разрушении шлюза (1), подкрашена более плотная жидкость (рис.1, б):  $a - t = 40$  с,  $b - t = 45$  с.

Вторая серия экспериментов (эксперимент II, рис.1, б) направлена на изучение динамики придонных уединенных волн в зоне «заплеска», т.е. в районе пересечения невозмущенной границы раздела между однородными слоями плотности  $\rho^+$  и  $\rho^-$  с наклонным дном ( $\alpha = 1.1^\circ$ ). Аналогичные эксперименты по набеганию внутренних волн на откос представлены в работе [16]. Основное отличие эксперимента II от проведенного в [16] состоит в существенном уменьшении общей глубины слоя жидкости (от  $H = 35$  до  $H = 16$  см), что позволяет проверить предложенную ниже теорию мелкой воды для моделирования волнового фронта вплоть до зоны «заплеска» (рис.5). Заметим, что при подходе фронта к линии контакта невозмущенного пикноклина с дном головная часть волны становится круче, (ср. рис.5, а, б). После пересечения границы контакта при  $t = 50$  с, т.е. в зоне «заплеска», характер движения волны по «сухому руслу» резко меняется. Нарушение оптической прозрачности жидкости в головной части течения свидетельствует о турбулизации фронта и перестройке течения в гравитационное с существенным перемешиванием за фронтом волны (рис.6). Эксперимент II дает представление о механизме разрушения внутренних волн в шельфовой зоне моря [17].

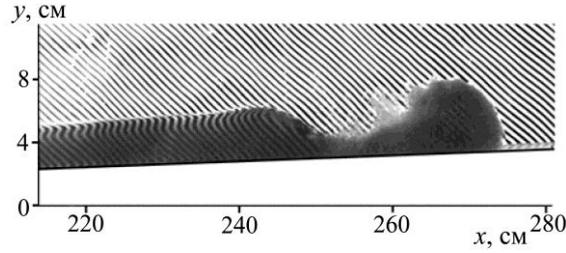


Рис.6. Разрушение фронта внутренней волны при ее выходе в зону «заплеска».

**Математическая модель.** Для описания эволюции внутренних волн большой амплитуды используется второе приближение мелкой воды, в котором предполагается, что длина волны существенно превышает глубину канала, но в то же время учтена негидростатичность распределения давления в окрестности фронта волны. Рассмотрим трехслойную схему течения стратифицированной жидкости, в которой два однородных слоя плотности  $\rho^+$  и  $\rho^-$  разделены промежуточным слоем со средней плотностью. В однородных слоях учитывается влияние вертикального ускорения на форму волны, тогда как давление в промежуточном слое предполагается распределенным по гидростатическому закону. Последняя гипотеза связана с процессом генерации мелкомасштабных движений на границе раздела однородных слоев при прохождении внутренних волн конечной амплитуды [18]. Уравнения многослойной мелкой воды во втором приближении выведены в работе [19]. Для трехслойной схемы течения с учетом гидростатичности давления в промежуточном слое и в приближении Буссинеска ( $(\rho^- - \rho^+)/(\rho^- \ll 1)$ ) уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 h_t + (hu)_x &= 0, \quad \zeta_t + (\zeta w)_x = 0, \quad \eta_t + (\eta v)_x = 0, \\
 u_t + \left( \frac{1}{2} u^2 + \frac{\beta}{3} h \frac{d_-^2 h}{dt^2} + \frac{\beta}{6} \left( \frac{d_- h}{dt} \right)^2 + p + bh + \bar{b} \eta + bz + \frac{\beta}{2} h \frac{d_-^2 z}{dt^2} + \frac{\beta}{2} \frac{d_- h}{dt} \frac{d_- z}{dt} + \frac{\beta}{2} \left( \frac{d_- z}{dt} \right)^2 \right)_x &= 0, \\
 w_t + \left( \frac{1}{2} w^2 + \frac{\beta}{3} \zeta \frac{d_+^2 \zeta}{dt^2} + \frac{\beta}{6} \left( \frac{d_+ \zeta}{dt} \right)^2 + p \right)_x &= 0, \\
 v_t + \left( \frac{1}{2} v^2 + \bar{b} (h + \eta + z) + p \right)_x &= 0, \\
 \frac{d_-}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d_+}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x}, \\
 b &= (\rho^- - \rho^+)g/\rho^+, \quad \bar{b} = (\rho^- - \rho^+)g/\rho^+.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $h$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  – толщина нижнего, промежуточного и верхнего слоев;  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – средние скорости в этих слоях (рис.1, а);  $p$  – модифицированное давление на верхней границе течения;  $g$  – ускорение свободного падения;  $z = z(x)$  – форма дна. Заметим, что в приближении Буссинеска

$$h + \eta + \zeta + z = H \equiv \text{const}, \tag{2}$$

причем приближение (2) пригодно как для течений под крышкой, так и для течений со свободной поверхностью, реализованных в экспериментах I и II. Кроме того, будем считать, что средний расход в рассматриваемой системе равен нулю, т.е.

$$Q = hu + \eta v + \zeta w = 0. \tag{3}$$

Условия (2), (3) не противоречат (1) для течений над неподвижным дном. В длинноволновом приближении параметр  $\beta = H^2/L^2$  ( $L$  – характерная длина волны) считается

малым и с точностью до членов  $O(\beta^2)$  уравнения (1) совпадают с уравнениями многослойной мелкой воды, представленными в работе [19]. Одним из преимуществ данной системы (1) является возможность ее записи в следующей дивергентной форме:

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, \quad \zeta_t + (\zeta w)_x = 0, \\ K_t + \left(Ku - \frac{1}{2}u^2 - \frac{\beta}{6}h^2u_x^2 + \frac{\beta}{2}u^2z_x^2 + bh + \bar{b}\eta + bz + p\right)_x &= 0, \\ R_t + \left(Rw - \frac{1}{2}w^2 - \frac{\beta}{6}\zeta^2w_x^2 + p\right)_x &= 0, \\ v_t + \left(\frac{1}{2}v^2 + \bar{b}(h + \eta + z) + p\right)_x &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} K &= u - \frac{\beta}{3}(h^2u_x)_x + \frac{\beta}{2}(huz_x)_x, \\ R &= w - \frac{\beta}{3}(\zeta^2w_x)_x. \end{aligned} \quad (5)$$

Параметры течения в прослойке определяются из (2), (3), т.е.

$$\eta = H - z - h - \zeta, \quad v = -\frac{hu + \zeta w}{\eta}.$$

Параметр  $\beta$  является масштабирующим множителем и может быть выбран равным единице при соответствующем растяжении независимых переменных. Но для сравнения эволюции профиля волн конечной амплитуды, рассчитанных по модели (1) или (4), с экспериментальными данными, более адекватным является значение  $\beta = 1/2$ . Заметим, что это же значение  $\beta$  использовано в работе [20] для интерпретации экспериментальных данных по трансформации приповерхностных и придонных уединенных волн в шельфовой зоне на основе двухслойной негидростатичной модели мелкой воды. При этом диссипация может быть введена в модели (1) и (4) путем добавления правых частей, описывающих турбулентное трение между слоями, аналогично тому, как это сделано в работе [8].

Для численных расчетов распространения внутренних волн над неровным дном с использованием уравнений (4) можно воспользоваться подходом, разработанным в работе [21] для уравнений Грина–Нагди, и в [20] для двухслойного течения стратифицированной жидкости. Формально численная схема является вариантом схемы С.К.Годунова, в которой в качестве эволюционных переменных используются величины  $h, \zeta, K - v, R - v$ , а потоки через боковые границы ячеек определяются на основе задачи о распаде произвольного разрыва для равновесной ( $\beta = 0$ ) модели (4). При этом уравнения вырождаются в известные уравнения трехслойной мелкой воды (первое приближение) и являются гиперболическими для умеренного сдвига скорости в однородных слоях. Особенность данного подхода состоит в том, что скорости  $u, w$  восстанавливаются по известным значениям эволюционных переменных из решения соответствующей краевой задачи для системы уравнений второго порядка (5). Структура этих уравнений такова, что для решения может использоваться метод матричной прогонки. Получаемая численная схема имеет первый порядок, но тем не менее с достаточной точностью воспроизводит особенности эволюции внутренних волн конечной амплитуды, полученные экспериментально.

**Несимметричные уединенные волны второй моды.** В уравнении (1) использовано приближение Буссинеска ( $(\rho^- - \rho^+)/(\rho^- \ll 1)$ ). Поэтому эти уравнения допускают решения, симметричные относительно середины канала ( $y = H/2$ ) в течениях над ровным дном ( $z(x) \equiv 0$ ). Более того, в отсутствие диссипативных членов рассматриваемая система обладает важным классом солитонообразных решений, которые получили название симметричных солитонов второй моды. Так как симметричные уединенные волны дос-

таточно просто реализуются в лабораторных экспериментах в виде коротких интрузий на границе двух однородных слоев различной плотности, они интенсивно исследуются аналитическими, численными и лабораторными методами [9–15]. Для описания распространения симметричных волн в прослойке достаточно рассмотреть течения только в нижней половине канала ( $0 < y < H/2$ ). При этом уравнения (1) сводятся к системе уравнений двухслойной мелкой воды, рассмотренной в [20] (модель 2). В безразмерных переменных ( $\bar{b} = 1, H = 2$ ) уединенные волны, движущиеся с сохранением формы по покоящейся стратифицированной жидкости со скоростью  $D$ , определяются следующим уравнением (формула (17) в [20]):

$$(h')^2 = G(h) = \frac{3(h-h_0)^2(D^2-h+h^2)}{\beta D^2 h_0^2(1-h)}. \quad (6)$$

Здесь  $h_0$  – невозмущенная глубина нижнего слоя,  $\eta_0 = 1 - h_0 > 0$ . Решение уравнения (6) находится в квадратурах и в зависимости от взаимного расположения корней  $h_1 < h_2$  квадратного уравнения  $h^2 - h + D^2 = 0$  относительно  $h_0$  описывает как волны возвышения ( $h_0 < h_1 < h_2$ ), так и волны понижения ( $h_1 < h_2 < h_0$ ) [20]. В рассматриваемом случае  $h_2$  соответствует минимальной глубине нижнего слоя в волне ( $h_2 < h_0$ ). Заметим, что в безразмерных переменных  $D$  совпадает с числом Фруда  $Fr = D/\sqrt{\bar{b}H/2}$ , причем уединенная волна существует для числа Фруда в диапазоне  $0 \leq Fr \leq 1/2$ .

Нетрудно видеть, что предельная волна, соответствующая бесконечно тонкой прослойке ( $h_0 \rightarrow 1$ ), задается уравнением

$$(h')^2 = G_1(h) = \frac{3(1-h)(D^2-h+h^2)}{\beta D^2} \quad (7)$$

и имеет конечную длину. Сравнение с экспериментальными данными, проведенное в [15] для симметричных уединенных волн второй моды, показало, что решение уравнения (7) эффективно описывает границы «захваченного ядра» в уединенной волне, т.е. частиц жидкости, переносимых вместе с волной.

Решения уравнений (6), (7) могут быть использованы в качестве начальных данных в численных расчетах нестационарных проблем для модели (1). Эволюция симметричных уединенных волн второй моды, включая процессы взаимодействия и затухания солитонобразных интрузий, изучена в работах в [16, 20]. При нарушении симметрии течения (несимметричная начальная стратификация, течение над неровным дном) симметричные уединенные волны второй моды, задаваемые решением (6), быстро распадаются, генерируя пакет нелинейных волн первой моды.

На рис.2 показана трансформация симметричной уединенной волны над шельфом. Сплошной линией представлены результаты численного расчета по модели (1), сопоставленные с соответствующими фотографиями эксперимента I (рис.1, а). Из рисунка видно, что влияние топографии приводит к эффективному перераспределению энергии между первой и второй модами волнового движения. В течениях над ровным дном ( $z(x) \equiv 0$ ) аналогичный механизм перераспределения энергии разрушает уединенную волну в случае, когда толщины однородных слоев, разделенных резким пикноклином, существенно различаются. Однако при определенных соотношениях глубин слоев и плотностей в этих слоях можно построить несимметричную волну, распространяющуюся вдоль границы раздела слоев с сохранением формы. Проще всего такое решение строится для резкого пикноклина ( $\eta \ll H$ ). В этом случае точное решение (1) представляется комбинацией солитонобразных решений уравнения (7), имеющих конечную длину. Так, для фиксированно-

го числа Фруда  $0 \leq Fr \leq 1/2$  размерные скорости распространения уединенной волны, соответствующей решению уравнения (7), совпадают при условии

$$\bar{b}(H - h_0) = (b - \bar{b})h_0. \quad (8)$$

Осталось заметить, что для рассматриваемого решения скорость жидкости в «захваченном ядре» совпадает со скоростью волны ( $v \equiv D$ ). Поэтому при условии

$$(H - h_0)/h_0 = 2, \quad \bar{b}/(b - \bar{b}) = 1/2 \quad (9)$$

волна, изображенная на рис.3 для  $Fr = 0.45$  и удовлетворяющая (8), является точным решением (1). Более того, длина волны понижения, изображенной на рис.3, в 2 раза меньше длины волны повышения. Поэтому комбинация из двух волн понижения и одной волны повышения переносит жидкость, заключенную между ними, с постоянной скоростью вдоль границы раздела. В реальных системах толщина прослойки конечна, но решение уравнения (7) с бесконечно тонкой прослойкой, как и в случае симметричных волн [15], хорошо передает границы области «захваченного ядра». В эксперименте I (рис.1, а) жидкость в левом отсеке была подкрашена, и на рис.3 видно, что построенное точное решение воспроизводит форму границ подкрашенной жидкости в несимметричной уединенной волне. Для визуализации внешних границ волны может быть использована как наклонная сетка, нанесенная на заднюю стенку лотка (рис.3), так и предварительное введение краски в промежуточный слой (рис.4).

На рис.4, а сплошной линией представлено решение (1), стационарное в некоторой системе координат, движущейся с постоянной скоростью (бегущая волна). Заметим, что в отличие от симметричных уединенных волн в случае прослойки конечной толщины уединенная волна, удовлетворяющая условиям (9), не генерирует за собой цуг более мелких волн только для дискретного значения чисел Фруда. Поэтому в нестационарном расчете эволюции несимметричной уединенной волны (рис.4, б, сплошная линия) наличие диссипации (в том числе и численной) приводит к генерации волн первой моды за волной. Тем не менее такая волна переносит массу и импульс вдоль прослойки на достаточно большие расстояния, что отличает ее от произвольных коротких интрузий жидкости промежуточной плотности в прослойку между однородными слоями.

**Уединенная волна над склоном.** Рассматривается возможность применения уравнений трехслойной мелкой воды с дисперсией для описания эволюции придонных уединенных волн большой амплитуды. Актуальность проблемы распространения и разрушения внутренних волн на мелководье обсуждается в статье В.Ф.Кукарина и др. (см. ст. наст. сб.). Одной из проблем интерпретации натуральных наблюдений в зоне «заплеска» внутренних волн, отмеченных в данной статье, является наличие двух типов волн в придонной области: симметричные линзы холодной воды и пилообразные волны с промежуточной температурой. Эксперименты по генерации волн над наклонной плоскостью (эксперимент II) показывают существенную зависимость формы волны и характера течения в придонном слое от толщины слоя более плотной жидкости ( $\rho = \rho^-$ ) перед фронтом волны. На рис.5 приведено сравнение лабораторного эксперимента по накату внутренней волны на откос с результатами расчета по модели (1).

Численно решалась задача о разрушении шлюза, геометрия эксперимента изображена на рис.1, б. В численных расчетах над склоном выше линии контакта пикноклина с дном добавлены тонкий слой жидкости плотностью  $\rho^-$ , толщиной  $h = 0.4$  см, а также прослойка промежуточной плотностью  $\bar{\rho} = 0.5 (\rho^+ + \rho^-)$  и толщиной  $\eta = 0.4$  см, для того чтобы избежать проблемы расчета движения фронта внутренней волны по «сухому дну», т.е. с условием  $h = 0$  перед фронтом. Наличие скатывающихся слоев перед фронтом набегающей волны не влияет на ее структуру левее линии контакта границы раздела

с дном. На рис.5, *a* приведена фотография эксперимента (плотная жидкость подкрашена) вместе с расчетом по модели (1) (сплошная линия). Фронт волны находится в 10 см от линии контакта границы раздела однородных слоев с дном. Вблизи линии контакта (в 5 см от нее) различие между экспериментальными и расчетными данными становится более существенным (рис.5, *б*), так как меняется характер течения в головной части волны. В эксперименте при пересечении границы контакта дна с пикноклином (течение по «сухому дну») головная часть волны резко турбулизуется (рис.6) и передний фронт становится круче. Математическая модель (1) не включает эффекты перемешивания. Тем не менее при пересечении линии контакта невозмущенной границы раздела с дном характер течения на фронте волны меняется. На рис.7, *a* приведена финальная стадия эволюции внутренней волны повышения (сплошные линии на рис.5) в зоне «заплеска», полученная в численном расчете набегающей внутренней волны с тонким стекающим слоем плотной жидкости перед ее фронтом. Можно видеть, что жидкость промежуточной плотности отрывается от более плотного слоя ( $\rho = \rho^-$ ) и движется впереди этого слоя в виде *N*-волны, имеющей крутой передний фронт и постепенно убывающую глубину нижнего слоя за фронтом, что характерно для течения слоев с гидростатическим распределением давления. Аналогичные процессы наблюдаются в натурном эксперименте в зоне заплеска внутренних волн [17].

При течении стратифицированной жидкости вниз по склону характер движения меняется. Если вдоль склона распространяется ограниченная масса более плотной жидкости (оползни, подводные лавины, термики), то совместное влияние дисперсии и гравитационных эффектов на форму волны приводит к генерации интенсивного цуга волн, амплитуда которого стабилизируется за счет диссипации и потери массы. На рис.7, *б* приведен численный расчет плотностного течения в задаче о разрушении шлюза (постановка задачи изображена на рис.1, *б*, но угол наклона плоскости отрицательный,  $\alpha = -0.5^\circ$ ). На некотором расстоянии от преграды амплитуда цуга волн стабилизируется и волновой пакет распространяется в виде бегущей волны. Заметим, что для волн, амплитуда которых сравнима с общей глубиной канала, их структура определяется дисперсионными свойствами как нижнего, так и верхнего однородного слоя, аналогично внутренним волнам над шельфом, рассмотренным выше.

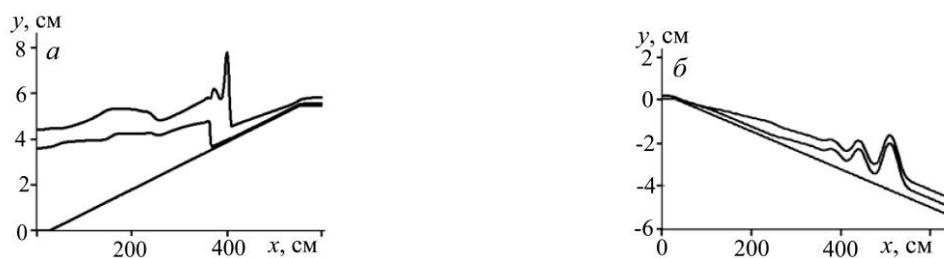


Рис.7. Профили внутренних волн над склоном в задаче о разрушении шлюза (численный расчет по модели (1)).

*a* – набегание волны на откос,  $\alpha = 1.1^\circ$ ; *б* – стекание конечного объема более плотной жидкости (термика) вниз по склону,  $\alpha = -0.5^\circ$ .

\*\*\*

Трехслойная модель (1), рассмотренная в работе, учитывает влияние вертикального ускорения жидкости в однородных слоях на структуру внутренних волн большой амплитуды. Причем речь идет как о внутренних волнах второй моды, представленных интрузиями жидкости вдоль границы раздела однородных слоев, так и о внутренних волнах первой моды, распространяющихся в шельфовой зоне. В работе экспериментально и численно исследованы несимметричные уединенные волны второй моды и построено

простое аналитическое решение, полученное в квадратурах и описывающее форму «захваченного ядра» в таких волнах. Показано, что уравнения (1) адекватно отражают эволюцию придонных внутренних волн большой амплитуды при набегании их на откос, вплоть до зоны заплеска. Однако при пересечении линии контакта основного пикноклина с дном уединенная волна, наблюдаемая в эксперименте, быстро разрушается из-за развития турбулентности и приобретает характерную форму гравитационного течения. Для описания процесса трансформации внутренних волн в зоне заплеска необходимо включение в модель (1) процессов турбулентного перемешивания, что является предметом дальнейших исследований авторского коллектива.

Авторы благодарны рецензентам за конструктивные замечания.

Работа выполнена в рамках интеграционного проекта СО РАН № 117, Программы Президента РАН (проект 23.2) и при поддержке Министерства образования и науки РФ (соглашение 2012-1.5-8503).

## Литература

1. Helfrich K.R., Melville W.K. Long nonlinear internal waves // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2006. V.38. P.395–425.
2. Lamb K.G. Shoaling solitary internal waves: on a criterion for the formation of waves with trapped cores // *J. Fluid Mech.* 2003. V.478. P.81–100.
3. Derzho O.G., Grimshaw R. Asymmetric internal solitary waves with a trapped core in deep fluids // *Phys. Fluids.* 2007. V.19. 096601.
4. Scotti A., Pineda J. Observation of very large and steep internal waves of elevation near the Massachusetts coast // *Geophys. Res. Lett.* 2004. V.31. L22307. P.1–5.
5. Wallace B.C., Wilkinson D.L. Run up of internal waves on a gentle slope // *J. Fluid Mech.* 1988. V.191. P.419–442.
6. Grimshaw R., Pelinovsky E., Talipova T., Kurkina O. Internal solitary waves: propagation, deformation and disintegration // *Nonlinear Processes Geoph.* 2010, V.17. P.633–649.
7. Серебряный А.Н., Пао К.П. Прохождение нелинейной внутренней волны через точку переворота на шельфе // *ДАН.* 2008. Т.420, № 4. С.543–547.
8. Гаврилов Н.В., Ляпидевский В.Ю. Уединенные волны конечной амплитуды в двухслойной жидкости // *ПМТФ.* 2010. Т.51, №4 С.26–38.
9. Davis R.E., Acrivos A. Solitary internal waves in deep water // *J. Fluid Mech.* 1967. V.29. P.593–608.
10. Maxworthy T. On the formation of nonlinear internal waves from the gravitational collapse of mixing regions in two and three dimensions // *J. Fluid Mech.* 1980. V.96. P.47–64.
11. Kao T.W., Pao K. H.-P. Wake collapse in the thermocline and internal solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1979. V.97. P.115–127.
12. Tung K.-K., Chan T.F., Kubota T. Large amplitude internal waves of permanent form // *Studies Appl. Math.* 1982. V.66. P.1–44.
13. Honji H., Matsunaga N., Sugihara Y., Sakai K. Experimental observation of internal symmetric solitary waves in a two-layer fluid // *Fluid Dyn. Res.* 1995. V.15. P.89–102.
14. Stamp A.P., Jacka M. Deep-water internal solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1995. V.305. P.347–371.
15. Гаврилов Н.В., Ляпидевский В.Ю. Симметричные уединенные волны на границе раздела жидкостей // *ДАН.* 2009. Т.429, № 2. С.187–190.
16. Gavrilov N.V., Liapidevskii V., Gavrilova K. Mass and momentum transfer by solitary internal waves in a shelf zone // *Nonlinear Processes Geoph.* 2012. 19. P.265–272.
17. Кукарин В.Ф., Ляпидевский В.Ю., Навроцкий В.В., Храпченков Ф.Ф. Эволюция внутренних волн большой амплитуды в шельфовой зоне моря (см. наст. сб.).
18. Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 420 с.
19. Choi W. Modeling of strongly nonlinear internal gravity waves / *Proceedings of the Fourth International Conference on Hydrodynamics* Eds.: Y. Goda, M. Ikehata, K.Suzuki. 2000. P.453–458.
20. Gavrilov N.V., Liapidevskii V., Gavrilova K. Large amplitude internal solitary waves over a shelf // *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 2011. V.11. P.17–25.
21. Le Metayer O., Gavriluk S., Hank S. A numerical scheme for the Green-Naghdi model // *J. Comput. Phys.* 2010. V.229. P.2034–2045.

Статья поступила в редакцию 30.10.2012 г.

