УДК 577.31

© *Е. В. Романенко*[1], *С. Г. Пушков*[2]
[1]Институт проблем экологии и эволюции им. А. Н. Северцова РАН, Москва
[2]ОАО «Летно-исследовательский институт им. М. М. Громова», г. Жуковский
evromanenko33@mail.ru

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ, РАЗВИВАЕМЫЕ КРЫЛОМ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ФАЗОВОМ СДВИГЕ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ И УГЛОВЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Построена математическая модель плоского жесткого крыла различного удлинения при больших амплитудах линейных и угловых колебаний и различных положениях его оси вращения. При создании модели использованы приближенные выражения для составляющих гидродинамических сил через коэффициенты аэродинамических производных первого порядка. Получены расчетные формулы для вычисления тяги в случае гармонических линейных и угловых колебаний при произвольном фазовом сдвиге между ними. Показано хорошее согласие результатов расчета по полученным формулам с известными численными решениями.

Ключевые слова: крыло, коэффициент тяги, математическое моделирование, линейные и угловые колебания.

В ряде публикаций [1—5] авторы обосновали концепцию математического моделирования пропульсивных характеристик колеблющегося крыла на основе использования обширной базы данных по гидродинамическим характеристикам крыла и коэффициентам аэро-гидродинамических производных первого порядка.

Постановка задачи построения математических моделей в широком диапазоне изменения удлинения крыла и кинематических параметров движения исходила из изучения вопросов гидродинамики плавания дельфинов и рыб [1, 2]. Разработка адекватной модели имеет научное и практическое значение как при оценивании режимов плавания гидробионтов, так и при создании крыльевых движителей, при выборе оптимальных параметров движителя для достижения заданных значений силы тяги и максимальной эффективности.

Возможность в рамках концепции представления характеристик крыла (тяга, мощность, индуктивное сопротивление) в виде полиномиальных зависимостей от конечного числа параметров представляется важной для последующей параметрической идентификации математических моделей в процессе экспериментальных исследований и испытаний движителя.

В настоящей работе особое внимание уделено ранее не рассматривавшейся задаче определения силы тяги в случае гармонических линейных и угловых колебаний крыла при произвольном фазовом сдвиге между ними.

Математическая модель пропульсивной характеристики крыла. Построение математической модели опирается на известные решения малоамплитудной теории колеблющегося крыла [6, 7].

Общее выражение для силы тяги симметричного крыла в плане (рис. 1) было получено в работах [1, 2]:

$$F_{xc} = \lambda_{22}\frac{d(\nu_{nc}\sin\vartheta)}{dt} + \frac{\rho S}{2\cos\alpha_c}\left(C_{yc}^{\alpha}\nu_{nc}V_{yc} + b\left(C_{yc}^{\dot{\alpha}} - \frac{2\lambda_{22}}{\rho S b}\right)\dot{\nu}_{nc}\sin\theta_c - C_{yc}^{\omega_z} b\omega_z V_{yc} - C_{yc}^{\dot{\omega}_z} b^2\dot{\omega}_z\sin\theta_c\right) - \\ - X_i\cos\vartheta - \frac{\rho S U_c^2}{2}C\cos\vartheta. \tag{1}$$

Индекс «c» у некоторых параметров указывает на то, что параметр определен в центре крыла. Здесь и далее α_c — угол атаки, пересчитанный к центру крыла (считается малым); ϑ — угол наклона крыла к горизонтальной оси; λ_{22} — присоединенная масса крыла; ν_{mc} — нормальная скорость; ρ — плотность среды; θ_c — угол между набегающим на крыло потоком и горизонтальной осью; C — сумма коэффициентов сопротивления трения и формы крыла; U_c — мгновенная скорость потока, набегающего на крыло; X_i — индуктивное сопротивление крыла; b — хорда крыла; S — его площадь (одной стороны); $C_{yc}^{\alpha}, C_{yc}^{\dot{\alpha}}, C_{yc}^{\omega_z}, C_{yc}^{\dot{\omega}_z}$ — коэффициенты аэродинамических производных [6], пересчитанные также к центру крыла. Входящие в формулу (1) кинематические параметры имеют следующий вид:

$$V_{xc} = U_0 - \omega_z x\sin\vartheta,$$

$$V_{yc} = V_{y1} + \omega_z x\cos\vartheta,$$

$$\nu_{nc} = V_{y1}\cos\vartheta - U_0\sin\vartheta + \omega_z x = U_c\sin\alpha_c,$$

$$\theta_c = \alpha_c + \vartheta = \operatorname{arctg}\left(V_{yc}/V_{xc}\right),$$

$$U_c^2 = V_{yc}^2 + V_{xc}^2;$$

здесь $V_{y1} = \dot{y}(t)$, $\omega_z = \dot{\vartheta}(t)$, $y(t)$ — вертикальные колебания крыла; U_0 — поступательная скорость движения; x — расстояние от центра крыла до рассматриваемой точки x_1, относительно которой известны кинематические параметры крыла (рис. 1). Точка над буквой здесь и далее обозначает производную по времени.

При осреднении за период колебания выражение (1) по сути представляет в общем виде математическую модель пропульсивной характеристики крыла (сила тяги).

Не останавливаясь на частных вопросах решения (1), подробно изложенных в [1—5], поясним физический смысл составляющих. Подобно решению плоской задачи в случае малых поперечных скоростей и углов наклона профиля [6, 7] полученное решение (1) является аналогом стационарного приближения для гидродинамических сил, которое определяется мгновенным скоростным напором и гидродинамическими характеристиками крыла. Оно включает в себя проекции силы Жуковского на горизонтальную ось, индуктивное и профильное сопротивления (сопротивление крыла при $C_y = 0$). В отличие от стационарного приближения выражение (1) учитывает составляющие гидродинамических сил за счет инерционности среды и нестационарного следа за крылом. Как и в случае малоамплитудной теории, принимается, что значения коэффициентов производных зависят от геометрии крыла и числа Струхаля.

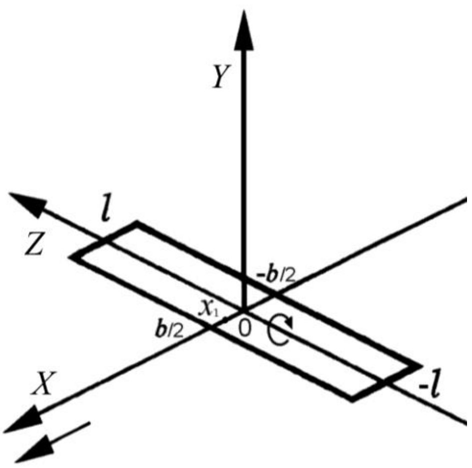

Рис. 1. Схема крыла.
$0XYZ$ — связанная система координат,
l — полуразмах крыла, b — хорда.

Для того чтобы учесть нелинейность вихревого следа за крылом, коэффициенты аэродинамических производных определяются по числу Струхаля, имеющему вид $\mathrm{Sh} = \frac{U_0}{U_a}\mathrm{Sh}_0$, где U_a — амплитудное значение мгновенной скорости, $\mathrm{Sh}_0 = \omega b / U_0$ — число Струхаля в малоамплитудной теории колеблющегося крыла.

Здесь следует оговориться, что в общем случае движения крыла с большими амплитудами угловых и поперечных колебаний учет влияния на коэффициенты аэродинамических производных таких факторов нестационарности, как непостоянство мгновенных значений скорости крыла, кривизна и трансформация вихревого следа, которыми пренебрегают в малоамплитудной теории, является непростой задачей. Формальный подход ввода поправки на число Струхаля обоснован удовлетворительной сходимостью результатов определения характеристик по представленному приближению и соответствующих решений нелинейной задачи в ряде частных случаев кинематики движения и геометрии крыла [1—5].

Представление математической модели в виде (1) является особенно выигрышным в случае умеренных удлинений крыла: $2 \le \lambda \le 5$. При таких значениях λ неплохим приближением для индуктивного сопротивления крыла является оценка «сверху», т. е. по максимуму [2]: $X_i \le \rho\pi S v_n^2 / 4$. В других случаях эта составляющая в выражении для силы тяги должна быть оценена и при необходимости уточнена. В случае крыла бесконечного удлинения более точное решение для индуктивного сопротивления показано в работе [3].

В частных случаях движения, когда фазовый сдвиг между линейными и угловыми колебаниями составляет 90°, математическая модель пропульсивных характеристик крыла была детализирована и доведена до конечных аналитических выражений. Адекватность математической модели была обоснована методами сравнения с известными численными решениями [1, 2].

Представим решение задачи определения силы тяги при произвольных значениях фазового сдвига межу угловыми и линейными колебаниями.

Расчетные формулы для вычисления тяги в случае гармонических линейных и угловых колебаний при произвольном фазовом сдвиге между ними. Подавляющее большинство исследований в теории гидродинамики жесткого колеблющегося крыла выполнены для одного частного случая, когда угловые колебания опережают линейные на 90 градусов. Это объясняется тем, что при фазовом сдвиге, близком к 90° (точнее между 90 и 100°), достигается максимальное значение коэффициента полезного действия. Однако коэффициент тяги при этом, как правило, не является максимальным. Максимальная тяга достигается при углах сдвига фазы около 120° [8]. К интересному выводу приводит анализ детальных экспериментальных исследований кинематики хвостовой лопасти дельфина, у которой фазовый сдвиг между линейными и угловыми колебаниями может отличаться от 90° [4, 5]. Возможно, в различных ситуациях дельфину важно достигать либо максимальной тяги, либо максимального коэффициента полезного действия.

Таким образом, для изучения гидродинамики плавания дельфинов и рыб представляется важным вопрос оценки гидродинамических характеристик крыла в широком диапазоне изменения фазового угла между линейными и угловыми колебаниями. Решение задачи имеет значение и при проектировании крыльевых движителей.

В мировой научной литературе очень мало работ, посвященных задаче расчета гидродинамических сил при произвольном значении фазового угла. При поиске публикаций по рассматриваемой теме были обнаружены лишь три работы [8—10], где рассматривается только плоская задача.

Рассмотрим самый общий случай, когда кинематика произвольной точки крыла определяется выражениями для линейных и угловых колебаний

$$y = y_0 \sin \omega t,$$

$$\vartheta=\vartheta_0\sin(\omega t+\varphi).$$

Здесь φ — фазовый угол между линейными и угловыми колебаниями крыла.

Формула (1) может быть представлена в форме коэффициентов тяги подобно тому, как это было сделано в работе [2]:

$$\overline{C}_{\text{T}}=\frac{2\overline{F_{xc}}}{\rho S U_0^2}=C_{\text{T}1}+C_{\text{T}2}+C_{\text{T}3}+C_{\text{T}4}+C_{\text{T}5}+C_{\text{T}6}. \tag{2}$$

Члены в правой части формулы (2) неравноценны по величине. Предварительные оценки показывают, что наиболее значимы первый, пятый и шестой. Сумма второго, третьего и четвертого членов весьма мала по сравнению с остальными и в первом приближении ею можно пренебречь, тем более что эти члены весьма громоздки. Остальные члены имеют следующий вид:

$$C_{\text{T}1}=C_y^{\alpha}\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{2\lambda_p^2}\left[1-0.125\vartheta_0^2\left(2-\cos 2\phi\right)\right]-\frac{\vartheta_0\sin\phi}{2\lambda_p}\left(1-0.125\vartheta_0^2\right)+\\&+\frac{(\mathrm{Sh}_0)\vartheta_0 X\cos\phi}{2\lambda_p}\left(2-0.25\right)+\frac{(\mathrm{Sh}_0)^2\vartheta_0^2X^2}{2}\left(1-0.125\vartheta_0^2\right)\end{aligned}\right\},$$

$$C_{\text{T}5}=-\frac{\pi}{2}\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\lambda_p^2}\left[0.5-0.1875\vartheta_0^2\left(2-\cos 2\phi\right)+0.0469\vartheta_0^4\left(1+4\sin^2\phi\right)\right]-\\&-\frac{\vartheta_0}{\lambda_p}\sin\phi\left(1-0.875\vartheta_0^2\right)+\vartheta_0^2\left(0.5-0.3125\vartheta_0^2\right)+\\&+\frac{2(\mathrm{Sh}_0)\vartheta_0X}{\lambda_p}\cos\phi\left(0.5-0.125\vartheta_0^2\right)+\\&+\frac{(\mathrm{Sh}_0)^2\vartheta_0^2X^2}{2}\left(1-0.125\vartheta_0^2\right)\end{aligned}\right\},$$

$$C_{\text{T}6}=-C\left\{\begin{aligned}&\left(1-0.25\vartheta_0^2\right)+\frac{1}{2\lambda_p^2}\left[1-0.125\vartheta_0^2\left(2-\cos2\phi\right)\right]+\\&+\frac{2(\mathrm{Sh}_0)\vartheta_0\mathrm{X}}{\lambda_{\mathrm{p}}}\cos\phi\left(0.5-0.125\vartheta_0^2\right)+\frac{(\mathrm{Sh}_0)^2\vartheta_0^2\mathrm{X}^2}{2}\left(1-0.125\vartheta_0^2\right)\end{aligned}\right\}.$$

Здесь и далее $\lambda_p=U_0/\omega y_0$, $\mathrm{Sh}_0=\omega b/U_0$ — число Струхаля, X — относительное (в хордах крыла) расстояние от оси вращения до центра крыла (положительное, если ось вращения расположена ближе к задней кромке, отрицательное, если она расположена ближе к передней кромке).

Полученные формулы нетрудно преобразовать для очень важных случаев чисто линейных и чисто угловых колебаний крыла. В первом случае полагаем ϑ = 0, во втором $\lambda_p=\infty$.

Для чисто линейных колебаний

$$C_{\text{T}1}=C_y^{\alpha}\left(0.5\frac{1}{\lambda_p^2}\right),\quad C_{\text{T}2}=C_{\text{T}3}=C_{\text{T}4}=0,$$

$$C_{\text{T}5} = -\frac{\pi}{2}\left(0.5\frac{1}{\lambda_p^2}\right), \quad C_{\text{T}6} = -C\left(1+\frac{0.5}{\lambda_p^2}\right).$$

Для угловых колебаний

$$C_{\text{T}1} = C_y^{\alpha}\left[\frac{\vartheta_0^2\left(\text{Sh}_0\right)^2 X^2}{2}\left(1-0.125\vartheta_0^2\right)\right],$$

$$C_{\text{T}2} = -\left(C_{yc}^{\dot{\alpha}} - \frac{2\lambda_{22}}{\rho S b}\right)\frac{\left(\text{Sh}_0\right)^2 \vartheta_0^2 X}{2}\left(2-0.375\vartheta_0^2\right),$$

$$C_{\text{T}3} = -C_{yc}^{\omega_z}\frac{\left(\text{Sh}_0\right)^2 \vartheta_0^2 X}{2}\left(1-0.125\vartheta_0^2\right),$$

$$C_{\text{T}4} = 0.1875 C_{yc}^{\dot{\omega}_z}\left(\text{Sh}_0\right)^2 \vartheta_0^4,$$

$$C_{\text{T}5} = -\frac{\pi}{2}\left\{\vartheta_0^2\left(0.5-0.3125\vartheta_0^2\right)+\frac{\left(\text{Sh}_0\right)^2 \vartheta_0^2 X^2}{2}\left(1-0.125\vartheta_0^2\right)\right\},$$

$$C_{\text{T}6} = -C\left\{1-0.25\vartheta_0^2+\frac{\left(\text{Sh}_0\right)^2 \vartheta_0^2 X^2}{2}\left(1-0.125\vartheta_0^2\right)\right\}.$$

Составляющая гидродинамических сил, обусловленная индуктивным сопротивлением крыла ($C_{\text{T}5}$), определена оценкой «сверху» [1—5].

Ниже представим более точное решение для $C_{\text{T}5}$, полученное в работе [3] при рассмотрении плоской задачи, которое нам понадобится далее при сравнении с результатами численного решения в работе [8]:

$$\overline{C}_{\text{T}5} = -\frac{2\pi}{U_0^2}\left(\begin{array}{l} D_1\overline{\nu_{nc}^2\cos\vartheta} + D_2\overline{\nu_{nc}\omega_z\cos\vartheta} + D_3\overline{\frac{\nu_{nc}\dot{\omega}_z}{U_c}\cos\vartheta} + D_4\overline{\frac{\nu_{nc}\dot{\nu}_{nc}}{U_c}\cos\vartheta} + \\ + D_5\overline{\frac{\dot{\nu}_{nc}\omega_z}{U_c}\cos\vartheta} + D_6\overline{\omega_z^2\cos\vartheta} + D_7\overline{\frac{\omega_z\dot{\omega}_z}{U_c}\cos\vartheta} + D_8\overline{\frac{\dot{\nu}_{nc}^2}{U_c^2}\cos\vartheta} + \\ + D_9\overline{\frac{\dot{\nu}_{nc}\dot{\omega}_z}{U_c^2}\cos\vartheta} + D_{10}\overline{\frac{\dot{\omega}_z^2}{U_c^2}\cos\vartheta} \end{array}\right).$$

Здесь (для бесконечного крыла)

$$2\pi D_1 = C_y^{\alpha}\left(1-\frac{1}{2\pi}C_y^{\alpha}\right), \quad 2\pi D_2 = b\left(\frac{1}{\pi}C_y^{\alpha}C_y^{\omega_z}-\frac{1}{2}C_y^{\alpha}-C_y^{\omega_z}+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$2\pi D_3 = b^2\left(\frac{1}{\pi}C_y^{\alpha}C_y^{\dot{\omega}_z}\right), \quad 2\pi D_4 = b\left(\frac{1}{2}C_y^{\alpha}-\frac{1}{\pi}C_y^{\alpha}C_y^{\dot{\alpha}}+C_y^{\dot{\alpha}}-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$2\pi D_5 = b^5\left(-\frac{1}{2}C_y^{\omega_z}+\frac{1}{\pi}C_y^{\dot{\alpha}}C_y^{\omega_z}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}C_y^{\dot{\alpha}}\right), \quad 2\pi D_6 = b^2\left[-\frac{1}{2\pi}\left(C_y^{\omega_z}\right)^2+\frac{1}{2}C_y^{\omega_z}-\frac{\pi}{8}\right],$$

$$2\pi D_7 = b^3\left(-\frac{1}{\pi}C_y^{\omega_z}C_y^{\dot{\omega}_z} + \frac{1}{2}C_y^{\dot{\omega}_z}\right), \quad 2\pi D_8 = b^2\left[\frac{1}{2}C_y^{\dot{\alpha}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2\pi}\left(C_y^{\dot{\alpha}}\right)^2\right],$$

$$2\pi D_9 = b^3\left(-\frac{1}{2}C_y^{\dot{\omega}_z} + \frac{1}{\pi}C_y^{\dot{\alpha}}C_y^{\dot{\omega}_z}\right), \quad 2\pi D_{10} = -\frac{b^4}{2\pi}\left(C_y^{\dot{\omega}_z}\right)^2.$$

В случае чисто угловых колебаний крыла это выражение значительно упрощается и после усреднения по времени принимает следующий вид:

$$C_{\mathrm{T}5} = \left\{\begin{array}{l} -C_{yc}^{\alpha}\left(1-\dfrac{1}{2\pi}C_{yc}^{\alpha}\right)\left[\dfrac{\vartheta_0^2}{2}+\dfrac{\left(\mathrm{Sh}_0\right)^2\vartheta_0^2X^2}{2}\left(1-0.125\vartheta_0^2\right)\right]- \\ -\left[\dfrac{1}{2}C_{yc}^{\omega_z}-\dfrac{1}{2\pi}\left(C_{yc}^{\omega_z}\right)^2-\dfrac{\pi}{8}\right]\left[\dfrac{\left(\mathrm{Sh}_0\right)^2\vartheta_0^2X^2}{2}\left(1-0.125\vartheta_0^2\right)\right] \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Результаты расчета коэффициента тяги по полученным формулам, сравнение с известными численными решениями. В работах [8, 10] приведены результаты численного решения для коэффициента тяги в зависимости от фазового сдвига линейных и угловых колебаний жесткого бесконечного крыла с учетом вязкости. Задача решалась при следующих кинематических параметрах (в наших обозначениях): число Струхаля Sh_0 = 1.57, ϑ_0 = 30°, y_0/b = 0.5, λ_p = 1.27, $X=-1/4$. На рис. 2 показаны результаты упомянутых работ и коэффициент тяги крыла, вычисленный по приведенным выше формулам в зависимости от фазового угла между линейными и угловыми колебаниями. Значения коэффициентов аэро-гидродинамических производных определены по таблицам работы [11] и пересчитаны к центру крыла: C_{yc}^{α} = 3.6216, $C_{yc}^{\dot{\alpha}}$ = 0.8764, $C_{yc}^{\omega_z}$ = 0.9052, $C_{yc}^{\dot{\omega}_z} = -0.1737$.

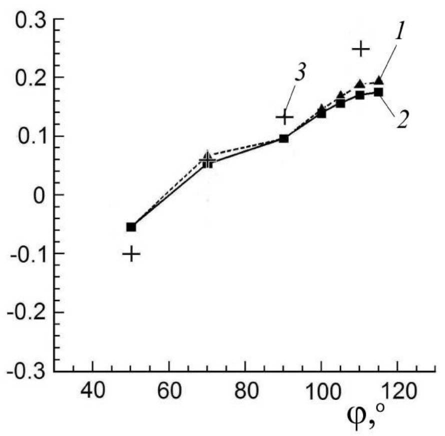

Рис. 2. Сравнение коэффициентов тяги, полученных в работах [8, 10], и коэффициента, вычисленного по приведенным выше формулам в зависимости от фазового угла φ.
1 — данные [8]; *2* — данные [10];
3 — вычисленный по формулам.

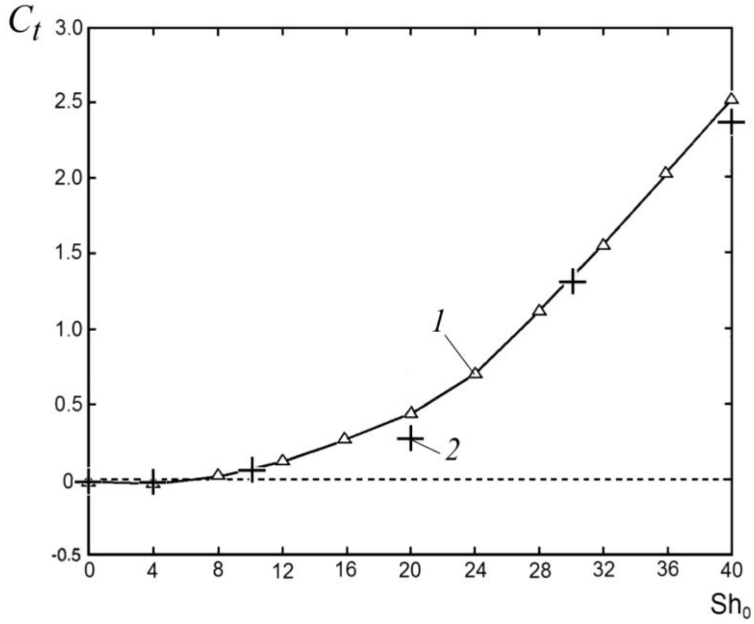

Рис. 3. Сравнение коэффициента тяги, полученного в работе [8] и вычисленного по приведенным выше формулам для чисто угловых колебаний крыла в зависимости от числа Струхаля.
1 — по данным [8]; *2* — вычисленных по формулам.

На рис. 3 представлены результаты численных оценок коэффициента тяги крыла из работы [8] (без учета вязкости) и наши вычисления по формулам для чисто угловых колебаний в зависимости от числа Струхаля. Значения коэффициентов аэрогидродинамических производных определены так же, как и в предыдущем случае и составляют для числа Струхаля, равного 10: $C_{yc}^{\alpha} = 3.157$, $C_{yc}^{\dot{\alpha}} = 1.555$, $C_{yc}^{\omega_z} = 0.789$, $C_{yc}^{\dot{\omega}_z} = -0.0038$. Для чисел Струхаля 20, 30 и 40 коэффициенты производных практически одинаковы и равны: $C_{yc}^{\alpha} = 3.142$, $C_{yc}^{\dot{\alpha}} = 1.571$, $C_{yc}^{\omega_z} = 0.786$, $C_{yc}^{\dot{\omega}_z} = -0.0001$. Амплитуда угловых колебаний $\vartheta_0 = 5°$. В качестве формулы для коэффициента индуктивного сопротивления использовано выражение (3).

Анализ результатов, представленных на рисунках, позволяет считать, что вычисления по приведенным выше формулам неплохо согласуются с данными численных решений. Одновременно результаты, представленные в настоящей и ранее опубликованных работах [1—5], иллюстрируют эффективность предложенного метода расчета гидродинамических характеристик крыла при различных законах движения.

К сожалению, результаты сравнения с имеющимися решениями плоской задачи при умеренных значениях амплитуд колебаний [1—3] не позволяют распространить вывод об адекватности представленной математической модели при значениях φ, отличных от $\pi/2$, на случаи крыла конечного размаха и более широкого диапазона изменения кинематических параметров.

Авторы выражают искреннюю благодарность Р. И. Герасимовой за помощь в подборе литературы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проект № 11-04 00234 а).

Литература

1. *Пушков С. Г., Романенко Е. В.* Гидродинамические силы, действующие на жесткое крыло при его движении с большими амплитудами поперечных и угловых колебаний // Успехи современной биологии. 2000. Т. 120, № 2. С. 207—216.
2. *Романенко В. Е., Пушков С. Г.* Об одном методе расчета гидродинамических характеристик крыла при нестационарном движении // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2011. Т. 4, № 1. С. 69—80.
3. *Пушков С. Г., Романенко Е. В., Лопатин В. Н.* Индуктивное сопротивление жесткого крыла // Успехи современной биологии. 2009. Т. 129, № 1. С. 93—103.
4. *Романенко Е. В.* Гидродинамика рыб и дельфинов. М.: Изд-во КМК, 2001. 412 с.
5. *Romanenko E. V.* Fish and Dolphin Swimming. PENSOFT. Sofia-Moscow. 2002. 430 p.
6. *Некрасов А. И.* Теория крыла в нестационарном потоке. М.: Изд-во АН СССР. М.; Л., 1947. 258 с.
7. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
8. *Pedro G., Suleman A., Djiilali N.* A numerical study of the propulsive efficiency of a flapping hydrofoil // Int. J. Numer. Meth. Fluids 2003. V. 42. P. 493—526.
9. *Mittal R.* Computational modeling in bio-hydrodynamics: trends, challenges and recent advances // IEEE J. Oceanic Engineering. 2004. V. 29, N 3. P. 595—604.
10. *Zhou C. H., Shu C.* A local domain-free discretization method for simulation of incompressible flows over moving bodies // International journal for numerical methods in fluids. 2011. V. 66. P. 162—182.
11. *Белоцерковский С. М.* О коэффициентах вращательных производных // Тр. ЦАГИ. 1958. Вып. 725. С. 5—28.

Статья поступила в редакцию 13.03.2012 г.