

УДК 629.12

© А. Л. Сухоруков

ОАО Центральное конструкторское бюро морской техники «Рубин», Санкт-Петербург
su_andr@yahoo.com

СРЫВНОЙ ФЛАТТЕР КАК ОДНА ИЗ ПРИЧИН ВОЗНИКНОВЕНИЯ ВИБРАЦИЙ ПОДЪЕМНО-МАЧТОВЫХ УСТРОЙСТВ

Рассматривается механизм возникновения автоколебаний подъемно-мачтовых устройств, связанный с их нелинейными гидродинамическими характеристиками, а также воздействие на эту автоколебательную систему внешних периодических сил, обусловленных срывом вихрей по типу дорожки Кармана. Приведены уравнения колебаний подъемно-мачтовых устройств при детерминированных и случайных гидродинамических воздействиях. Показана возможность численного определения нестационарных гидродинамических сил, действующих на подъемно-мачтовые устройства, уже на ранних стадиях проектирования и проведено сопоставление с экспериментальными данными. На основе метода осреднения получены соотношения для определения амплитуд стационарных колебаний при воздействии на автоколебательную систему внешних периодических сил, обусловленных срывом вихрей. При аппроксимации коэффициента боковой силы от угла атаки полиномом третьей степени это соотношение представляет собой уравнение третьей степени относительно квадрата стационарной амплитуды, а при аппроксимации коэффициента боковой силы от угла атаки полиномом пятой степени — уравнение пятой степени. Определены условия устойчивости стационарных режимов колебаний для различных вариантов аппроксимации гидродинамических характеристик подъемно-мачтовых устройств. Показано, что в автономной системе при кубической аппроксимации зависимости коэффициента боковой силы от угла атаки, в случае возникновения неустойчивости, амплитуды колебаний бесконечно возрастают. Для устранения этого эффекта необходимо рассматривать аппроксимацию зависимости коэффициента боковой силы от угла атаки полиномом пятой степени. На примере реальной конструкции подъемно-мачтовых устройств с использованием приведенных соотношений построены их амплитудно-частотные характеристики в резонансной зоне.

Ключевые слова: флаттер, подъемно-мачтовое устройство, срыв вихрей, автоколебания, дорожка Кармана, гидроупругость, устойчивость стационарных режимов колебаний.

К подъемно-мачтовым устройствам современных подводных лодок предъявляются достаточно жесткие требования с точки зрения вибропрочностных характеристик. Оценка уровня вибраций этих устройств является одной из важнейших задач при проектировании. В литературе отмечается два основных механизма возникновения вибраций консольных конструкций в потоке жидкости [1—5]: первый связан с гидродинамической неустойчивостью, характерной для плохообтекаемых конструкций, обусловленной срывом вихрей (срывной флаттер), а второй — с изгибно-крутильным флаттером.

Исследованию вибраций консольных плохообтекаемых конструкций в потоке жидкости посвящено значительное количество теоретических и экспериментальных работ. Применительно к расчетам гидроупругих колебаний судовых конструкций следует особо выделить работы С. И. Девнина [2, 3]. В них показывается, что вибрации конструкций, вызванные нестационарными гидродинамическими силами, влекут за собой изменение структуры потока и вихревого следа, а это, в свою очередь, влияет на величины нестационарных гидродинамических сил. Таким образом, между силами, вызвавшими вибрацию, и деформациями упругой конструкции возникает обратная связь, характерная для

автоколебательных систем. В [2] приведены результаты обширных экспериментальных исследований срывного флаттера. Одна из основных целей этих исследований заключалась в установлении идентичности вихревых следов при вынужденных колебаниях и автоколебаниях, а также установление возможности изучения вихревого следа и соответствующих ему гидродинамических сил методом вынужденных колебаний при числе Струхала $Sh = 0.2$, которое определяет характерную частоту срыва вихрей. В некоторых интервалах скоростей потока наступает синхронизация частоты срыва вихрей с собственной частотой колебаний консольной конструкции, амплитуды колебаний при этом резко возрастают [4, 6, 7]. Синхронизация колебаний является одной из характерных особенностей нелинейных систем [8—10]. Трудность строгого математического описания срывного флаттера позволила ряду исследователей утверждать, что теория срывного флаттера может быть только полуэмпирической.

Математические модели, в которых вихревой след за плохообтекаемым телом моделируется нелинейным дифференциальным уравнением, в 1970-е гг. были применены для описания колебаний упруго закрепленного плохообтекаемого цилиндра [11]. Модели объединяет общая идея о том, что образование вихревой цепочки за двумерным цилиндром хорошо описывается нелинейным осциллятором Ван-дер-Поля. В первых эмпирических моделях [12, 13] уравнение Ван-дер-Поля было использовано для коэффициента подъемной силы. В более поздних моделях это уравнение использовалось для определения и других параметров, например, угла отклонения ближнего следа от направления средней скорости набегающего потока [14, 15]. Специфическая нелинейная зависимость поперечной силы от угла атаки может вызывать колебания, которые в литературе называются галопированием. Первая математическая модель галопирования, описывающая поперечную силу полиномом третьей степени, предложена в работе [16]. Более полная модель (полином седьмой степени) для упругой системы с одной степенью свободы рассматривалась в работах [17, 18].

Дальнейшее развитие модели срывного флаттера получили применительно к упругим системам с распределенными параметрами [19]. Здесь следует отметить большое число публикаций по исследованию устойчивости зданий, промышленных сооружений и мостов при воздействии ветровых нагрузок [20—23].

Во многих моделях срывного флаттера отсутствует внешний периодический источник возбуждения, а колебания обусловлены собственными свойствами автоколебательной системы, в частности нелинейностями аэрогидродинамических характеристик. Вместе с тем, как указывает Я. Г. Пановко [24], срывной флаттер представляет собой сложное явление, в котором, в частности, заключены и обычные вынужденные колебания.

В данной работе предложена схема описания срывного флаттера, которая учитывает вынужденные колебания и позволяет широко использовать результаты численного моделирования обтекания судовых конструкций потоком вязкой жидкости. Нелинейные характеристики стационарных составляющих гидродинамических сил определяются на основе осредненных параметров потока около подъемно-мачтового устройства и обусловлены явлением отрыва потока при закритических углах атаки, что приводит к автоколебаниям конструкции в потоке жидкости без периодического источника возбуждения, а нестационарные гидродинамические нагрузки, обусловленные срывом вихрей, являются дополнительным силовым фактором, действующим на автоколебательную систему в потоке жидкости. Таким образом, срывной флаттер моделируется как воздействие внешней периодической нагрузки на автоколебательную систему.

Расчетная схема и основные уравнения. Для исследования вибраций схематизируем подъемно-мачтовое устройство (ПМУ) прямым неоднородным стержнем (рис. 1). Обозначим через $EJ(x)$ — изгибную жесткость; $m(x)$ — погонную массу; l — длину

стержня. Пренебрегая смещениями в направлении продольной оси, составим уравнение поперечного движения элемента стержня длиной dx в неподвижной системе координат XOY [4, 25]. Получим:

$$m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\partial Q}{\partial x} + q(x, t),$$

где $q(x, t)$ — интенсивность внешней поперечной распределенной силы, действующей на стержень в плоскости XOY ; $y = y(x, t)$ — смещение в направлении OY , перпендикулярном недеформированной оси стержня; Q — поперечная сила в сечении, абсцисса которого x . Здесь и далее инерционные характеристики стержня включают в себя также значения присоединенных масс жидкости.

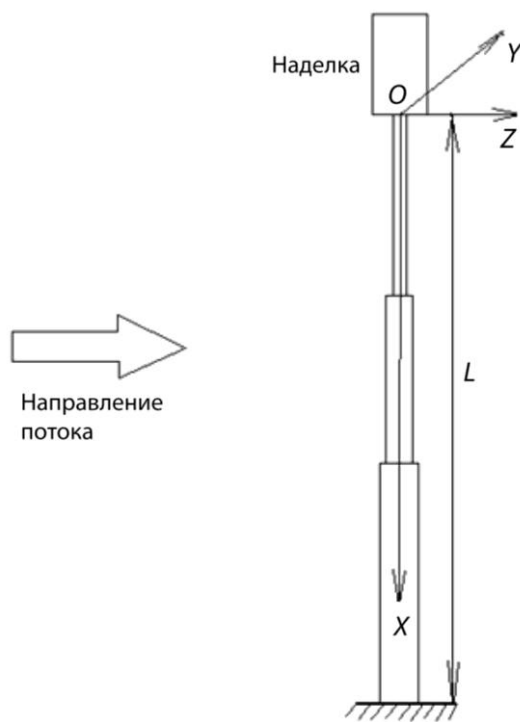


Рис. 1. Схематизация подъемно-мачтового устройства.

Пренебрегая инерцией вращения элемента стержня, составим равенство моментов сил, действующих на выделенный элемент. Удерживая только члены первого порядка малости, получим:

$$(\partial M / \partial x) dx = Q dx.$$

Здесь M — изгибающий момент в поперечном сечении, абсцисса которого равна x .

Применим гипотезу Фойгта, согласно которой напряжение σ зависит не только от деформации ε , но и от скорости деформации $\partial \varepsilon / \partial t$, т. е.

$$\sigma = E \left[\varepsilon + h \left(\partial \varepsilon / \partial t \right) \right].$$

Здесь h — коэффициент внутреннего трения, который будем считать постоянным.

Изгибающий момент равен:

$$M = [1 + h(\partial / \partial t)] EJ(x) \left(\partial^2 y / \partial x^2 \right).$$

Исключив из уравнений поперечную силу Q и изгибающий момент M , получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня:

$$\left(1 + h \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (1)$$

Собственные поперечные колебания ПМУ. При отсутствии внешней нестационарной распределенной силы $q(x, t) = 0$ общее решение уравнения (1) можно представить в виде:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) q_n(t), \quad (2)$$

где $f_n(x)$, $q_n(t)$ — частные решения уравнения (1), которые можно определить методом Фурье. Подставляя (2) в (1) и разделив переменные, получим:

$$\frac{[EJ(x)f_n'']''}{m(x)f_n} = -\frac{\ddot{q}_n}{q_n + h\dot{q}_n} = \omega_n^2 (n = 1, 2, \dots) \text{ или } \ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0 (n = 1, 2, \dots);$$

$$[EJ(x)f_n'']'' - \omega_n^2 m(x)f_n = 0 (n = 1, 2, \dots); \quad (3)$$

где $\frac{d}{dx}(\dots) = (\dots)'$; $2\xi_n = h\omega_n$.

Так как на свободном конце ПМУ $x = 0$, равны нулю изгибающий момент и перерезывающая сила, следовательно

$$f_n''(0) = 0; [EJ(x)f_n''(x)]'_{x=0} = 0. \quad (4)$$

Примем, что другой конец жестко заделан. Тогда при $x = l$:

$$f_n(l) = 0; f_n'(l) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (3) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение изгиба стержня под действием распределенной нагрузки $\omega_n^2 m(x)f_n$, равной силам инерции масс стержня. Отыскание нетривиальных решений уравнения (3), удовлетворяющих краевым условиям (4) и (5), есть классическая задача Штурма—Лиувилля по определению собственных функций и собственных чисел. Сведем дифференциальное уравнение (3) к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого введем новые переменные:

$$u_1 = f(x); u_2 = f'(x); u_3 = EJ(x)f''(x); u_4 = [EJ(x)f''(x)]'. \quad (6)$$

Тогда уравнение (3) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} du_1/dx = u_2 \\ du_2/dx = 1/EJ(x) \\ du_3/dx = u_4 \\ du_4/dx = \omega^2 m(x)u_1 \end{cases}. \quad (7)$$

Используя матричную форму записи, представим систему (7) в виде:

$$d\bar{u}/dx = A(\omega, x)\bar{u}, \quad (8)$$

$$\text{где } \bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}; A(\omega, x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/EJ(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega^2 m(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Предположим, что частота колебаний ω известна. Тогда система уравнений (8) будет иметь известные коэффициенты. С учетом обозначений (6) граничные условия могут быть представлены в следующей форме:

$$u_3(0) = 0; u_4(0) = 0; u_1(l) = 0; u_2(l) = 0.$$

Система дифференциальных уравнений (8) имеет четыре линейно-независимых частных решения $\bar{u}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Эти решения можно найти, интегрируя уравнения (8) при следующих начальных условиях:

$$\bar{u}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{u}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{u}_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \bar{u}_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (8) при фиксированном значении ω , начальных условиях (10) и соотношениях (9) можно провести любым стандартным методом численного интегрирования, например методом Рунге—Кутты.

Общее решение системы (8) может быть представлено в виде суммы четырех линейно-независимых частных решений

$$\bar{u} = C_1\bar{u}_1 + C_2\bar{u}_2 + C_3\bar{u}_3 + C_4\bar{u}_4$$

или в скалярной форме для компонента вектора $\bar{u}$:

$$u_k = C_1u_{k1} + C_2u_{k2} + C_3u_{k3} + C_4u_{k4}.$$

Здесь u_{ki} означает k -ую компоненту вектора $\bar{u}$ в i -ом частном решении.

С учетом граничных условий $u_3(0) = 0$ и $u_4(0) = 0$ постоянные $C_3 = 0$, $C_4 = 0$ и общее решение системы (8) будет иметь вид: $\bar{u} = C_1\bar{u}_1 + C_2\bar{u}_2$.

Граничные условия при $x = l$ эквивалентны следующим равенствам:

$$\begin{cases} C_1u_{11}(l) + C_2u_{12}(l) = 0 \\ C_1u_{21}(l) + C_2u_{22}(l) = 0 \end{cases}. \quad (11)$$

Нетривиальное решение будет в случае, если

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} u_{11}(l) & u_{12}(l) \\ u_{21}(l) & u_{22}(l) \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку величины $u_{ki}(l)$ зависят от значения ω , то и величина определителя $D(\omega)$ является функцией ω . Задавая различные значения ω и повторяя при этом весь процесс решения, вычисляется значение функции $D(\omega)$, после чего можно определить корни этой функции, которые будут частотами собственных колебаний. Для каждой собственной частоты ω_n из уравнений (11) находим:

$$C_2 = -\frac{u_{11}(\omega_n, l)}{u_{12}(\omega_n, l)} C_1.$$

После этого форма собственных колебаний может быть представлена в виде:

$$f_n(x) = C_1 \left[u_{11}(x) - \frac{u_{11}(\omega_n, l)}{u_{12}(\omega_n, l)} u_{12}(x) \right].$$

Если ПМУ имеет на свободном конце $x = 0$ наделку массы m_{nd} , то для перерезывающей силы имеем: $Q|_{x=0} = -m_{nd} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x=0}$. Тогда граничное условие будет иметь вид:

$u_4(0) = m_{nd}\omega^2 u_1(0)$. С учетом граничных условий постоянные $C_3 = 0$, $C_4 = m_{nd}\omega^2 C_1$ и общее решение системы уравнений (8) представимо в форме: $\bar{u} = C_1\bar{u}_1 + C_2\bar{u}_2 + C_4\bar{u}_4$.

Граничные условия при $x = l$ эквивалентны следующим равенствам:

$$\begin{cases} C_1 u_{11}(l) + C_2 u_{12}(l) + m_{nd} \omega^2 C_1 u_{14}(l) = 0 \\ C_1 u_{21}(l) + C_2 u_{22}(l) + m_{nd} \omega^2 C_1 u_{24}(l) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Нетривиальное решение будет в случае, если

$$D(\omega) = \begin{pmatrix} u_{11}(l) + m_{nd} \omega^2 u_{14}(l) & u_{12}(l) \\ u_{21}(l) + m_{nd} \omega^2 u_{24}(l) & u_{22}(l) \end{pmatrix} = 0.$$

Для каждой собственной частоты ω_n из уравнений (12) находим:

$$C_2 = - \frac{u_{11}(\omega_n, l) + m_{nd} \omega_n^2 u_{14}(\omega_n, l)}{u_{12}(\omega_n, l)} C_1.$$

Тогда форма собственных колебаний может быть представлена в виде:

$$f_n(x) = C_1 u_{11}(x) + C_2 u_{12}(x) + C_4 u_{14}(x).$$

Формы и частоты собственных продольных колебаний ПМУ могут быть вычислены аналогично.

Воздействие стационарной гидродинамической нагрузки на ПМУ. Внешние гидродинамические нагрузки, действующие на ПМУ, представимы в виде суммы стационарной и нестационарной составляющей. При воздействии на ПМУ стационарной гидродинамической нагрузки из-за симметрии не наблюдается изгиба в поперечном относительно потока направлении, а наблюдается лишь изгиб в продольном направлении по оси OZ . В этом случае уравнение, определяющее стационарную упругую конфигурацию ПМУ, может быть записано в виде:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EJ(x) \frac{d^2 z}{dx^2} \right] = q_{st}(x), \quad (13)$$

где $q_{st} = c_x(x) \frac{\rho v^2}{2} d_H$ — погонная стационарная гидродинамическая нагрузка; $EJ(x)$ — изгибная жесткость в соответствующем направлении. Здесь c_x — коэффициент гидродинамического сопротивления сечения; v — скорость потока; d_H — характерный размер сечения.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентная (13), может быть записана в виде:

$$d\bar{u}/dx = A\bar{u} + B, \quad (14)$$

$$\text{где } \bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/EJ(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_{st}(x) \end{pmatrix}.$$

Примем, что на верхнем конце ПМУ на наделку действует стационарная гидродинамическая сила P_{ndst} , тогда граничные условия могут быть записаны в виде:

$$u_3(0) = 0; \quad u_4(0) = P_{ndst}; \quad u_1(l) = 0; \quad u_2(l) = 0. \quad (15)$$

Для решения системы (14) с граничными условиями (15) используем метод начальных параметров. При этом решение представимо в виде суперпозиции общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы, полученного при нулевых начальных условиях:

$$\bar{u} = C_1 \bar{u}_1 + C_2 \bar{u}_2 + C_3 \bar{u}_3 + C_4 \bar{u}_4 + \bar{u}_0, \quad (16)$$

$$\text{где } \bar{u}_0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

С учетом граничных условий (15) на свободном конце $C_3 = 0$, $C_4 = P_{ndst}$. Тогда, записывая граничные условия при $x = l$, получим линейную систему для определения C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} C_1 u_{11}(l) + C_2 u_{12}(l) + P_{ndst} u_{14}(l) + u_{10}(l) = 0 \\ C_1 u_{21}(l) + C_2 u_{22}(l) + P_{ndst} u_{24}(l) + u_{20}(l) = 0 \end{cases}.$$

Определив C_1 и C_2 из (16), получим упругую конфигурацию ПМУ и распределение силовых факторов вдоль нее при действии стационарной гидродинамической нагрузки.

Колебания ПМУ при воздействии нестационарных сил. При действии на ПМУ нестационарных гидродинамических сил, в соответствии с принципом суперпозиции, рассматриваются колебания относительно стационарной конфигурации ПМУ под действием стационарных гидродинамических сил. Как уже отмечалось, при воздействии на ПМУ стационарной гидродинамической нагрузки из-за симметрии не наблюдается изгиба в поперечном относительно потока направлении, а наблюдается лишь изгиб в продольном направлении по оси OZ , таким образом, поперечные отклонения ПМУ обусловлены только нестационарными гидродинамическими нагрузками.

Рассмотрим вынужденные поперечные колебания ПМУ в линейной постановке. Предположим, что в уравнении (1) внешние нестационарные распределенные гидродинамические силы можно представить в виде $q(x, t) = q(t)P(x)$. Вынужденные колебания стержня представим в виде разложения в ряд по собственным формам колебаний (2). Подставляя (2) в уравнение (1), получим:

$$(q_n + h\dot{q}_n) \left[EJ(x) \sum_{n=1}^{\infty} f_n'' \right]'' + m(x) \sum_{n=1}^{\infty} f_n \ddot{q}_n = q(t)P(x).$$

Умножим уравнение на $f_n(x)$, где n — любое фиксированное натуральное число, и проинтегрируем в пределах от 0 до l . С учетом свойства ортогональности форм колебаний f_n , после интегрирования получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$m_n (\ddot{q}_n + 2\varepsilon_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n) = Q_n, \quad (n=1, 2, \dots), \quad (17)$$

$$\text{где } m_n = \int_0^l m(x) f_n^2 dx; \quad \omega_n^2 = \frac{k_n}{m_n}; \quad 2\varepsilon_n = h \frac{k_n}{m_n}; \quad k_n = \int_0^l [EJ(x) f_n'']'' f_n dx = \int_0^l EJ(x) (f_n'')^2 dx;$$

$$k_n = \int_0^l [EJ(x) f_n'']'' f_n dx = \int_0^l EJ(x) (f_n'')^2 dx, \text{ а обобщенные силы определяются из выражения:}$$

$$Q_n = q(t) \int_0^l P(x) f_n dx.$$

Из данных дифференциальных уравнений при заданных внешних силах $q(t)P(x)$ можно найти обобщенные координаты $q_n(t)$ поперечных колебаний ПМУ. Когда на ПМУ действует система нестационарных распределенных и сосредоточенных сил (например, сосредоточенная сила, действующая на наделку ПМУ), правую часть уравнения (1) можно представить в виде:

$$q(x, t) = q(t)P(x) + q_r(t)Q_r\delta(x-r),$$

где $\delta(x-r)$ — дельта-функция Дирака. Вычислив интеграл $\int_0^l q(x, t) f_n(x) dx$, получим обобщенную силу:

$$Q_n(t) = q(t) \int_0^l P(x) f_n dx + q_r(t)Q_r(x_r) f_n(x_r).$$

Таким образом, вынужденные колебания системы с распределенными параметрами представляются в виде бесконечной суммы колебаний простых осцилляторов.

Предположим, что внешняя нестационарная гидродинамическая нагрузка представлена в виде:

$$q(x, t) = q(t)P(x) = \cos \omega t \cdot P_{gidr}(x).$$

Тогда обобщенные силы равны: $Q_n = \cos \omega t \int_0^l P_{gidr}(x) f_n dx = Q'_n \cos \omega t$.

С учетом (17)

$$\ddot{q}_n + 2\varepsilon_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{Q'_n}{m_n} \cos \omega t. \quad (18)$$

Решение (18) можно представить в виде $q_n = A_n \cos(\omega t - \varphi_n)$,

где $A_n = \frac{Q'_n}{m_n \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon_n^2 \omega^2}}$; $\varphi_n = \arctg \frac{2\varepsilon_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2}$.

Тогда вынужденные колебания ПМУ записываются в виде:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) A_n \cos(\omega t - \varphi_n).$$

При расчете ходовой вибрации ПМУ предполагается, что подводная лодка движется в надводном положении, соответственно не учитываются коэффициенты присоединенных масс ПМУ, задаются амплитуда $\tilde{\Theta}$ и частота колебаний ω заделанного конца ПМУ. Решение уравнения движения ищем в виде $y(x, t) = \Theta(x)e^{i\omega t}$. Тогда граничные условия будут иметь вид: $u_1(l) = \tilde{\Theta}$; $u_2(l) = 0$; $u_3(0) = 0$; $u_4(0) = m_{nd}\omega^2 u_1(0)$.

С учетом граничных условий постоянные $C_3 = 0$, $C_4 = m_{nd}\omega^2 C_1$ и общее решение системы (8):

$$\bar{u} = C_1 \bar{u}_1 + C_2 \bar{u}_2 + C_4 \bar{u}_4. \quad (19)$$

Граничные условия при $x = l$ эквивалентны следующим равенствам:

$$\begin{cases} C_1 u_{11}(l) + C_2 u_{12}(l) + m_{nd} \omega^2 C_1 u_{14}(l) = \tilde{\Theta} \\ C_1 u_{21}(l) + C_2 u_{22}(l) + m_{nd} \omega^2 C_1 u_{24}(l) = 0 \end{cases} \quad (20)$$

При заданных амплитуде $\tilde{\Theta}$ и частоте ω из системы (20) определяются постоянные C_1 и C_2 , а затем на основе соотношения (19) формы колебаний, углы наклона ПМУ, распределения изгибающего момента и перерезывающей силы вдоль ПМУ.

Вынужденные колебания ПМУ при случайных гидродинамических воздействиях. В рамках данного подхода возможен расчет вынужденных колебаний ПМУ при случайных нестационарных гидродинамических воздействиях, которые моделируются стационарным случайным процессом с заданной спектральной плотностью.

Расчет вероятностных характеристик колебаний ПМУ по заданным вероятностным характеристикам нестационарных гидродинамических сил выполняется на основании формулы:

$$S_y(\omega) = |\Phi_{Q \rightarrow y}(i\omega)|^2 S_Q(\omega),$$

где $S_Q(\omega)$ – спектральная плотность входного процесса (нестационарных гидродинамических сил); $S_y(\omega)$ – спектральная плотность выходного процесса (колебаний ПМУ); $|\Phi_{Q \rightarrow y}(i\omega)|$ – модуль передаточной функции, определяемый как отношение амплитуд выходного процесса (колебаний ПМУ) к амплитуде входного процесса (гармонических колебаний нестационарной гидродинамической силы). С учетом предыдущих рассуждений:

$$|\Phi_{Q \rightarrow y}(i\omega)| = \frac{Q'_n}{m_n \sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon_n^2 \omega^2}}.$$

Дисперсия выходного процесса определяется по формуле:

$$D_y = \int_0^\infty S_y(\omega) d\omega = \int_0^\infty |\Phi_{Q \rightarrow y}(i\omega)|^2 S_Q(\omega) d\omega.$$

Спектральную плотность нестационарной гидродинамической силы аппроксимируем формулой [20]:

$$S_Q(\omega) = \frac{2D_Q \alpha}{\pi} \frac{\omega^2 + b^2}{\omega^4 + 2a^2 \omega^2 + b^4}, \quad (21)$$

где $a^2 = \alpha^2 - \beta^2$, $b^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\alpha = 0.21\beta$. Между средним периодом колебаний силы $\bar{T}_Q$ и параметром β существует зависимость: $\bar{T}_Q = \frac{2\pi}{\beta}$. Для вычисления спектральной плотности нестационарной гидродинамической силы необходимо по заданному значению амплитуды 3%-ой обеспеченности $A_{0.3}$ определить дисперсию D_Q на основе соотношения:

$$A_{0.3} = 2.64 \sqrt{D_Q},$$

а затем воспользоваться соотношением (21). По правилу «трех стандартов» определим максимальные амплитуды вынужденных колебаний ПМУ, соответствующие, например, первой форме с вероятностью 0.997:

$$y_{\max}^{0.997}(x) = f_1(x) \cdot 3\sqrt{D_y}.$$

Гидродинамическое демпфирующее воздействие на ПМУ. Рассмотрим механизм гидродинамического демпфирующего воздействия на ПМУ. При поперечных колебаниях какого-либо сечения ПМУ (рис. 2) в потоке жидкости, движущемся со скоростью v , это сечение обтекается под некоторым углом атаки α , равным: $\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial t}$.

При этом возникает демпфирующая (боковая) сила, направленная в сторону противоположную движению сечения. На рис. 2 представлена характерная зависимость коэффициента боковой силы c_y от угла атаки α для симметричного профиля поперечного сечения ПМУ.

Наблюдается явление отрыва потока с уменьшением коэффициента боковой силы при закритических углах атаки. Эта характеристика может быть аппроксимирована полиномом по нечетным степеням угла атаки α :

$$c_y(\alpha) = c_y^a \alpha + c_y^{\alpha^3} \alpha^3 + c_y^{\alpha^5} \alpha^5. \quad (22)$$

В линейной постановке, удерживая лишь первый член разложения (22), значение погонной гидродинамической демпфирующей силы будет:

$$\begin{aligned} F_y &= -c_y(\alpha) \frac{\rho \left(v^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right)}{2} d_H = -c_y(\alpha) \frac{\rho v^2 (1 + \alpha^2)}{2} d_H \approx \\ &\approx -c_y^a \alpha \frac{\rho v^2}{2} d_H = -c_y^a \frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\rho v^2}{2} d_H = -\beta \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned} \quad (23)$$

где d_H — характерный размер сечения; $\beta = c_y^a \frac{1}{v} \frac{\rho v^2}{2} d_H$.

Подставляя (23) в (1) и выполняя аналогичные преобразования, будем иметь:

$$\ddot{q}_n + 2\varepsilon_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{Q'_n}{m_n} \cos \omega t,$$

где $2\varepsilon_n = \frac{k_n h + \tilde{\beta}_n}{m_n}$; $\tilde{\beta}_n(x) = \int_0^l \beta(x) f_n^2 dx$.

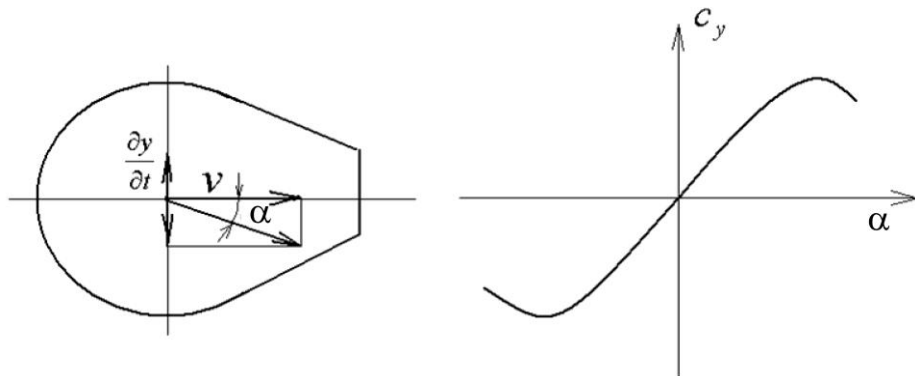


Рис. 2. Гидродинамическое демпфирующее воздействие на обтекатель ПМУ и характерная зависимость коэффициента боковой силы от угла атаки.

Таким образом, в линейной области гидродинамические силы наряду с силами внутреннего трения оказывают демпфирующее воздействие на колебания ПМУ в потоке жидкости.

Гидродинамическое воздействие на ПМУ. Нелинейная модель. Как указывалось выше, более точная аппроксимация зависимости коэффициента боковой силы от угла атаки может быть осуществлена на основе нелинейной модели. В этом случае в движении ПМУ появляются новые эффекты, которые не могут быть выявлены в рамках линейной модели. Ограничимся вначале кубической аппроксимацией соответствующей зависимости, тогда гидродинамическая сила равна:

$$F_y = -(c_y^a \alpha + c_y^{\alpha^3} \alpha^3) \frac{\rho v^2}{2} d_H = -c_y^a \frac{1}{v} \frac{\rho v^2}{2} d_H \frac{\partial y}{\partial t} - c_y^{\alpha^3} \frac{1}{v^3} \frac{\rho v^2}{2} d_H \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^3 = -\beta \frac{\partial y}{\partial t} - \eta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^3.$$

Поскольку при подстановке F_y в (1) получается нелинейное уравнение, оно не может быть проинтегрировано методом Фурье. Решение этого уравнения будем искать в виде: $y(x, t) = q_1(t) f_1(x)$, где $f_1(x)$ — форма основного тона колебаний, соответствующая уравнению (3). Подставляя этот вид решения в нелинейное уравнение, умножая на $f_1(x)$ и интегрируя в пределах от 0 до l получим:

$$\ddot{q}_1 + \frac{k_1 h + \tilde{\beta}_1}{m_1} \dot{q}_1 + \frac{\tilde{\eta}}{m_1} \dot{q}_1^3 + \frac{k_1}{m_1} q_1 = \frac{Q'_1}{m_1} \cos \omega t. \quad (24)$$

$$\text{Обозначим } T(t) = q_1(t); \quad p^2 = \frac{k_1}{m_1}; \quad \mu_1 = \frac{k_1 h + \tilde{\beta}_1}{m_1}; \quad \mu_2 = \frac{\tilde{\eta}}{m_1}.$$

Тогда уравнение (24) можно записать в виде:

$$\ddot{T} + \mu_1 \dot{T} + \mu_2 \dot{T}^3 + p^2 T = \frac{Q'_1}{m_1} \cos \omega t.$$

Рассмотрим случай отсутствия вынуждающей силы от срыва вихрей, тогда будем иметь однородное нелинейное уравнение:

$$\ddot{T} + \mu_1 \dot{T} + \mu_2 \dot{T}^3 + p^2 T = 0, \quad (25)$$

где p — собственная частота колебаний ПМУ первого тона;

$$\mu_1 = \frac{k_1 h + \tilde{\beta}_1}{m_1} = \frac{h \int_0^l EJ(x) (f_1'')^2 dx + \int_0^l c_y^a \frac{1}{v} \frac{\rho v^2}{2} d_H f_1^2(x) dx}{\int_0^l m(x) f_1^2(x) dx}; \quad \mu_2 = \frac{\tilde{\eta}}{m_1} = \frac{\int_0^l c_y^{\alpha^3} \frac{1}{v^3} \frac{\rho v^2}{2} d_H f_1^4(x) dx}{\int_0^l m(x) f_1^2(x) dx}.$$

Для решения уравнения (25) воспользуемся методом осреднения [9, 10, 26—28]. Метод осреднения был первоначально применен Ван-дер-Полем для исследования автоколебаний, а впоследствии развит Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским применительно к большому кругу важных задач. Метод основан на предположении, что движение системы настолько мало отличается от гармонического, что в течение одного «периода» этим отличием можно пренебречь, но от периода к периоду амплитуда и фаза колебания медленно меняются.

Пусть уравнение движения в виде, разрешенном относительно второй производной перемещения, представимо в форме

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t), \quad (26)$$

где правая часть — нелинейная, вообще говоря, функция x , $\dot{x}$ и функция времени.

Предполагается, что решение уравнения (26) мало отличается от гармонического колебания с некоторой частотой ω . Для этого, очевидно, необходимо, чтобы правая часть уравнения (26) мало отличалась от величины $-\omega^2 x$. Следовательно, предположение о близости движения к гармоническому колебанию с частотой ω эквивалентно предположению о малости функции:

$$\Phi(x, \dot{x}, t) = F(x, \dot{x}, t) + \omega^2 x.$$

Поэтому в дальнейшем, вместо уравнения (26) будем рассматривать эквивалентное ему уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \Phi(x, \dot{x}, t), \quad (27)$$

правая часть которого предполагается малой.

Решение уравнения (27) отыскивается в форме $x = a \sin(\omega t + \varphi)$,

где a и φ — медленно изменяющиеся функции времени (т. е. функции, изменением которых в течение периода $2\pi/\omega$ можно пренебречь, учитывая лишь их изменение от периода к периоду). Применение процедуры осреднения [27] приводит к следующим соотношениям для определения средних за период скоростей изменения амплитуды и фазы:

$$\dot{a} = (\omega/2\pi) \Delta a = (1/\omega) B(a, \varphi); \quad \dot{\varphi} = (\omega/2\pi) \Delta \varphi = -[1/(\omega a)] C(a, \varphi), \quad (28)$$

$$\text{где } B(a, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi\left(a \sin \vartheta, a \omega \cos \vartheta, \frac{\vartheta - \varphi}{\omega}\right) \cos \vartheta d\vartheta; \quad C(a, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi\left(a \sin \vartheta, a \omega \cos \vartheta, \frac{\vartheta - \varphi}{\omega}\right) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (29)$$

причем в подынтегральных выражениях a , φ считаются постоянными.

Выражения (28) представляют собой дифференциальные уравнения, определяющие «медленное» изменение амплитуды и фазы. Если интересуют такие стационарные процессы, при которых и амплитуда и фаза остаются постоянными, то следует принять $\dot{a} = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, и стационарные значения амплитуды A и фазы φ_0 определяются уравнениями

$$B(A, \varphi_0) = 0; \quad C(A, \varphi_0) = 0.$$

Исследовав поведение интегралов уравнений (28) при начальных условиях, мало отличающихся от A и φ_0 , можно определить, устойчив или неустойчив стационарный режим.

Для автономных систем, т. е. для систем, в уравнения движения которых время явно не входит, $\Phi(x, \dot{x}, t) = \Phi(x, \dot{x})$. В этом случае коэффициенты B и C от фазы φ не зависят и уравнения (28) получают вид

$$\dot{a} = (1/\omega) B(a); \quad \dot{\varphi} = -[1/(\omega a)] C(a), \quad (30)$$

$$\text{где } B(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a \sin \vartheta, a \omega \cos \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta; \quad C(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(a \sin \vartheta, a \omega \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (31)$$

Возвращаясь к нашему уравнению (25), предполагаем, что его решение мало отличается от гармонического с частотой p . Обозначая $p \equiv \omega$, запишем уравнение в виде:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = -\mu_1 \dot{T} - \mu_2 \dot{T}^3 \text{ или } \ddot{T} + \omega^2 T = \Phi(T, \dot{T}), \text{ где } \Phi(T, \dot{T}) = -\mu_1 \dot{T} - \mu_2 \dot{T}^3. \quad (32)$$

Решение уравнения (32) ищем в виде: $T = a \sin \vartheta$; $\dot{T} = a\omega \cos \vartheta$; $\vartheta = \omega t + \varphi$.

Тогда будем иметь: $\Phi = -\mu_1 a\omega \cos \vartheta - \mu_2 a^3 \omega^3 \cos^3 \vartheta$.

В соответствии с (31):

$$B(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-\mu_1 a\omega \cos \vartheta - \mu_2 a^3 \omega^3 \cos^3 \vartheta] \cos \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \left[-\mu_1 a\omega\pi - \mu_2 a^3 \omega^3 \frac{3\pi}{4} \right].$$

$$C(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-\mu_1 a\omega \cos \vartheta - \mu_2 a^3 \omega^3 \cos^3 \vartheta] \sin \vartheta d\vartheta = 0.$$

Тогда с использованием соотношений (30), получим:

$$\dot{a} = \frac{1}{2} \left[-\mu_1 a - \mu_2 a^3 \omega^2 \frac{3}{4} \right]; \quad \dot{\varphi} = 0. \quad (33)$$

Стационарным режимам соответствует уравнение (возвращаемся к переменной p):

$$-a \left(\mu_1 + \mu_2 a^2 p^2 \frac{3}{4} \right) = 0.$$

Решая уравнение, получим: $a_1 = 0$; $a_2 = \frac{2}{p} \sqrt{-\frac{\mu_1}{3\mu_2}}$. Корень a_1 соответствует случаю

отсутствия колебаний. Другой корень a_2 существует, если μ_1 и μ_2 имеют разные знаки, что соответствует явлению стационарного отрыва потока при закритических углах атаки. Для исследования устойчивости состояний равновесия, рассмотрим малое возмущение около этих состояний

$$a = a_0 + \varepsilon u, \quad (34)$$

где ε — бесконечно малый параметр; a_0 — амплитуда, соответствующая стационарному режиму.

Подставляя (34) в (33) и сохраняя только линейно зависящие от ε слагаемые, будем иметь:

$$\dot{u} + \frac{1}{2} \left[\mu_1 + \frac{9}{4} \mu_2 a_0^2 p^2 \right] u = 0.$$

Решение уравнения ищем в виде $u = C_1 e^{\lambda t}$. Устойчивым решениям отвечают отрицательные значения λ . Подставляя, будем иметь:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left[\mu_1 + \frac{9}{4} \mu_2 a_0^2 p^2 \right] < 0 \text{ или } \mu_1 + \frac{9}{4} \mu_2 a_0^2 p^2 > 0. \quad (35)$$

При заданной зависимости коэффициента боковой силы от угла атаки ПМУ возможны случаи, когда $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ или $\mu_1 > 0$, $\mu_2 < 0$, что отвечает зависимости $c_y(\alpha)$, учитывающей отрывные явления.

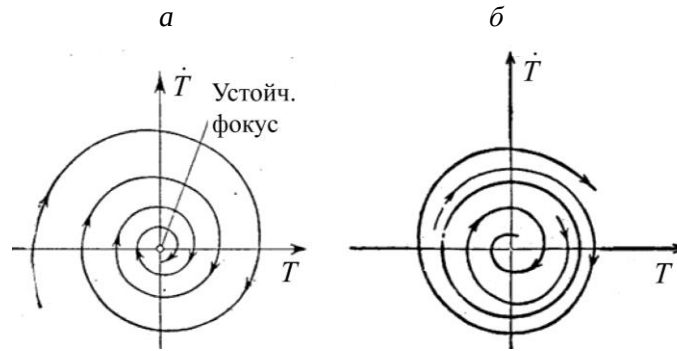


Рис. 3. Фазовые траектории:
 $a — \mu_1 > 0, \mu_2 > 0$; $b — \mu_1 > 0, \mu_2 < 0$.

Первый случай: $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$. Имеется единственное состояние равновесия $a_1 = 0$. В соответствии с условием (35) оно устойчиво. Колебания ПМУ будут затухающими. На фазовой плоскости $(T, \dot{T})$ этому состоянию соответствует устойчивый фокус (рис. 3, а).

Второй случай: $\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$. Существуют оба положения равновесия $a_1 = 0$; $a_2 = \frac{2}{p} \sqrt{-\frac{\mu_1}{3\mu_2}}$. Положение a_1 — устойчиво. Положение a_2 — неустойчиво, на фазовой плоскости $(T, \dot{T})$ ему соответствует неустойчивый предельный цикл (рис. 3, б). При $a < a_2$ колебания затухают; при $a > a_2$ колебания неограниченно возрастают. Таким образом, состояние равновесия $a_1 = 0$ устойчиво в малом. Если начальное возмущение превышает пороговое значение, наблюдается неограниченный рост колебаний. Однако такое неограниченное возрастание практически не возможно, так как требует все увеличивающегося притока энергии в систему. Это значит, что кубическое разложение, взятое для аппроксимации зависимости $c_y(\alpha)$ недостаточно, и для устранения этого эффекта нужно учитывать члены более высоких порядков.

Исследуем зависимость собственной частоты нелинейной системы от амплитуды. Для этого подставим решение в виде $T = A \cos \omega_* t + B \sin \omega_* t$ в уравнение (25). Приводя подобные члены при тригонометрических функциях, и рассматривая лишь линейные относительно $\cos \omega_* t$ и $\sin \omega_* t$ слагаемые, придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} -A\omega_*^2 = -\mu_1 B\omega_* - \frac{3}{4}\mu_2 B\omega_* - p^2 A \\ -B\omega_*^2 = \mu_1 A\omega_* + \frac{3}{4}\mu_2 A\omega_* - p^2 B \end{cases}. \quad (36)$$

Домножим первое уравнение системы (36) на A , а второе на B и сложим, тогда получим $\omega_*^2 = p^2$. Таким образом, для данной нелинейной системы собственная частота колебаний не зависит от амплитуды и соответствует собственной частоте линейной системы. Другими словами, скелетная кривая вырождается в вертикальную прямую $\omega_*(a) = p$.

Рассмотрим теперь воздействие внешней периодической силы, обусловленной срывом вихрей с частотой ω , на подъемно-мачтовое устройство. В качестве примера на рис. 4 приведены результаты численного расчета обтекания вязкой жидкостью ПМУ «Кодак». Расчет проведен в программном комплексе ANSYS/Fluent на основе численно-

го решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса. Для замыкания уравнений использовалась модель турбулентности Ментера (Shear Stress Transport, SST). Полученные расчетные результаты сопоставлялись с соответствующими экспериментальными данными. Так, различие между расчетным и экспериментальным значением числа Струхала $Sh = \frac{\omega d_H}{2\pi\nu}$, определяющим безразмерную частоту срыва вихрей, составило 10 %, между соответствующими значениями коэффициента силы сопротивления — 8 %, а различие между соответствующими значениями амплитудного коэффициента нестационарной боковой силы — 10 %. Данное рассогласование может быть связано, с одной стороны, с тем, что в расчете рассматривалось плоское обтекание ПМУ, а с другой — возможными погрешностями самого эксперимента. В дальнейшем предполагается проведение расчетов в трехмерной постановке. Приведенные результаты показывают, что численные методы расчета течений вязкой жидкости могут использоваться для оценок гидродинамических воздействий на подъемно-мачтовые устройства уже на ранних стадиях проектирования.

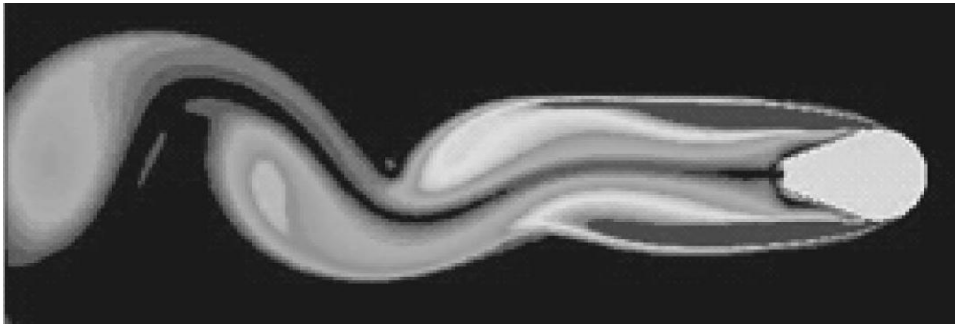


Рис. 4. Формирование дорожки Кармана при обтекании ПМУ (поле завихренности).

Уравнение движения ПМУ при воздействии внешней периодической силы, обусловленной срывом вихрей с частотой ω , может быть записано в виде:

$$\ddot{T} + \mu_1 \dot{T} + \mu_2 \dot{T}^3 + p^2 T = F \cos \omega t. \quad (37)$$

Уравнение (37) описывает нелинейную неавтономную динамическую систему. Для его решения, как и ранее, применим метод осреднения. Введем функцию $\Phi(T, \dot{T}, t)$:

$$\Phi(T, \dot{T}, t) = \omega^2 T - \mu_1 \dot{T} - \mu_2 \dot{T}^3 - p^2 T + F \cos \omega t;$$

$$T = a \sin \vartheta; \quad \dot{T} = a\omega \cos \vartheta; \quad \vartheta = \omega t + \varphi.$$

Тогда будем иметь:

$$\Phi = \omega^2 a \sin \vartheta - \mu_1 a \omega \cos \vartheta - \mu_2 a^3 \omega^3 \cos^3 \vartheta - p^2 a \sin \vartheta + F \cos(\vartheta - \varphi).$$

В соответствии с (29)

$$\begin{aligned} B(a, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\omega^2 a \sin \vartheta - \mu_1 a \omega \cos \vartheta - \mu_2 a^3 \omega^3 \cos^3 \vartheta - p^2 a \sin \vartheta + F \cos(\vartheta - \varphi) \right] \cos \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\mu_1 a \omega \pi - \mu_2 a^3 \omega^3 \frac{3\pi}{4} + F \pi \cos \varphi \right] \end{aligned}$$

$$C(a, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\omega^2 a \sin \vartheta - \mu_1 a \omega \cos \vartheta - \mu_2 a^3 \omega^3 \cos^3 \vartheta - p^2 a \sin \vartheta + F \cos(\vartheta - \varphi) \right] \sin \vartheta d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\omega^2 a \pi - p^2 a \pi + F \pi \sin \varphi \right]$$

С учетом (28):

$$\dot{a} = \frac{1}{2} \left[-\mu_1 a - \frac{3}{4} \mu_2 a^3 \omega^2 + \frac{F}{\omega} \cos \varphi \right]; \quad \dot{\varphi} = -\frac{1}{2} \left[\omega - \frac{p^2}{\omega} + \frac{F}{\omega a} \sin \varphi \right]. \quad (38)$$

Тогда для стационарных режимов колебаний:

$$-\mu_1 a - \frac{3}{4} \mu_2 a^3 \omega^2 = -\frac{F}{\omega} \cos \varphi; \quad \omega a - \frac{p^2 a}{\omega} = -\frac{F}{\omega} \sin \varphi. \quad (39)$$

Возведем оба равенства (39) в квадрат и сложим, тогда получим кубическое относительно a^2 уравнение для определения зависимости амплитуды вынужденных колебаний a от частоты возбуждения ω :

$$\left(\frac{3\mu_2 \omega^3}{4} \right)^2 a^6 + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 \omega^4 a^4 + (\mu_1 \omega)^2 a^2 + (\omega^4 a^2 - 2p^2 a^2 \omega^2 + p^4 a^2) = F^2. \quad (40)$$

В резонансном случае, при $p = \omega$:

$$\left(\frac{3\mu_2 \omega^3}{4} \right)^2 a^6 + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 \omega^4 a^4 + (\mu_1 \omega)^2 a^2 = F^2.$$

Поделив второе уравнение (39) на первое, получим соотношение для определения фазы:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega a - \frac{p^2 a}{\omega}}{-\mu_1 a - \frac{3}{4} \mu_2 a^3 \omega^2}.$$

Тогда в резонансном случае: $\operatorname{tg} \varphi = 0$; $\varphi = 0$.

Исследуем теперь устойчивость стационарных режимов колебаний. В соответствии с идеей метода возмущений рассмотрим малые отклонения от стационарного режима:

$$a = a_0 + \varepsilon u; \quad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon w, \quad (41)$$

где ε — бесконечно малый параметр; a_0, φ_0 — равновесные значения амплитуды и фазы.

Подставляя (41) в (38), и сохраняя только линейно зависящие от ε слагаемые, получим систему уравнений в возмущениях:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{1}{2} \left[-\mu_1 u - \frac{9}{4} \mu_2 a_0^2 \omega^2 u - \frac{F}{\omega} \sin \varphi_0 w \right] \\ \dot{w} = -\frac{1}{2} \frac{F}{\omega a_0} \cos \varphi_0 w \end{cases}. \quad (42)$$

Система уравнений (42) может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \dot{u} = K_{11}u + K_{12}w \\ \dot{w} = K_{21}u + K_{22}w \end{cases} \quad (43)$$

Решение системы (43) будем искать в виде: $u = C_1 e^{\lambda t}$; $w = C_2 e^{\lambda t}$. Подставляя и сокращая на $e^{\lambda t}$, получим:

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{2} \left(-\mu_1 - \frac{9}{4} \mu_2 a_0^2 \omega^2 \right) - \lambda \right] C_1 - \frac{F}{2\omega} \sin \varphi_0 C_2 = 0 \\ \left[-\frac{1}{2} \frac{F}{\omega a_0} \cos \varphi_0 - \lambda \right] C_2 = 0 \end{cases} \quad (44)$$

Нетривиальное решение будет в случае, если определитель системы (44) равен нулю. Приходим к следующему характеристическому уравнению:

$$\left(\frac{\mu_1}{2} + \frac{9}{8} \mu_2 a_0^2 \omega^2 + \lambda \right) \left(\lambda + \frac{1}{2} \frac{F}{\omega a_0} \cos \varphi_0 \right) = 0. \quad (45)$$

Для резонансного случая $\cos \varphi_0 = 1$ и уравнение (45) представимо в виде:

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Корни этого уравнения имеют отрицательные действительные части в случае, если:

$$b(a_0) = \frac{1}{2} \left(\mu_1 + \frac{9}{4} \mu_2 a_0^2 \omega^2 + \frac{F}{\omega a_0} \right) > 0; \quad c(a_0) = \frac{1}{2} \left(\mu_1 + \frac{9}{4} \mu_2 a_0^2 \omega^2 \right) \left(\frac{1}{2} \frac{F}{\omega a_0} \right) > 0.$$

Таким образом, условием устойчивости стационарных режимов колебаний является:

$$\mu_1 + \frac{9}{4} \mu_2 a_0^2 \omega^2 > 0.$$

Это условие формально совпадает с условием устойчивости стационарных режимов колебаний автономной системы (35), однако амплитуда a_0 здесь соответствует вынужденным колебаниям. Таким образом, если колебания автономной системы устойчивы, то соответствующий резонансный режим вынужденных колебаний под действием срыва вихрей также устойчив.

В качестве примера на рис. 5 приведены характерные зависимости безразмерной амплитуды a_0 / a_{stat} от безразмерной частоты возбуждения ω / p для стационарных режимов колебаний при различных значениях амплитуды вынуждающей силы F . Здесь a_{stat} — перемещение, соответствующее действию стационарной силы F . Эти зависимости получены на основе соотношения (40) и соответствуют устойчивым режимам колебаний. Четко прослеживается резонансный характер кривых.

Как уже указывалось выше, в автономной системе при кубической аппроксимации зависимости коэффициента боковой силы от угла атаки, в случае возникновения неустойчивости, амплитуды колебаний бесконечно возрастают. Для устранения этого эффекта рассмотрим аппроксимацию зависимости коэффициента боковой силы от угла атаки полиномом пятой степени. В этом случае для автономной системы при отсутствии вынуждающих сил от срыва вихрей будем иметь: $\ddot{T} + \mu_1 \dot{T} + \mu_2 \dot{T}^3 + \mu_3 \dot{T}^5 + p^2 T = 0$. А функция $\Phi(T, \dot{T})$ представима в виде: $\Phi(T, \dot{T}) = -\mu_1 \dot{T} - \mu_2 \dot{T}^3 - \mu_3 \dot{T}^5$.

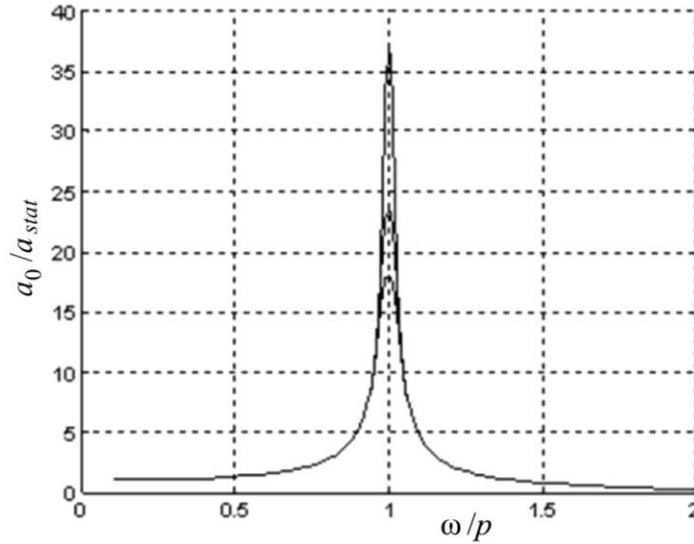


Рис. 5. Характерные зависимости безразмерной амплитуды a_0/a_{stat} от безразмерной частоты возбуждения ω/p для стационарных режимов колебаний.

Принимая, как и ранее $p \equiv \omega$, тогда: $\Phi = -\mu_1 a \omega \cos \vartheta - \mu_2 a^3 \omega^3 \cos^3 \vartheta - \mu_3 a^5 \omega^5 \cos^5 \vartheta$.

В соответствии с (31):

$$B(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \cos \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \left[-\mu_1 a \omega \pi - \mu_2 a^3 \omega^3 \frac{3\pi}{4} - \mu_3 a^5 \omega^5 \frac{5\pi}{8} \right]. \quad C(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \sin \vartheta d\vartheta = 0.$$

Тогда с использованием соотношений (30), получим:

$$\dot{a} = \frac{1}{2} \left[-\mu_1 a - \mu_2 a^3 \omega^2 \frac{3}{4} - \mu_3 a^5 \omega^4 \frac{5}{8} \right]; \quad \dot{\varphi} = 0. \quad (46)$$

Стационарным режимам соответствует уравнение (возвращаемся к переменной p):

$$-a \left(\mu_1 + \frac{3}{4} \mu_2 a^2 p^2 + \frac{5}{8} \mu_3 a^4 p^4 \right) = 0.$$

Пусть $\mu_2 < 0$; $\mu_3 > 0$, что соответствует случаю стационарного отрыва потока. Одно состояние равновесия $a = 0$ будет всегда. Остальные два найдем из уравнения:

$$\frac{5}{8} \mu_3 p^4 a^4 + \frac{3}{4} \mu_2 p^2 a^2 + \mu_1 = 0. \quad (47)$$

Уравнение (47) на плоскости $\mu_1 a^2$ представляет собой уравнение параболы, которая пересекает ось a^2 в точках: $[\mu_1 = 0; a^2 = 0]$ и $\left[\mu_1 = 0; a^2 = -\frac{6}{5} \frac{\mu_2}{p^2 \mu_3} \right]$. Вертикальная касательная этой параболы находится в точке $\left[\mu_1 = \frac{9}{40} \frac{\mu_2^2}{\mu_3}; a^2 = -\frac{3}{5} \frac{\mu_2}{p^2 \mu_3} \right]$. Положение этой параболы показано на рис. 6.

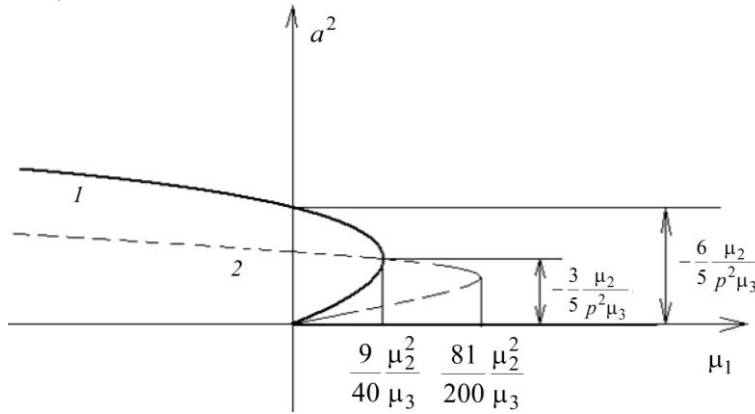


Рис. 6. Диаграмма устойчивости параметров.
1 — область устойчивости, 2 — область неустойчивости.

Исследуем устойчивость стационарных режимов. Будем рассматривать малое возмущение амплитуды относительно стационарного режима: $a = a_0 + \varepsilon u$. Подставляя в (46), и сохраняя лишь линейные относительно ε слагаемые, получим:

$$\dot{u} + \frac{1}{2} \left[\mu_1 + \frac{9}{4} \mu_2 a^2 p^2 + \frac{25}{8} \mu_3 a^4 p^4 \right] u = 0.$$

Решение уравнения ищем в виде $u = C_1 e^{\lambda t}$. Устойчивым решениям отвечают отрицательные значения λ . Подставляя и сокращая на $e^{\lambda t}$, будем иметь:

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left[\mu_1 + \frac{9}{4} \mu_2 a^2 p^2 + \frac{25}{8} \mu_3 a^4 p^4 \right] < 0.$$

Тогда условие устойчивости стационарных режимов колебаний записывается в виде:

$$\mu_1 + \frac{9}{4} \mu_2 a^2 p^2 + \frac{25}{8} \mu_3 a^4 p^4 > 0. \quad (48)$$

Парабола $\mu_1 + \frac{9}{4} \mu_2 a^2 p^2 + \frac{25}{8} \mu_3 a^4 p^4 = 0$ отделяет на плоскости $\mu_1 a^2$ область устойчивости от области неустойчивости.

Из рис. 6 следует, что для $\mu_1 > \frac{9}{40} \frac{\mu_2^2}{\mu_3}$ будет только одно устойчивое состояние равновесия. Система совершает затухающие колебания в соответствии с рис. 3, а. При $\frac{9}{40} \frac{\mu_2^2}{\mu_3} > \mu_1 > 0$ состояний равновесия три: устойчивое состояние равновесия $a = 0$; неустойчивое состояние равновесия, соответствующее нижней ветви параболы, и устойчивое состояние равновесия, соответствующее верхней ветви параболы. На фазовой плоскости $(T, \dot{T})$ это соответствует устойчивой особой точке в начале координат, неустойчивому предельному циклу и устойчивому предельному циклу (рис. 7, а). Это значит, что для всех начальных условий, лежащих внутри неустойчивого предельного цикла, колебания системы затухающие. При начальных условиях, лежащих вне этого цикла, устанавливаются устойчивые автоколебания. Отметим, что учет члена пятой степени в аппроксимации зависимости коэффициента боковой силы от угла атаки привел к ограниченности амплитуд в автоколебательном процессе. Наконец, при $\mu_1 < 0$ состояние равновесия в на-

чале координат неустойчиво, а предельный цикл только один — устойчивый (рис. 7, б), то есть при любых начальных условиях происходят автоколебания системы. Интересным является то обстоятельство, что при $0 < \mu_1 < \frac{9}{40} \frac{\mu_2^2}{\mu_3}$ система может находиться или в покое, или совершать автоколебания. Следовательно, если она находится в покое, то, сообщив ей достаточно большое возмущение, можно перевести ее в автоколебательный режим.

Рассмотрим теперь случай, когда аппроксимация зависимости коэффициента боковой силы от угла атаки такая, что $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$. Опять введем в рассмотрение плоскость $\mu_1 a^2$, на этой плоскости уравнение (47) представляет уравнение параболы. Из (47) следует, что:

$$a^2 = -\frac{3}{5} \frac{\mu_2}{p^2 \mu_3} \pm \sqrt{\frac{9}{25} \frac{\mu_2^2}{p^4 \mu_3^2} - \frac{8}{5} \frac{\mu_1}{p^4 \mu_3}}.$$

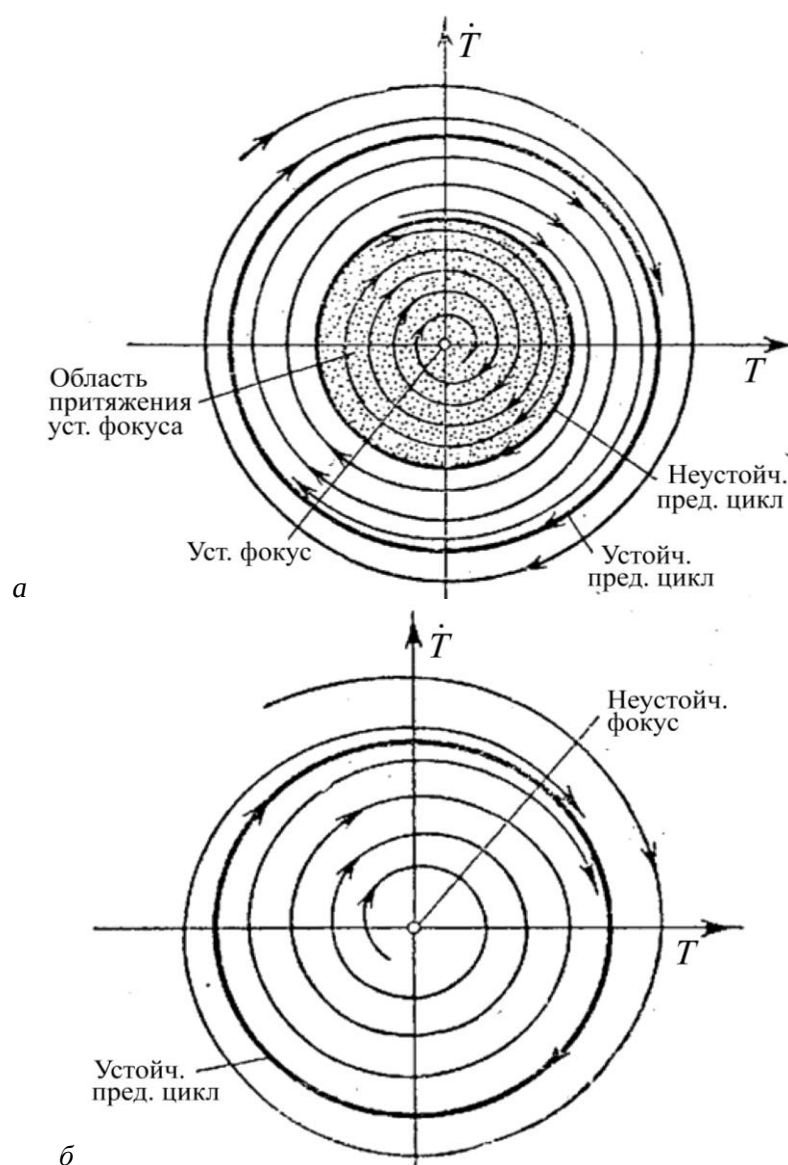


Рис. 7. Фазовые траектории. а — $0 < \mu_1 < \frac{9}{40} \frac{\mu_2^2}{\mu_3}$; б — $\mu_1 < 0$.

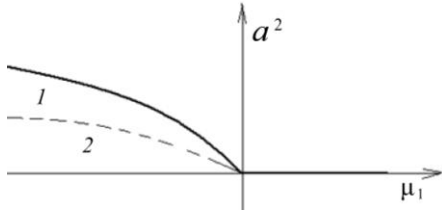


Рис. 8. Диаграмма устойчивости параметров.
1 — область устойчивости;
2 — область неустойчивости.

При $\mu_1=0$ один корень уравнения равен нулю, а второй отрицательный, так как μ_2 и μ_3 одного знака. При $\mu_1<0$ уравнение (47) будет иметь только один положительный корень. Таким образом, парабола расположена как показано на рис. 8.

Как и ранее парабола $\mu_1 + \frac{9}{4}\mu_2 a^2 p^2 + \frac{25}{8}\mu_3 a^4 p^4 = 0$ отделяет на плоскости $\mu_1 a^2$ области устойчивости от об-

ластей неустойчивости. В рассматриваемом случае область устойчивости находится вне этой параболы, нанесенной пунктиром. При $\mu_1>0$ будет только одно устойчивое состояние равновесия, на фазовой плоскости $(T, \dot{T})$ ему соответствует устойчивый фокус (рис. 3, а). Следовательно, система совершает затухающие колебания. При $\mu_1<0$ будет два состояния равновесия: неустойчивое $a=0$ — ему соответствует неустойчивый фокус, и устойчивое, соответствующее верхней ветви параболы — устойчивый предельный цикл (рис. 7, б).

Отметим, что представленные фазовые портреты движения автономной системы без действия внешней периодической силы, обусловленной срывом вихрей, соответствуют результатам работ [9, 10], где исследовалась динамика так называемого маятника Фроуда. Можно показать, что, как и в случае аппроксимации зависимости коэффициента боковой силы от угла атаки кубическим полиномом, для данной нелинейной системы собственная частота колебаний не зависит от амплитуды и соответствует собственной частоте линейной системы. Другими словами, скелетная кривая вырождается в вертикальную прямую $\omega_*(a) = p$.

Рассмотрим теперь воздействие внешней периодической силы, обусловленной срывом вихрей с частотой ω , на автоколебательную систему при аппроксимации зависимости коэффициента боковой силы от угла атаки полиномом пятой степени. Уравнение движения в этом случае может быть записано в виде:

$$\ddot{T} + \mu_1 \dot{T} + \mu_2 \dot{T}^3 + \mu_3 \dot{T}^5 + p^2 T = F \cos \omega t.$$

Введем функцию $\Phi(T, \dot{T}, t)$:

$$\Phi(T, \dot{T}, t) = \omega^2 T - \mu_1 \dot{T} - \mu_2 \dot{T}^3 - \mu_3 \dot{T}^5 - p^2 T + F \cos \omega t;$$

$$T = a \sin \vartheta; \quad \dot{T} = a \omega \cos \vartheta; \quad \vartheta = \omega t + \varphi.$$

Тогда, будем иметь:

$$\Phi = \omega^2 a \sin \vartheta - \mu_1 a \omega \cos \vartheta - \mu_2 a^3 \omega^3 \cos^3 \vartheta - \mu_3 a^5 \omega^5 \cos^5 \vartheta - p^2 a \sin \vartheta + F \cos(\vartheta - \varphi).$$

В соответствии с (29)

$$B(a, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \cos \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \left[-\mu_1 a \omega \pi - \mu_2 a^3 \omega^3 \frac{3\pi}{4} - \mu_3 a^5 \omega^5 \frac{5\pi}{8} + F \pi \cos \varphi \right];$$

$$C(a, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \left[\omega^2 a \pi - p^2 a \pi + F \pi \sin \varphi \right].$$

С учетом (28):

$$\dot{a} = \frac{1}{2} \left[-\mu_1 a - \frac{3}{4} \mu_2 a^3 \omega^2 - \frac{5}{8} \mu_3 a^5 \omega^4 + \frac{F}{\omega} \cos \varphi \right]; \quad \varphi = -\frac{1}{2} \left[\omega - \frac{p^2}{\omega} + \frac{F}{\omega a} \sin \varphi \right]. \quad (49)$$

Тогда, для стационарных режимов колебаний:

$$-\mu_1 a - \frac{3}{4} \mu_2 a^3 \omega^2 - \frac{5}{8} \mu_3 a^5 \omega^4 = -\frac{F}{\omega} \cos \varphi; \quad \omega a - \frac{p^2 a}{\omega} = -\frac{F}{\omega} \sin \varphi. \quad (50)$$

Возведем оба равенства (50) в квадрат и сложим, тогда получим уравнение пятой степени относительно a^2 для определения зависимости амплитуды вынужденных колебаний a от частоты возбуждения ω :

$$\left(\frac{5}{8} \mu_3 \omega^5 \right)^2 a^{10} + \frac{15}{16} \mu_2 \mu_3 \omega^8 a^8 + \left(\frac{5}{4} \mu_1 \mu_3 + \frac{9}{16} \mu_2^2 \right) \omega^6 a^6 + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 \omega^4 a^4 + (\mu_1 \omega)^2 a^2 + (\omega^4 a^2 - 2p^2 a^2 \omega^2 + p^4 a^2) = F^2.$$

В резонансном случае, при $p = \omega$:

$$\left(\frac{5}{8} \mu_3 \omega^5 \right)^2 a^{10} + \frac{15}{16} \mu_2 \mu_3 \omega^8 a^8 + \left(\frac{5}{4} \mu_1 \mu_3 + \frac{9}{16} \mu_2^2 \right) \omega^6 a^6 + \frac{3}{2} \mu_1 \mu_2 \omega^4 a^4 + (\mu_1 \omega)^2 a^2 = F^2.$$

Поделив второе уравнение (50) на первое, получим соотношение для определения фазы:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega a - \frac{p^2 a}{\omega}}{-\mu_1 a - \frac{3}{4} \mu_2 a^3 \omega^2 - \frac{5}{8} \mu_3 a^5 \omega^4}.$$

Тогда в резонансном случае: $\operatorname{tg} \varphi = 0$; $\varphi = 0$.

Исследуем теперь устойчивость стационарных режимов колебаний. В соответствии с идеей метода возмущений рассмотрим малые отклонения от стационарного режима:

$$a = a_0 + \varepsilon u; \quad \varphi = \varphi_0 + \varepsilon w, \quad (51)$$

где ε — бесконечно малый параметр; a_0, φ_0 — равновесные значения амплитуды и фазы.

Подставляя (51) в (49), и сохраняя только линейно зависящие от ε слагаемые, получим систему уравнений в возмущениях:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{1}{2} \left[-\mu_1 u - \frac{9}{4} \mu_2 a_0^2 \omega^2 u - \frac{25}{8} \mu_3 a_0^4 \omega^4 u - \frac{F}{\omega} \sin \varphi_0 w \right] \\ \dot{w} = -\frac{1}{2} \frac{F}{\omega a_0} \cos \varphi_0 w \end{cases}. \quad (52)$$

Система уравнений (52) может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \dot{u} = K_{11} u + K_{12} w \\ \dot{w} = K_{21} u + K_{22} w \end{cases}. \quad (53)$$

Решение системы (53) будем искать в виде: $u = C_1 e^{\lambda t}$; $w = C_2 e^{\lambda t}$. Подставляя и сокращая на $e^{\lambda t}$, получим:

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{2} \left(-\mu_1 - \frac{9}{4} \mu_2 a_0^2 \omega^2 - \frac{25}{8} \mu_3 a_0^4 \omega^4 \right) - \lambda \right] C_1 - \frac{F}{2\omega} \sin \varphi_0 C_2 = 0 \\ \left[-\frac{1}{2} \frac{F}{\omega a_0} \cos \varphi_0 - \lambda \right] C_2 = 0 \end{cases} \quad (54)$$

Нетривиальное решение будет в случае, если определитель системы (54) равен нулю. Тогда, приходим к следующему характеристическому уравнению:

$$\left(\frac{\mu_1}{2} + \frac{9}{8} \mu_2 a_0^2 \omega^2 + \frac{25}{16} \mu_3 a_0^4 \omega^4 + \lambda \right) \left(\lambda + \frac{1}{2} \frac{F}{\omega a_0} \cos \varphi_0 \right) = 0. \quad (55)$$

Для резонансного случая $\cos \varphi_0 = 1$ и уравнение (55) представимо в виде:

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Корни этого уравнения имеют отрицательные действительные части в случае, если:

$$\begin{aligned} b(a_0) &= \frac{1}{2} \left(\mu_1 + \frac{9}{4} \mu_2 a_0^2 \omega^2 + \frac{25}{8} \mu_3 a_0^4 \omega^4 + \frac{F}{\omega a_0} \right) > 0; \\ c(a_0) &= \frac{1}{2} \left(\mu_1 + \frac{9}{4} \mu_2 a_0^2 \omega^2 + \frac{25}{8} \mu_3 a_0^4 \omega^4 \right) \left(\frac{1}{2} \frac{F}{\omega a_0} \right) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, условием устойчивости стационарных режимов колебаний является:

$$\mu_1 + \frac{9}{4} \mu_2 a_0^2 \omega^2 + \frac{25}{8} \mu_3 a_0^4 \omega^4 > 0.$$

Опять же, это условие формально совпадает с условием устойчивости стационарных режимов колебаний автономной системы (48), однако амплитуда a_0 здесь соответствует вынужденным колебаниям. Таким образом, если колебания автономной системы устойчивы, то соответствующий резонансный режим вынужденных колебаний под действием срыва вихрей также устойчив.

В работе рассмотрен механизм возникновения автоколебаний подъемно-мачтовых устройств, связанный с их нелинейными гидродинамическими характеристиками в случае стационарного отрыва потока при закритических углах атаки, а также воздействие на эту автоколебательную систему внешних периодических сил, обусловленных срывом вихрей по типу дорожки Кармана. Показана возможность численного определения нестационарных гидродинамических сил, действующих на ПМУ, уже на ранних стадиях проектирования, и проведено сопоставление с экспериментальными данными.

На основе метода осреднения получено соотношение для определения амплитуд стационарных колебаний при воздействии на автоколебательную систему внешних периодических сил, обусловленных срывом вихрей. При аппроксимации коэффициента боковой силы от угла атаки полиномом третьей степени, это соотношение представляет собой уравнение третьей степени относительно квадрата стационарной амплитуды, а при

аппроксимации коэффициента боковой силы от угла атаки полиномом пятой степени — уравнение пятой степени относительно квадрата стационарной амплитуды.

Определены условия устойчивости стационарных режимов колебаний для различных вариантов аппроксимации гидродинамических характеристик подъемно-мачтовых устройств. Показано, что в автономной системе при кубической аппроксимации зависимости коэффициента боковой силы от угла атаки, в случае возникновения неустойчивости, амплитуды колебаний бесконечно возрастают. Для устранения этого эффекта необходимо рассматривать аппроксимацию зависимости коэффициента боковой силы от угла атаки полиномом пятой степени. На примере реальной конструкции ПМУ с использованием приведенных соотношений построены амплитудно-частотные характеристики ПМУ в резонансной зоне.

Литература

1. Алдошин Г. Т. Теория линейных и нелинейных колебаний. СПб.: Лань, 2013. 312 с.
2. Девнин С. И. Гидроупругость конструкций при отрывном обтекании. Л.: Судостроение, 1975. 192 с.
3. Девнин С. И. Аэрогидромеханика плохообтекаемых конструкций: справочник. Л.: Судостроение, 1983. 331 с.
4. Светлицкий В. А. Механика стержней. М.: Высшая школа, 1987. Т. 2. 304 с.
5. Купреев В. В., Сухоруков А. Л., Чернецов В. А. Математическое моделирование динамики плавучего затвора при посадке на порог // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2008. № 2. С. 57—66.
6. Павлихина М. А., Смирнов Л. П. Вихревой след при обтекании колеблющихся цилиндров // Изв. АН СССР, ОТН. 1958. № 8. С. 124—127.
7. Bishop R. E. D., Hassan A. Y. The lift and drag forces on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid // Proc. Royal Soc. (London). 1964. V. A277. P. 32—75.
8. Блехман И. И. Синхронизация в природе и технике. М.: Наука, 1981. 351 с.
9. Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний. Л.: Судпромгиз, 1962. 196 с.
10. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фужаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976. 384 с.
11. Sarpkaya T. Vortex-induced oscillations. A selective review // J. Appl. Mech. 1979. V. 46. P. 241—258.
12. Барништейн М. Ф. Аэродинамическая неустойчивость высоких сооружений и гибких конструкций. Динамический расчет сооружений на специальные воздействия. М.: Стройиздат, 1981. С. 80—91.
13. Skop R. A., Griffin O. M. A model for the vortex-excited resonant response of bluff cylinders // J. Sound Vibr. 1973. V. 27. P. 225—233.
14. Tamura Y, Amano A. Mathematical model for vortex induced oscillations of continuous system with circular cross section // J. Wind Engin.&Ind. Aerodyn. 1983. V. 14. P. 431—442.
15. Рябинин А. Н. Два приложения модели «жидкого осциллятора» // Математическое моделирование. 1997. Т. 9, № 7. С. 26—35.
16. Parkinson G. V., Brooks N. P. H. On the aeroelastic instability of bluff cylinders // J. Appl. Mech. 1961. V. 28. P. 252—258.
17. Parkinson G. V., Smith J. D. The square prism as an aeroelastic nonlinear oscillator // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1964. V. 17. P. 225—239.
18. Люсин В. Д., Рябинин А. Н. О галопировании призм в потоке газа или жидкости // Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова. 2010. Вып. 53 (337). С. 79—84.
19. Iwan W. D. The vortex induced oscillation of elastic structural elements // J. Engin. for Industry. 1975. V. 97. P. 1378—1382.
20. Симиу Э., Сканлан Р. Воздействие ветра на здания и сооружения / Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1984. 358 с.
21. Рутман Ю. Л., Мелешко В. А. Оценка сооружений на возникновение галопирования // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6. С. 5—11.
22. Саленко С. Д., Обуховский А. Д., Гостеев Ю. А., Телкова Ю. В. Исследование структуры течения в окрестности двух балок квадратного поперечного сечения в условиях интерференции // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17, № 2. С. 313—323.
23. Токарев О. К., Короткин А. И. Прикладные проблемы аэродинамики высотных зданий // Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова. 2010. Вып. 53(337). С. 131—138.
24. Пановко Г. Я., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 353 с.
25. Колесников К. С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
26. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с.

27. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 409 с.

28. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1958. 408 с.

Статья поступила в редакцию 16.01.2014 г.



© A. L. Sukhorukov

Central Design Bureau for Marine Engineering «Rubin», Saint-Petersburg, Russia

su_andr@yahoo.com

STALL FLUTTER AS ONE OF CAUSES OF MAST HOISTING GEAR VIBRATION

This paper examines the onset mechanism of self-oscillations of mast hoisting gears (MHG) related to their non-linear hydrodynamic characteristics as well as the action of external periodic forces on this self-oscillating system caused by the vortex separation similar to the Karman vortex street type. MHG oscillation equations under determined and random hydrodynamic actions are presented. Provision for numerical determination at initial design stages of unsteady forces acting on MHG is demonstrated and comparison with experimental data is provided. On the basis of averaging method relationships were obtained for the determination of amplitudes of steady-state oscillations under the action of external periodic forces on the self-oscillating system due to vortex separation. When the coefficient of side force due to attack angle is approximated by the third-order polynomial, this relationship will be a cubic equation relative to the squared steady-state amplitude but when the same is approximated by the fifth-order polynomial, this relationship will be a quintic equation. Stability conditions of steady-state oscillation modes were obtained for various options of approximation of MHG hydrodynamic characteristics. It is shown that in the autonomous system with a cubic approximation of the side force versus attack angle relationship, amplitudes increase infinitely, if instability appears. To eliminate this effect the fifth-order polynomial approximation of the side force versus attack angle relationship is required. With an actual MHG structure being taken as an example, MHG amplitude-frequency characteristics in the resonant area were plotted using the above-mentioned relationships.

Key words: flutter, mast hoisting gear, vortex separation, self-oscillations, Karman vortex street, hydroelasticity, stability of steady-state oscillatory modes.